

Sanja Sruk, Zagreb

## NEKE DRUGE GEOMETRIJE

Matematiku svi smatraju najtočnijom i najpreciznijom znanosti. Jedan i jedan uvijek su dva, jednom dokazani poučci vrijede zauvijek. Čak u se u svakodnevnom govoru za neupitne činjenice udomaćile izreke „s matematičkom točnošću” i „s matematičkom sigurnošću”, dok se pogreške opravdavaju izrekom „nije to matematika”. Međutim, povijest matematike pokazuje nam da se matematičari često nisu slagali oko nekih ideja ili su pronalazili pogreške u dokazima nekih poučaka. Neka su matematička pitanja stoljećima bila otvorena prije nego što je pronađen odgovor, a za mnogim se odgovorima još uvijek traga. Jedan od problema koji je više od 2000 godina mučio matematičare je tzv. „problem petog postulata”. Rješenje tog problema pokazalo je postojanje nekih geometrija drugačijih od geometrije koju učimo u školi.



Već do 3. st. pr. Kr. grčki su matematičari prikupili puno znanja iz raznih područja matematike, a posebno geometrije. Ta je znanja sistematizirao Euclid u svojoj čuvenoj knjizi „Elementi”. Knjiga započinje definicijama osnovnih geometrijskih pojmova (točka, dužina, ravnina, kut, lik...), a zatim slijede aksiomi kojima se opisuju opća svojstva veličina te postulati, osnovne tvrdnje geometrijskog karaktera. Na temelju tih aksioma i postulata dokazuju se razni poučci i izgrađuje cijela geometrija ravnine. Postulata ima pet, a upravo je peti onaj sporni. U izvornom obliku dosta je zamršen i glasi: *Ako pravac koji siječe dva druga pravca tvori s njima s iste strane unutarnje kutove čiji je zbroj manji od dva prava kuta, ta se dva pravca sastaju s one strane na kojoj je taj zbroj manji od dva prava kuta.* Može se izreći i u ekvivalentnom, ali jednostavnijem obliku: *Točkom izvan pravca može se povući točno jedan pravac paralelan s tim pravcem.*

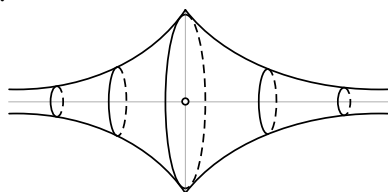


Među matematičarima je prevladavalo mišljenje da taj 5. postulat nije neovisan nego se može izvesti kao poučak pomoću preostala četiri postulata, ali nikome nije pošlo za rukom to dokazati. A onda, prije točno 200 godina, točnije 23. veljače 1826. godine, na sjednici Fizičko-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Kazanu profesor toga fakulteta Nikolaj Ivanovič Lobačevski (1792. – 1856.) održao je predavanje *Kratko izlaganje osnova geometrije sa strogim dokazom teorema o paralelnim pravcima*, a u godinama koje slijede objavio je niz radova na tu temu. Nakon neuspjelog pokušaja dokazivanja zavisnosti petog postulata, promijenio je pristup. Odvojio je sve teoreme iz geometrije koji se ne dokazuju pomoću problematičnoga petog postulata (to je tzv. apsolutna geometrija), a zatim kao polaznu točku nove geometrije Euklidov peti postulat zamijenio



novim, suprotnim: *Postoje barem dva pravca u ravnini paralelna danom pravcu koja prolaze točkom izvan toga pravca* i tako je rođena neeuklidska geometrija.

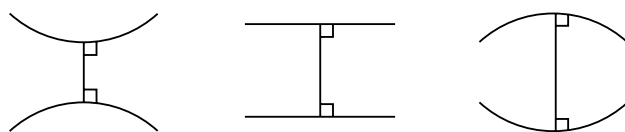
Isprva su matematičari bili poprilično sumnjičavi prema toj ideji. Možda se i vi sad pitate kako bi uopće bilo moguće kroz točku izvan pravca povući barem dvije paralele sa zadanim pravcem. To je doista nemoguće u ravnini, ali postoje modeli tzv. hiperboličkih ravnina u kojima to vrijedi. Jedan od njih je ploha koja se naziva pseudosfera, a geometrija na toj plohi hiperbolička geometrija ili geometrija Lobačevskog, iako su u isto vrijeme još dva matematičara, János Bolyai i Carl Friedrich Gauss, došla do istog otkrića kao i Lobačevski. U toj geometriji ne postoje dva, nego beskonačno mnogo pravaca koji prolaze točkom izvan zadanog pravca i paralelni su s njim, a zbroj kutova u trokutu uvijek je manji od  $180^\circ$ .



Slika 1.  
Pseudosfera

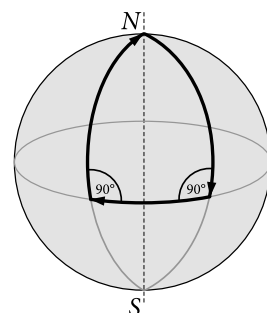
Kasnije su otkrivene i druge neeuklidske geometrije, eliptička i sferna, u kojima je zbroj kutova u trokutu veći od  $180^\circ$ . Najzorniji model sferne trigonometrije predstavlja Zemlja. Pogledamo li trokut kojemu su stranice ekvator i dva meridijana, vidimo da taj trokut ima dva prava kuta. Odabirom nultog i  $90^\circ$  meridijana dobivamo trokut s tri prava kuta.

Lako možemo primijetiti da je euklidska geometrija prijelaz, odnosno granica između hiperboličke i eliptičke geometrije.



Slika 3. Paralelni pravci u različitim geometrijama

Otkriće postojanja novih geometrija ostavilo je velik trag u znanosti, promijenilo dotadašnja filozofska shvaćanja svijeta i otvorilo nove mogućnosti primjene geometrije. Ono je bilo i temelj cjelokupnoj Einsteinovoj općoj teoriji relativnosti te je predstavljalo ogromnu prekretnicu u pristupu znanosti. Kao što je Nikola Kopernik svojim heliocentričnim sustavom otkrio da se Zemlja i drugi planeti okreću oko Sunca i promijenio dotadašnja vjerovanja da je Zemlja u središtu svemira, tako je i Lobačevski svojim otkrićem napravio revoluciju u znanosti, pa ga je zato engleski matematičar William Kingdon Clifford nazvao *Kopernikom geometrije*.



Slika 2. Trokut na sferi

