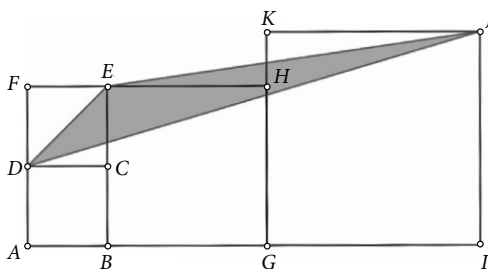
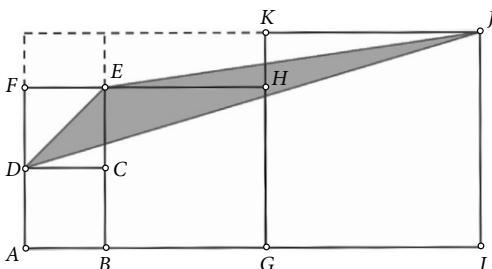


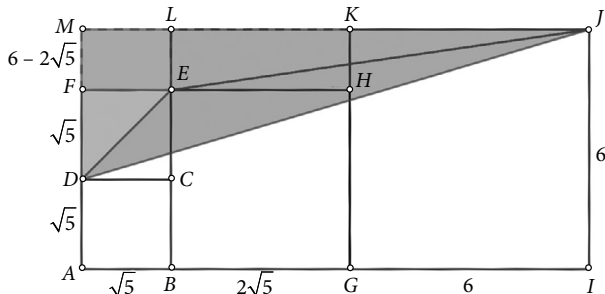
Primjer 1. Zadana su četiri kvadrata. Kvadrat $ABCD$ ima površinu 5, kvadrat $GIJK$ ima površinu 36. Kolika je površina trokuta DJE ?



Rješenje: Dopunimo sliku do pravokutnika $AIJM$.



Kvadrati $ABCD$ i $DCEF$ imaju jednu zajedničku stranicu, što znači da su im i površine jednake. Budući da su im površine jednake 5, njihove stranice imaju duljine $\sqrt{5}$. Kvadrat $BGHE$ stoga ima stranice duljina $2\sqrt{5}$. Kvadrat $GIJK$ ima površinu 36 pa njegove stranice imaju duljinu 6. Dakle, poznate su nam duljine stranica svih kvadrata na slici.



Traženu površinu trokuta DJE možemo izračunati tako da od površine trokuta DJM oduzmemo površine trokuta DEF i EJL te površinu pravokutnika $FELM$, tj. vrijedi

$$P_{DJE} = P_{DJM} - P_{DEF} - P_{EJL} - P_{FELM} \quad (1)$$



Trokut DJM je pravokutan, a njegove katete imaju duljine $|MJ| = 3\sqrt{5} + 6$ i $|MD| = 6 - \sqrt{5}$.

$$\begin{aligned} \text{Slijedi da je } P_{DJM} &= \frac{|MJ| \cdot |MD|}{2} = \frac{(3\sqrt{5} + 6)(6 - \sqrt{5})}{2} = \frac{18\sqrt{5} - 15 + 36 - 6\sqrt{5}}{2} = \\ &= \frac{12\sqrt{5} + 21}{2} = 6\sqrt{5} + \frac{21}{2}. \end{aligned}$$

Trokut DEF polovina je kvadrata $DCEF$ površine 5. Slijedi $P_{DEF} = \frac{5}{2}$.

Trokut EJL je pravokutan, a njegove katete imaju duljine $|JL| = 6 + 2\sqrt{5}$ i $|EL| = 6 - 2\sqrt{5}$.

$$\text{Slijedi da je } P_{EJL} = \frac{|JL| \cdot |EL|}{2} = \frac{(6 + 2\sqrt{5})(6 - 2\sqrt{5})}{2} = \frac{6^2 - (2\sqrt{5})^2}{2} = \frac{36 - 20}{2} = 8.$$

Pravokutnik $FELM$ ima stranice duljina $|FE| = \sqrt{5}$ i $|FM| = 6 - 2\sqrt{5}$.

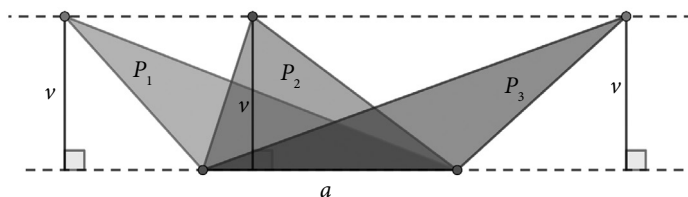
$$\text{Slijedi da je } P_{FELM} = |FE| \cdot |FM| = \sqrt{5} \cdot (6 - 2\sqrt{5}) = 6\sqrt{5} - 2 \cdot (\sqrt{5})^2 = 6\sqrt{5} - 10.$$

Uvrstimo li sve rezultate u jednakost (1), dobit ćemo traženu površinu trokuta DJE .

$$P_{DJE} = 6\sqrt{5} + \frac{21}{2} - \frac{5}{2} - 8 - (6\sqrt{5} - 10) = 6\sqrt{5} + \frac{16}{2} - 8 - 6\sqrt{5} + 10.$$

Konačno, tražena je površina $P_{DJE} = 10$.

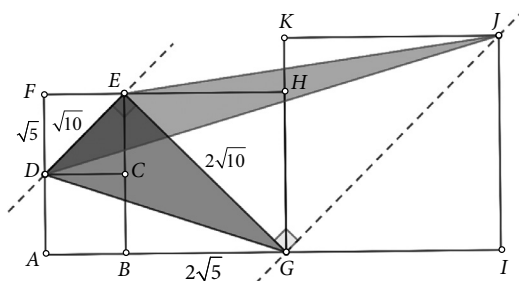
Zanimljivost ovoga zadatka je da se ista površina mogla izračunati puno jednostavnije i brže, što će se vidjeti u nastavku. Pritom ćemo iskoristiti sljedeću poznatu činjenicu.



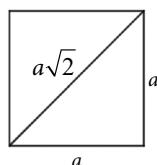
Tri istaknuta trokuta na gornjoj slici imaju zajedničku jednu stranicu duljine a , a treći vrh im je na pravcu paralelnom toj stranici. Znači, sva tri trokuta imaju jednaku visinu duljine v . Onda su njihove površine jednake $\frac{a \cdot v}{2}$, tj. vrijedi $P_1 = P_2 = P_3$.

Primijenimo ovo na naš zadatak.





Prisjetimo se:



Trokuti DJE i DGE imaju zajedničku stranicu \overline{DE} , a preostali vrhovi G i J pripadaju pravcu paralelnom pravcu DE . To znači da trokuti DJE i DGE imaju jednake površine.

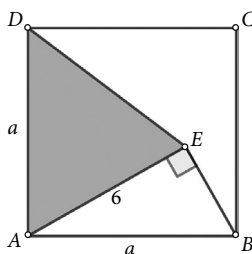
Dužina \overline{DE} dijagonala je kvadrata $DCEF$ sa stranicom duljine $|DC| = \sqrt{5}$. Slijedi da je $|DE| = |DC| \cdot \sqrt{2} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{10}$.

Slično je i dužina \overline{EG} dijagonala kvadrata $BGHE$ sa stranicom duljine $|BG| = 2\sqrt{5}$. Dakle, vrijedi da je $|EG| = |BG| \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{10}$.

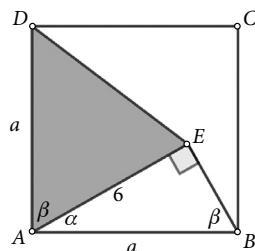
Valja primijetiti da je trokut DGE pravokutan s pravim kutom u vrhu E , a katete su mu upravo dužine \overline{DE} i \overline{EG} .

Dakle, $P_{DJE} = P_{DGE} = \frac{|DE| \cdot |EG|}{2} = \frac{\sqrt{10} \cdot 2\sqrt{10}}{2} = 10$, što je isti rezultat koji smo dobili i na prvi način.

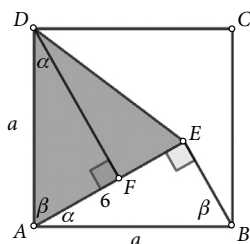
Primjer 2. Kolika je površina istaknutoga trokuta AED ?



Rješenje: Poznata je samo duljina stranice $|AE| = 6$. Osim toga, trokut ABE je pravokutan pa je zbroj mjera kutova $\angle BAE$ i $\angle EBA$ jednak 90° . Označimo te mjere s α , odnosno β . No, i kut $\angle EAD$ ima mjeru β jer je $\angle BAD$ pravi kut.



Nacrtajmo visinu iz vrha D na dužinu \overline{AE} . Nožište te visine označimo s F .

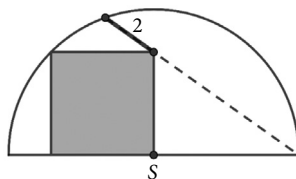
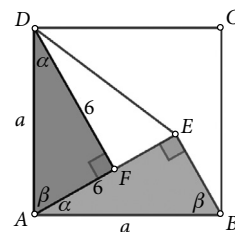


Kako je $\angle DFA$ pravi kut, nužno je da $\angle ADF$ ima mjeru α jer je to drugi šiljasti kut u pravokutnom trokutu AFD .

Promotrimo sada pravokutne trokute ABE i AFD . Odgovarajući su im kutovi sukladni, a duljine hipotenuza jednake. To znači da su navedeni trokuti sukladni (prema KSK poučku) te vrijedi $|DF| = |AE| = 6$.

Stoga je tražena površina trokuta AED jednaka $P = \frac{|AE| \cdot |DF|}{2} = \frac{6 \cdot 6}{2} = 18$.

Zadatak 1. Izračunajte površinu kvadrata.



Izvor:

1. <https://www.youtube.com/@MindYourDecisions/videos>
2. https://www.youtube.com/@learn_math_with_alex



SVOJIM
ČITATELJIMA
I SURADNICIMA
ŽELIMO SRETAN
BOŽIĆ
I USPJEŠNU NOVU
2026. GODINU!

UREDNIŠTVO **MATKE**

