Neki problemi s prelijevanjima

Julije Jakšetić[1], *Josip Lopatič*[2], *Marjan Praljak*[3], *Robert Soldo*[4]

U ovom radu ćemo izložiti nekoliko zanimljivih zadataka s prelijevanjima. Takvi zadatci se najčešće javljaju na natjecanjima viših razreda osnovne škole i rješavaju se pokusno. Na početku navodimo jedan takav primjer.

Zadatak 1. (Regionalno natjecanje 2000.) *Na raspolaganju je boca od 8 dl do vrha napunjena mlijekom, te prazne boce od 5 dl i od 3 dl. Kako ćemo, koristeći ove tri boce, izmjeriti 4 dl mlijeka?*

Rješenje. Rješenje ćemo predočiti tablicom.

8 dl	8	3	3	6	6	1	1
5 dl	0	5	2	2	0	5	4
3 dl	0	0	3	0	2	2	3

$\square$

Da zadatci ovog tipa mogu biti i znatno složeniji pokazuje sljedeći primjer i njegovo poopćenje.

Zadatak 2. *a) U posudu je natočeno 12 L vode. Kako uz pomoć posuda od 5 L i 7 L razdijeliti tekućinu na dva jednaka dijela?*

b) Za koje a i b možemo razdijeliti popola $a+b$ litara vode koristeći samo posude od a, b i $a+b$ litara vode?

Rješenje. a) Rješenje ovog dijela zadatka, kao i u prethodnom, predočit ćemo ovom tablicom.

12 L	12	5	5	10	10	3	3	8	8	1	1	6
7 L	0	7	2	2	0	7	4	4	0	7	6	6
5 L	0	0	5	0	2	2	5	0	4	4	5	0

b) Neka je $a \geq b$. Dokažimo da se c litara vode, $c \leq a$, može dobiti prelijevanjem ako i samo ako je $c = ma + lb$, gdje su m i l cijeli brojevi. Ovaj problem rješavamo bez pretpostavke da su a i b cijeli brojevi.

Pretpostavimo prvo da je $c = ma + lb$ za neke cijele brojeve m i l, te neka je $0 \leq c \leq a$. Želimo dokazati da prelijevanjem u konačno mnogo koraka možemo u nekoj od posuda dobiti c litara vode. Promatrat ćemo slučajeve u ovisnosti o cijelom broju m.

---

[1] Autor je redoviti profesor na Prehrambeno-biotehnološkom fakultetu, Zagreb;
e-pošta: `julije.jaksetic@pbf.unizg.hr`

[2] Autor je magistar znanosti primijenjene matematike na Građevinskom fakultetu, Zagreb;
e-pošta: `josip.lopatic@grad.unizg.hr`

[3] Autor je izvanredni profesor na Prehrambeno-biotehnološkom fakultetu, Zagreb;
e-pošta: `marjan.praljak@pbf.unizg.hr`

[4] Autor je inženjer teorijske matematike zaposlen u firmi Pružne građevine, Zagreb;
e-pošta: `robert.soldo@prg.hr`

1° $m \geq 0$. Neka su l_k i d_k, za $k = 0, 1, \ldots, m$, kvocijent i ostatak pri cjelobrojnom dijeljenju broja ka brojem b, tj. $ka = l_k b + d_k$, pri čemu je $0 \leq d_k < b$ i $l_k = \left\lfloor \dfrac{ka}{b} \right\rfloor$ je najveći cijeli broj takav da je $l_k b \leq ka$. Uočimo i da su brojevi l_k nenegativni.

Nadalje, kako je

$$c = ma + lb = (ma - l_m b) + (l_m + l)b = d_m + (l_m + l)b, \tag{1}$$

te jer je $(-l)b = ma - c \leq ma$, zbog maksimalnosti cijelog broja l_m, slijedi $-l \leq l_m$, odnosno $l_m + l \geq 0$. Stoga, na osnovu identiteta (1), dovoljno je pokazati da je prelijevanjem moguće dobiti stanje u kojem je posuda volumena b L prazna, d_m litara vode nalazi se u posudi volumena a L, te pritom u posudi najvećeg volumena imamo barem $(l_m + l)b$ litara vode, koje bismo potom u $2(l_m + l)$ prelijevanja po b litara, koristeći posudu volumena b L, prelili u posudu volumena a L. Kako doći do d_m litara vode u posudi volumena a L tako da je pritom posuda volumena b L prazna, proizlazi iz sljedeće tablice:

$(a+b)$ L	$a+b$	b	b	$2b$	$2b$	$3b$	$\cdots$	$(l_1+1)b$
a L	0	a	$a-b$	$a-b$	$a-2b$	$a-2b$	$\cdots$	$d_1 = a - l_1 b$
b L	0	0	b	0	b	0	$\cdots$	0

$(l_1+1)b$	$-a+(l_1+1)b$	$-a+(l_1+1)b$	$-a+(l_1+2)b$
0	a	$2a-(l_1+1)b$	$2a-(l_1+1)b$
$d_1 = a - l_1 b$	$d_1 = a - l_1 b$	b	0

$-a+(l_2+1)b$	$\cdots$	$-(m-1)a+(l_m+1)b$
$d_2 = 2a - l_2 b$	$\cdots$	$d_m = ma - l_m b$
0	$\cdots$	0

Da bismo pojasnili prelijevanja iz gornje tablice, uređenom trojkom označit ćemo stanje u posudama, redom po njezinim komponentama: prva komponenta je količina vode u posudi volumena $(a+b)$ L, druga je količina vode u posudi volumena a L i treća je količina vode u posudi volumena b L.

Nadalje, označimo k-ti trenutak prelijevanja u kojem imamo sljedeće količine vode u posudama $(-(k-1)a + (l_k+1)b, d_k, 0)$, $k = 1, 2, \ldots, m$. Uočimo, na osnovu činjenice $ka < (l_k+1)b \leq ka+b$, u k-tom trenutku prelijevanja za količinu vode u posudi volumena $(a+b)$ L vrijedi $-(k-1)a + (l_k+1)b \in \langle a, a+b]$, $k = 1, 2, \ldots, m$.

Kako dalje, za $k < m$, od k-tog trenutka prelijevanja dolazimo do $(k+1)$-vog trenutka prelijevanja? Nakon k-tog trenutka prelijevanja, u prvom sljedećem prelijevanju stanje u posudama je $(-(k-1)a+(l_k+1)b, 0, d_k)$, tj. količinu vode $d_k \in [0, b\rangle$ iz posude volumena a L prelili smo u posudu volumena b L. S obzirom da u posudi volumena $(a+b)$ L imamo više od a litra vode, a litara vode iz te posude prelit ćemo u posudu volumena a L, pa po tom prelijevanju u posudama imamo stanje $(-ka + (l_k+1)b, a, d_k)$.

Trenutno u posudi volumena b L imamo manje od b litara vode, pa ćemo je nadopuniti do vrha sadržajem iz posude volumena a L, tj. iz posude volumena a L prelit ćemo $b - d_k \in \langle 0, b]$ litara vode u posudu volumena b L. Nakon toga, u posudi volumena a L imamo $a - (b - d_k) = a - b + ka - l_k b = (k+1)a - (l_k+1)b$ litara vode, odnosno stanje u posudama je $(-ka + (l_k+1)b, (k+1)a - (l_k+1)b, b)$. Nakon daljnjeg prelijevanja b litara vode iz posude volumena b L u posudu volumena $(a+b)$ L, dobivamo u posudama stanje $(-ka + (l_k+2)b, (k+1)a - (l_k+1)b, 0)$. Ovo prelijevanje možemo sprovesti jer smo od k-tog trenutka prelijevanja iz posude volumena $(a+b)$ L jedino izlili a litara vode u posudu volumena a L, stoga neposredno prije ovog prelijevanja u posudi volumena $(a+b)$ L nemamo više od b litara vode.

Nakon posljedenjeg prelijevanja količinu vode u posudi volumena a L možemo zapisati u obliku

$$(k+1)a-(l_k+1)b=(k+1)a-l_{k+1}b+\big(l_{k+1}-(l_k+1)\big)b=d_{k+1}+\big(l_{k+1}-(l_k+1)\big)b.$$

Zbog činjenice da je $(l_k+1)b \leq ka+b \leq (k+1)a$, te zbog maksimalnosti cijelog broja l_{k+1}, slijedi $l_k+1 \leq l_{k+1}$, tj. $l_{k+1}-(l_k+1) \geq 0$. Konačno, nakon dodatnih $2\big(l_{k+1}-(l_k+1)\big)$ prelijevanja po b litara vode iz posude volumena a L u posudu volumena $(a+b)$ L, koristeći posudu volumena b L, u posudi volumena $(a+b)$ L imamo $-ka+(l_k+2)b+\big(l_{k+1}-(l_k+1)\big)b=-ka+(l_{k+1}+1)b$ litara vode.

Dakle, nakon posljednjih $2\big(l_{k+1}-(l_k+1)\big)$ prelijevanja, stanje u posudama je $(-ka+(l_{k+1}+1)b, d_{k+1}, 0)$, a to je upravo traženi $(k+1)$-vi trenutak prelijevanja.

Na koncu, ostaje još vidjeti da u m-tom trenutku prelijevanja u posudi volumena $(a+b)$ L ima dovoljno vode za preliti u posudu volumena a L, tj. barem $(l_m+l)b$ litara vode. Koristeći činjenicu da je $c \leq a$, dobivamo $(l_m+l)b=l_mb+c-ma \leq l_mb-(m-1)a < -(m-1)a+(l_m+1)b$, što je i trebalo pokazati.

2° $m<0$. U ovom slučaju postupamo analogno kao u slučaju 1°. Neka su l_k najveći cijeli brojevi takvi da je $l_kb \leq ka$, $k=-1,-2,\ldots,m$. Takvi negativni cijeli brojevi l_k, kao i ranije, dani su s $l_k=\left\lfloor \dfrac{ka}{b} \right\rfloor$ te ponovno definiramo realne brojeve $d_k=ka-l_kb$ koji zadovoljavaju nejednakosti $0 \leq d_k < b$, $k=-1,-2,\ldots,m$.

Kao u slučaju 1°, c je dan identitetom (1) i $l_m+l \geq 0$, pa je i u ovom slučaju cilj prelijevanjem dobiti stanje u kojem je posuda volumena b L prazna, te d_m litara vode nalazi se u posudi volumena a L, a pritom u posudi najvećeg volumena imamo barem $(l_m+l)b$ litara vode. Kako to ostvariti, proizlazi iz sljedeće tablice.

$(a+b)$ L	$a+b$	a	a	$a-b$	$a-b$	$a-2b$	$\cdots$	$a+(l_{-1}+1)b$
a L	0	0	b	b	$2b$	$2b$	$\cdots$	$(-l_{-1}-1)b$
b L	0	b	0	b	0	b	$\cdots$	b

$a+(l_{-1}+1)b$	$2a+(l_{-1}+1)b$	$2a+(l_{-1}+1)b$
a	0	$d_{-1}=-a-l_{-1}b$
$d_{-1}=-a-l_{-1}b$	$d_{-1}=-a-l_{-1}b$	0

$2a+(l_{-2}+2)b$	$2a+(l_{-2}+1)b$	$2a+(l_{-2}+1)b$
$-a+(-l_{-2}-1)b$	$-a+(-l_{-2}-1)b$	a
0	b	$d_{-2}=-2a-l_{-2}b$

$3a+(l_{-2}+1)b$	$3a+(l_{-2}+1)b$	$\cdots$	$-(m-1)a+(l_m+1)b$
0	$d_{-2}=-2a-l_{-2}b$	$\cdots$	$d_m=ma-l_mb$
$d_{-2}=-2a-l_{-2}b$	0	$\cdots$	0

Ponovno, za $k=1,2,\ldots,m$ označimo k-ti trenutak prelijevanja u kojem imamo sljedeće količine vode u posudama $(-(k-1)a+(l_k+1)b, d_k, 0)$. Ako je $k>m$ od k-og trenutka prelijevanja dolazimo do $(k-1)$-vog trenutka prelijevanja analogno kao i u prethodnom slučaju, pritom koristeći sljedeće identitete:

$$-(k-1)a+(l_k+1)b=-(k-1)a+(l_{k-1}+2)b+\big(l_k-(l_{k-1}+1)\big)b,$$

$$d_k=ka+(-l_{k-1}-1)b-\big(l_k-(l_{k-1}+1)\big)b.$$

Detalje prepuštamo čitatelju.

Obrat. Pretpostavimo neka se v litara vode, $v \leq a$, može dobiti prelijevanjem. Želimo pokazati da je tada nužno $v = ma + lb$, za neke cijele brojeve m, l. Zaista, recimo da je u jednoj posudi bilo $v_1 = m_1 a + l_1 b$, odnosno u drugoj posudi $v_2 = m_2 a + l_2 b$, litara vode nakon nekoliko prelijevanja, pri čemu su m_1, l_1, m_2, l_2 cijeli brojevi. Tada je u trećoj prestaloj posudi $(a+b) - v_1 - v_2 = (1 - m_1 - m_2)a + (1 - l_1 - l_2)b$ litara vode, što je ponovno linearna kombinacija volumena posuda aL i bL u kojoj su skalari cijeli brojevi. Tada, bez obzira na to kako organiziramo iduće prelijevanje, broj litara u svakoj od posuda je oblika $m_i'a + l_i'b$ za neke cijele brojeve m_i', l_i'. Stoga, nužno je v traženog oblika.

Na osnovu dokazanog slijedi da pri prelijevanjima možemo dobiti $\dfrac{a+b}{2}$ litara vode u nekoj od posuda ako i samo ako je $\dfrac{a+b}{2} = ma + lb$ za neke cijele brojeve m, l. Odavde imamo $(2m-1)a + (2l-1)b = 0$ ili $\dfrac{a}{b} = \dfrac{2l-1}{1-2m}$. To znači da možemo naći broj c takav da su $\dfrac{a}{c}$ i $\dfrac{b}{c}$ neparni cijeli brojevi. Dakle, prelijevanjem možemo dobiti $\dfrac{a+b}{2}$ litara vode u nekoj od posuda ako i samo postoji broj c takav da su $\dfrac{a}{c}$ i $\dfrac{b}{c}$ neparni cijeli brojevi. $\square$

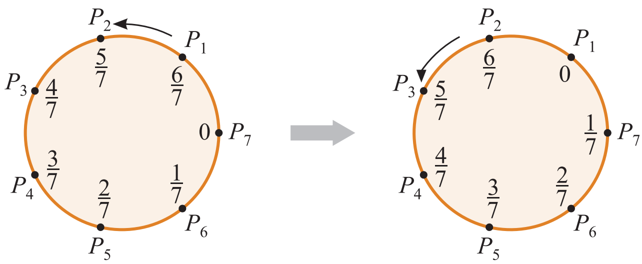
Zadatak 3. (Moskva 1964.) *U n dovoljno velikih čaša nalivena je jednaka količina vode. Iz bilo koje čaše dopušteno je preliti u drugu čašu onoliko vode koliko se u toj čaši već nalazi. Za koje brojeve n je moguće svu vodu preliti u jednu čašu u konačnom broju koraka?*

Rješenje. Prvo ćemo pokazati kako uliti svu vodu u jednu čašu za $n = 2^k$. Podijelimo sve čaše u parove i u svakom paru prelijemo sadržaj jedne čaše u drugu. Kao rezultat dobivamo 2^{k-1} čaša s istom količinom vode. Nakon što ovaj postupak ponovimo još $k-1$ puta, svu vodu ćemo preliti u jednu čašu. Pretpostavimo sada da je za dani n moguće preliti svu vodu u jednu čašu. Dokažimo da je $n = 2^k$. Pretpostavimo da je ukupna količina vode n (na početku je u svakoj čaši količina 1) i pretpostavimo da broj n ima neparni prosti djeljitelj p. Neka je nakon ulijevanja vode iz prve čaše u drugu, količina vode u prvoj jednaka x, a u drugoj y. Tada je u prethodnom koraku u njima bilo redom $x + \dfrac{y}{2}$ i $\dfrac{y}{2}$ količina vode. Dakle, ako je u nekom koraku količina vode u nekoj čaši neskrativi razlomak čiji je brojnik djeljiv s p, tada u prethodnom koraku količina vode u toj čaši ima isti oblik. U posljednjem koraku ostaje jedna čaša u kojoj je količina vode jednaka n, pri čemu je po pretpostavci n djeljiv s p. Stoga, u prvom koraku, kada je količina vode u toj čaši bila 1, ta količina također mora biti neskrativ razlomak čiji je brojnik djeljiv s p. Ovo proturječje nam govori da broj n nema neparnih prostih djeljitelja, tj. oblika je $n = 2^k$. $\square$

Sljedeći zadatak pojavio se na Sveruskoj matematičkoj olimpijadi 1977., a kako njegova formulacija neodoljivo podsjeća na Disneyjeve likove iz animiranog filma "Snjeguljica i sedam patuljaka" čitatelji časopisa "Kvant" proglasili su ga zadatkom godine.

Zadatak 4. *Za okruglim stolom sjedi 7 patuljaka. Ispred svakoga od njih je šalica, a u nekima je naliveno mlijeko. Jedan od patuljaka sve svoje mlijeko razdijeli u šalice ostalih patuljaka na jednake dijelove. Potom to isto napravi patuljak koji sjedi s njegove desne strane, itd. Nakon što je posljednji, sedmi patuljak, natočio svoje mlijeko svima ostalima,* *svaka je šalica sadržavala istu količinu mlijeka kao i na samom početku. U svim šalicama ukupno je 3 litre mlijeka. Koliko je mlijeka bilo na početku u svakoj šalici?*

Rješenje. Jedno rješenje problema prikazano je na sljedećoj slici.



Naime, lako je provjeriti da su dani iznosi rješenje. Nakon što prvi patuljak razdijeli mlijeko (po $\frac{1}{7}$ svakom od ostalih), daljnja raspodjela je potpuno ista, ali s pomakom za jednog patuljka i ukupna količina mlijeka je točno $\frac{1}{7}(1+2+3+4+5+6) = 3$. Naravno, nakon sedam prelijevanja vratit ćemo se na prvobitnu rapodjelu.

Ostaje dokazati da drugih rješenja nema. Prvo ćemo tražiti raspodjelu mlijeka koja će se ponoviti (s pomakom jednog patuljka) nakon samo jednog prelijevanja. U tom slučaju, svaki sljedeći patuljak će sipati istu količinu mlijeka kao i prethodni, recimo $6x$ litara (svakome po x litara). Tada će nakon idućeg prelijevanja onaj koji je točio imati 0 litara, njegov susjed (koji je točio prije njega) imat će x litara, onaj prije njega $2x, \ldots$ i posljednji sedmi patuljak $6x$ litara mlijeka. Iz jednadžbe $x + 2x + \ldots + 6x = 3$ slijedi $x = \frac{1}{7}$ i dobivamo ranije navedeno rješenje.

Još treba vidjeti je li moguće da patuljici izlijevaju različite količine mlijeka (a prvobitna raspodjela se ponavlja tek nakon sedam točenja). Neka tada k-ti patuljak rastoči $6x_k$ litara mlijeka (svakome po x_k litara). Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $x_1 \geq x_k$ za sve $k = 1, 2, \ldots, 7$. Nakon 7 prelijevanja, prvi patuljak koji je istočio $6x_1$ litara mlijeka trebao bi opet imati $6x_1$ litara mlijeka. Dakle, $6x_1 = x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7$, a odakle slijedi $7x_1 = \sum_{i=1}^{7} x_i$. Kada bi za neki $k \in \{1, 2, \ldots, 7\}$ vrijedilo da je $x_1 > x_k$, tada bismo iz posljednje jednakosti dobili $7x_1 = \sum_{i=1}^{7} x_i < \sum_{i=1}^{7} x_1 = 7x_1$, što je kontradikcija. Stoga je nužno $x_1 = x_2 = \ldots = x_7$. Tako dolazimo do već promatranog slučaja u kojemu svi patuljci razdijele istu količinu mlijeka. Znači da drugih rješenja nema i dokaz je gotov.

$\square$

Zadatak 5. (Moskva 1964.) *U n menzura uliveno je n različitih vrsta tekućina, a raspolažemo i jednom praznom menzurom. Možemo li u konačno mnogo prelijevanja dobiti jednaku smjesu u svakoj menzuri, tj. da u svakoj od njih bude po $\frac{1}{n}$ od početne količine svake tekućine i da pritom jedna menzura ostane prazna? Menzure imaju podjele koje nam omogućuju mjerenja volumena ulivene tekućine.*

Rješenje. Odgovor je potvrdan, što ćemo dokazati matematičkom indukcijom (po broju menzura). Baza indukcije, kada imamo dvije menzure (jednu punu i jednu praznu) vrijedi trivijalno. Zato uzmimo da su dane dvije menzure s količinama x_1, x_2 i prazna menzura. Prelijevanja organiziramo na način:

$$\boxed{x_1}\ \boxed{x_2}\ \boxed{}\ \Rightarrow\ \boxed{\frac{x_1}{2}}\ \boxed{x_2}\ \boxed{\frac{x_1}{2}}$$

$$\Rightarrow\ \boxed{\frac{x_1}{2}+\frac{x_2}{2}}\ \boxed{\frac{x_2}{2}}\ \boxed{\frac{x_1}{2}}\ \Rightarrow\ \boxed{\frac{x_1}{2}+\frac{x_2}{2}}\ \boxed{\frac{x_1}{2}+\frac{x_2}{2}}\ \boxed{}$$

Pretpostavimo sada da smo u nekom momentu u prvih k menzura dobili istu smjesu prvih k tekućina i svaka od tih menzura sadrži jednaku količinu tekućine. Dokazat ćemo da možemo organizirati prelijevanja da isto vrijedi i za prvih $k+1$ menzura. Trenutna situacija je:

$$\boxed{\frac{x_1}{k}+\frac{x_2}{k}+\ldots+\frac{x_k}{k}}\ \ldots\ \boxed{\frac{x_1}{k}+\frac{x_2}{k}+\ldots+\frac{x_k}{k}}\ \boxed{x_{k+1}}\ \ldots\ \boxed{x_n}\ \boxed{}$$

U prvom koraku, iz svake od prvih k menzura prelijemo $\dfrac{1}{k+1}$ tekućine u praznu menzuru. Sada je:

$$\boxed{\frac{x_1}{k+1}+\frac{x_2}{k+1}+\ldots+\frac{x_k}{k+1}}\ \ldots\ \boxed{\frac{x_1}{k+1}+\frac{x_2}{k+1}+\ldots+\frac{x_k}{k+1}}\ \boxed{x_{k+1}}\ \ldots$$

$$\ldots\ \boxed{x_n}\ \boxed{\frac{x_1}{k+1}+\frac{x_2}{k+1}+\ldots+\frac{x_k}{k+1}}$$

Dalje ulijemo u prvih k menzura $\dfrac{1}{k+1}$ sadržaja tekućine iz $(k+1)$-ve menzure. Imamo:

$$\boxed{\frac{x_1}{k+1}+\frac{x_2}{k+1}+\ldots+\frac{x_k}{k+1}+\frac{x_{k+1}}{k+1}}\ \ldots$$

$$\ldots\ \boxed{\frac{x_1}{k+1}+\frac{x_2}{k+1}+\ldots+\frac{x_k}{k+1}+\frac{x_{k+1}}{k+1}}\ \boxed{\frac{x_{k+1}}{k+1}}\ \ldots$$

$$\ldots\ \boxed{x_n}\ \boxed{\frac{x_1}{k+1}+\frac{x_2}{k+1}+\ldots+\frac{x_k}{k+1}}$$

Na koncu, svu tekućinu iz posljednje (prvotno prazne) menzure prelijemo u $(k+1)$-vu menzuru i za rezultat imamo da u prvih $k+1$ menzura imamo jednaku smjesu prvih $k+1$ tekućina i posljednja menzura je ponovno prazna. Time je dokaz matematičkom indukcijom gotov. $\square$

Zadatak 6. (Sveruska matematička olimpijada 1986.) *Mlijeko je razliveno u 30 šalica. Dječak je dobio zadatak da ga prelije tako da u svim šalicama bude jednaka količina mlijeka. Da bi to učinio, uzima bilo koje dvije šalice i prelijeva mlijeko iz jedne u drugu dok se količine u njima ne izjednače. Potom uzima drugi par šalica i po potrebi ponavlja postupak. Možemo li mlijeko na početku uliti u šalice na takav način da dječak nikad ne završi ispravno svoj posao, ma koliko dugo prelijevao?*

Rješenje. U jednu šalicu ulijemo 200 ml mlijeka, a u preostalih 29 šalica po 100 ml mlijeka. Tada će ukupna količina mlijeka u šalicama biti jednaka $29\cdot 100+1\cdot 200=3100$ ml.

Pretpostavimo da je nakon n prelijevanja dječak uspješno dovršio svoj posao, tj. da se u svakoj od 30 šalica nalazi jednaka količina mlijeka, odnosno po $\frac{3100}{30}=\frac{310}{3}$ ml mlijeka. Neka je pritom k broj prelijevanja one šalice koja je, od svih 30 šalica, najviše puta sudjelova u prelijevanju bilo da se u tu šalicu ulijevalo ili iz nje izlijevalo mlijeko. S obzirom da inicijalno u svim šalicama nemamo istu količinu mlijeka, to je $k \geq 1$. S druge strane, očito je $k \leq n$. Nakon n prelijevanja, u toj šalici imamo $\frac{m}{2^k}$ ml mlijeka, gdje je m prirodan broj. Naime, nakon jednog prelijevanja iz šalice koja sadrži a ml mlijeka u šalicu s b ml mlijeka svaka od njih sadrži $\frac{a+b}{2}$ ml mlijeka. Ako dalje, jedna od te dvije šalice sudjeluje u prelijevanju sa šalicom koja sadrži c ml mlijeka, ta šalica će nakon tog prelijevanja sadržavati $\frac{\frac{a+b}{2}+c}{2}=\frac{a+b+2c}{2^2}$ ml mlijeka, itd.... Stoga, šalica koja sudjeluje u k prelijevanja njezina će količina u nazivniku imati broj 2^k, a u brojniku će biti prirodan broj jer su sve šalice na početku imale količine u ml koji su prirodni brojevi.

Nakon n prelijevanja u svih 30 šalica imamo istu količinu mlijeka kao u onoj šalici koja je najviše puta, tj. k puta, sudjelovala u prelijevanjima. Dakle, u svih 30 šalica imamo jednaku količinu od $\frac{m}{2^k}$ ml mlijeka koja onda odgovara količini od $\frac{310}{3}$ ml mlijeka. Sada je $\frac{m}{2^k}=\frac{310}{3}$, odakle slijedi $m=2^k\cdot\frac{310}{3}$. Dobili smo kontradikciju s činjenicom da je m prirodan broj, te $2^k\cdot\frac{310}{3}$ nije prirodan broj, za niti jedan prirodan broj k.

Na osnovu razmotrenog, za navedenu raspodjelu mlijeka po šalicama, zaključujemo da u konačnom broju koraka (prelijevanja) dječak neće moći uspješno obaviti svoj posao. □

Zadatak 7. (Sveruska matematička olimpijada 1993.) *Imamo sedam čaša s vodom: prva čaša do pola je napunjena vodom, druga je napunjena do jedne trećine, treća do jedne četvrtine, četvrta do jedne petine, peta do jedne osmine, šesta do jedne devetine i sedma do jedna desetine. Dopušteno je preliti svu vodu iz jedne čaše u drugu ili preliti vodu iz jedne čaše u drugu dok se ne napuni do vrha. Može li, poslije nekoliko prelijevanja, jedna čaša biti napunjena:*

a) do jedne dvanaestine,

b) do jedne šestine?

Rješenje. a) Uzmimo da je volumen svake čaše jedinični. Tada u prve tri čaše ukupno imamo $1\frac{1}{12}$ vode. Tako svu vodu iz druga čaše prelijemo u prvu, a zatim vodu iz treće čaše ulijevamo u prvu dok je ne napunimo. Poslije toga u trećoj čaši ostaje $\frac{1}{12}$ vode.

b) Odgovor je u ovom slučaju negativan. Da bismo to dokazali promotrimo skup $S=\left\{(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7)\ :\ \sum_{i=1}^{7} a_i \in \left\{\frac{1}{6},\frac{7}{6}\right\}\right\}$, pri čemu su $a_i \in \left\{0,\frac{1}{i+1}\right\}$, $i=1,2,3,4$, te $a_i \in \left\{0,\frac{1}{i+3}\right\}$, $i=5,6,7$. Dovoljno je pokazati da je skup S prazan. Najprije, dokazat ćemo da u sumi $\sum_{i=1}^{7} a_i$ nema pribrojnika među brojevima $\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{8},\frac{1}{9},\frac{1}{10}$.

Pretpostavimo da u danoj sumi sudjeluje neki od brojeva $\frac{1}{5}$ ili $\frac{1}{10}$. Tada je njezin nazivnik djeljiv s 5, pa istu možemo zapisati u obliku $\sum_{i=1}^{7} a_i = \frac{a}{5k}$, gdje su a i k prirodni brojevi takvi da je $m(a, 5k) = 1$.

U slučaju da u toj sumi sudjeluje broj $\frac{1}{5}$, te bilo koji od brojeva $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}$ tada je nazivnik te sume jednak $5V$ gdje je V najmanji zajednički višekratnik nazivnika svih razlomaka, osim $\frac{1}{5}$, koji su pribrojnici u toj sumi. Brojnik te sume ima sve pribrojnike inducirane razlomcima iz te sume, osim $\frac{1}{5}$, oblika $5\frac{V}{l}$ gdje je l nazivnik pripadnog razlomka, pa je specijalno i $\frac{V}{l}$ prirodan broj. Pribrojnik brojnika te sume induciran razlomkom $\frac{1}{5}$ jednak je V. Dakle, brojnik te sume je oblika $5m+V$ gdje je m prirodan broj. Jer 5 ne dijeli V, slijedi da 5 ne dijeli brojnik $5m+V$ promatrane sume, pa doista istu možemo zapisati u obliku $\frac{a}{5k}$ pri čemu su prirodni brojevi a i $5k$ relativno prosti. Na identičan način zaključujemo ako u toj sumi sudjeluje broj $\frac{1}{10}$ umjesto $\frac{1}{5}$, s time da tada najmanji zajednički višekratnik V određujemo između broja 2 i, kao u slučaju $\frac{1}{5}$, nazivnika svih razlomaka, osim $\frac{1}{10}$, koji su pribrojnici u toj sumi.

Dalje imamo $\frac{x}{6} = \frac{a}{5k}$, za $x \in \{1, 7\}$. Odavde dobivamo $5xk = 6a$, što povlači da 5 dijeli a. Posebno, to znači da je $m(a, 5k) \geq 5$, a to je u kontradikciji s činjenicom $m(a, 5k) = 1$.

Ovime smo pokazali da u sumi $\sum_{i=1}^{7} a_i$ nema pribrojnika među brojevima $\frac{1}{5}$ ili $\frac{1}{10}$.

Kada bi u promatranoj sumi sudjelovao neki od brojeva $\frac{1}{4}$ ili $\frac{1}{8}$, istu bismo mogli zapisati u obliku $\sum_{i=1}^{7} a_i = \frac{a}{4k}$, gdje su a i k prirodni brojevi takvi da je $m(a, 4k) = 1$. Odnosno, kada bi u promatranoj sumi sudjelovao broj $\frac{1}{9}$ istu bismo mogli zapisati u obliku $\sum_{i=1}^{7} a_i = \frac{a}{9k}$, gdje su a i k prirodni brojevi takvi da je $m(a, 9k) = 1$. U oba ova slučaja došli bismo do kontradikcije, na analogan način kao u slučaju kada bi u promatranoj sumi sudjelovao neki od brojeva $\frac{1}{5}$ ili $\frac{1}{10}$.

Na osnovu dosad dokazanog, jedini mogući pribrojnici u danoj sumi su $\frac{1}{2}$ ili $\frac{1}{3}$. No, $\frac{1}{2} > \frac{1}{6}$ i $\frac{1}{3} > \frac{1}{6}$, te $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} < \frac{7}{6}$, pa niti broj $\frac{1}{2}$ niti $\frac{1}{3}$ ne sudjeluje u promatranoj sumi.

Konačno, proizlazi da je skup S je prazan, što je i trebalo dokazati. $\square$

Na kraju dat ćemo jedan vrlo zanimljiv problem ruskog algebraičara A. I. Širšova (1921. – 1981.), a prvi puta ga je iznio u jednom svom znanstvenom radu. Potom je postavljen na Sveruskoj matematičkoj olimpijadi 1971., gdje ga nitko od učenika nije riješio iako ga sama natjecateljska komisija nije okarakterizirala kao teškog.

Zadatak 8. *U tri posude nalazi se po cijeli broj litara vode. U svaku posudu smijemo preliti, iz neke od preostale dvije, onoliko vode koliko ona u tome trenutku sadrži. Dokažite da se u konačnom broju prelijevanja može isprazniti jedna od posuda. Pri tome pretpostavljamo da su posude dovoljno velike, tj. da svaka od njih može primiti svu vodu kojom raspolažemo.*

Rješenje. Neka se u posudama A, B, C radom nalazi a, b i c litara vode, te neka je $0 < a \leq b \leq c$. Dokazat ćemo da nakon svakog prelijevanja posuda s najmanjom količinom vode ima sve manje i manje vode. Kako sve posude u svakom trenutku imaju cijeli broj litara vode, nakon konačno mnogo koraka (prelijevanja) pojavit će se prazna posuda.

Podijelimo sada b s a s ostakom, tj. možemo pisati $b = ad + r_1$, gdje je $0 \leq r_1 < a$. Dokažimo da možemo preliti vodu iz posuda B i C u posudu A, kroz nekoliko prelijevanja, tako da na koncu u posudi B ostane samo r_1 litara vode. Primijetimo da se pri ovakvim prelijevanjima količina vode u posudi A cijelo vrijeme udvostručuje: $2a, 2^2a, \ldots, 2^ka$, itd.

Nadalje, d se kao prirodan broj, na jedinstven način, može zapisati u obliku $d = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + 2^2\varepsilon_3 + \ldots + 2^{m-1}\varepsilon_m$, za neki prirodan broj m, pri čemu je svaki od brojeva ε_k jednak 0 ili 1, za sve $1 \leq k \leq m-1$ i $\varepsilon_m = 1$. Tako u k-tom prelijevanju prelijevamo vodu iz posude B u posudu A ako je $\varepsilon_k = 1$, a iz posude C u posudu A ako je $\varepsilon_k = 0$. Tada poslije posljedenjeg m-tog prelijevanja (to će sigurno biti prelijevanje iz posude B u posudu A) mi uzmemo iz posude B ukupno ad litara vode, tj. u posudi B ostaje r_1 litara vode.

Također treba provjeriti da u najgorem slučaju, tj. u slučaju u kojem ćemo izliti najmanje vode iz posude B, a to je slučaj u kojemu je $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = \varepsilon_{m-1} = 0$, u posudi C imamo dovoljno vode. No, to vrijedi jer je

$$a + 2a + 2^2a + \ldots + 2^{m-2}a = (2^{m-1} - 1)a < 2^{m-1}a \leq da \leq b \leq c.$$

Kako je $a > r_1$, sigurno smo dobili posudu s manjim brojem litara nego u početnom trenutku. Ponavljajući ovaj postupak dobivamo posude sa sve manje i manje litara vode: $a > r_1 > r_2 > \cdots$. Dakle, nakon konačno mnogo koraka pojavit će se prazna posuda.

□

Pogledat ćemo gore opisanu proceduru na jednom konkretnom primjeru:

10	56	113	$56 = 10 \cdot 5 + 6 \quad (r_1 = 6); \quad 5 = 1 + 2 \cdot 0 + 2^2 \cdot 1$
20	46	113	
40	46	93	
80	6	93	
6	80	93	$80 = 6 \cdot 13 + 2 \quad (r_2 = 2); \quad 13 = 1 + 2 \cdot 0 + 2^2 \cdot 1 + 2^3 \cdot 1$
12	74	93	
24	74	81	
48	50	81	

$\boxed{96}\quad\boxed{2}\quad\boxed{81}$

$\boxed{2}\quad\boxed{81}\quad\boxed{96}\qquad 81 = 2 \cdot 40 + 1 \ \ (r_3 = 1);$

$40 = 0 + 2 \cdot 0 + 2^2 \cdot 0 + 2^3 \cdot 1 + 2^4 \cdot 0 + 2^5 \cdot 1$

$\boxed{4}\quad\boxed{81}\quad\boxed{94}$

$\boxed{8}\quad\boxed{81}\quad\boxed{90}$

$\boxed{16}\quad\boxed{81}\quad\boxed{82}$

$\boxed{32}\quad\boxed{65}\quad\boxed{82}$

$\boxed{64}\quad\boxed{65}\quad\boxed{50}$

$\boxed{128}\quad\boxed{1}\quad\boxed{50}$

$\boxed{1}\quad\boxed{50}\quad\boxed{128}\qquad 50 = 1 \cdot 50 + 1 \ \ (r_4 = 0);$

$50 = 0 + 2 \cdot 1 + 2^2 \cdot 0 + 2^3 \cdot 0 + 2^4 \cdot 1 + 2^5 \cdot 1$

$\boxed{2}\quad\boxed{50}\quad\boxed{127}$

$\boxed{4}\quad\boxed{48}\quad\boxed{127}$

$\boxed{8}\quad\boxed{48}\quad\boxed{123}$

$\boxed{16}\quad\boxed{48}\quad\boxed{115}$

$\boxed{32}\quad\boxed{32}\quad\boxed{115}$

$\boxed{64}\quad\boxed{0}\quad\boxed{115}$

Literatura

[1] N. Elezović, *Odabrani zadaci elementarne matematike*, Zagreb, 1992.

[2] M. Bombardelli, I. Brnetić, Ž. Hanjš, *Matematička natjecanja 1999./2000.*, Zagreb, 2001.

[3] V. V. Prasolov i dr., *Moskovske matematičke olimpijade 1958 – 1967*, Moskva, 2013.

[4] Časopis *Kvant*, 1972., br. 11.

[5] N. B. Vasiljev, A. A. Egorov, *Sveruske matematičke olimpijade*, Moskva, 1988.

[6] N. H. Agahanov i dr., *Sveruske olimpijade učenika od 1993. do 2009.*, Moskva, 2014.