Tri dvojne nejednakosti za pravokutni trokut

Dragoljub Milošević[1]

Vi, naši mladi čitatelji, znate dosta činjenica u vezi s pravokutnim trokutom. Ovdje ćemo prikazati njegove tri dvojne nejednakosti.

Teorem 1. Ako je h duljina visine koja odgovara duljini c hipotenuze pravokutnog trokuta ABC, vrijedi nejednakost

$$1 < \frac{c+h}{a+b} \leq \frac{3\sqrt{2}}{4}. \tag{1}$$

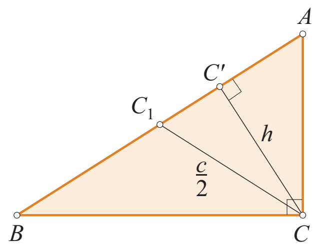
Dokaz. Iz poznate nejednakosti $a+b > c$ za duljine stranica trokuta slijedi $(a+b-c)^2 > 0$, tj.

$$a^2 + b^2 + c^2 - 2c(a+b) + 2ab > 0,$$

a odavde je, radi $a^2 + b^2 = c^2$ (Pitagorin poučak) i $ab = ch$,

$$2c^2 - 2c(a+b) + 2ch > 0.$$

Dijeljenjem lijeve i desne strane prethodne nejednakosti s $2c > 0$ dobivamo $c-(a+b)+h > 0$, što je ekvivalentno s lijevim dijelom postavljene nejednakosti.



Slika 1.

S obzirom da se središte opisane kružnice pravokutnog trokuta nalazi u polovištu C_1 hipotenuze, imamo $|AC_1| = |C_1B| = |CC_1| = \frac{c}{2}$. Imajući u vidu da je hipotenuza najdulja stranica pravokutnog trokuta, iz trokuta CC_1C' imamo $\frac{c}{2} \geq h$, tj. $c \geq 2h$. Jednakost vrijedi ako i samo ako se točke C_1 i C' poklapaju, to jest ako i samo ako je $a = b$.

Nejednakost $c \geq 2h$ je ekvivalentna sa sljedećim nizom nejednakosti: $c+h \geq 3h$, $(c+h)^2 \geq 9h^2$, $c^2 + 2ch \geq 8h^2$, $a^2+b^2+2ab \geq 8h^2$, $(a+b)^2 \geq 8h^2$ to jest

$$h^2 \leq \frac{1}{8}(a+b)^2. \tag{2}$$

Kako je $ch = ab$ imamo

$$c^2 + 2ch = a^2 + b^2 + 2ab = (a+b)^2. \tag{3}$$

Zbrajanjem relacija (2) i (3) dobijemo

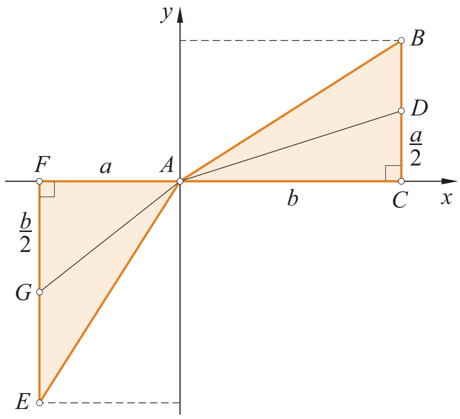
$$\begin{aligned} h^2 + c^2 + 2ch &\leq \frac{1}{8}(a+b)^2 + (a+b)^2 \\ \iff (c+h)^2 &\leq \frac{9}{8}(a+b)^2 \\ \iff \left(\frac{c+h}{a+b}\right)^2 &\leq \frac{9}{8} \end{aligned}$$

odakle slijedi desni dio nejednakosti (1).

[1] Profesor je u mirovni u srednjoj školi u Gornjem Milanovcu.

Teorem 2. Ako su t_a i t_b duljine težišnica koje odgovaraju katetama a i b pravokutnog trokuta ABC, tada je
$$\frac{\sqrt{5}}{2} \leq \frac{t_a + t_b}{a+b} < \frac{3}{2}. \tag{4}$$

Dokaz. Primijenit ćemo metodu koordinata i koristiti Kartezijev koordinatni sustav s ishodištem u vrhu A i apscisom AC.



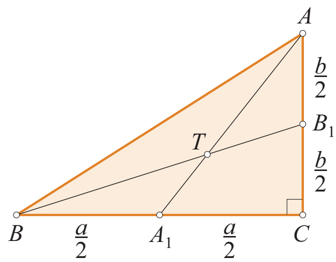
Slika 2.

Tada su vrhovi trokuta $A(0,0)$, $B(b,a)$ i $C(b,0)$, a $D\left(b, \frac{a}{2}\right)$ polovište stranice $\overline{BC}$. Odredimo točke $E(-a,-b)$ i $F(-a,0)$. Pravokutni trokuti EAF i ABC su sukladni. Nadalje, $G\left(-a,-\frac{b}{2}\right)$ je polovište dužine $\overline{EF}$, pa je $t_a = |AD|$ i $t_b = |AG|$. Koristit ćemo osnovnu nejednakost trokuta. Za trokut ACD je $|AD| < |AC| + |CD| = b + \frac{a}{2}$, a za trokut AFG je $|AG| < |AF| + |FG| = a + \frac{b}{2}$. Radi toga je
$$t_a + t_b = |AD| + |AG| < \left(b + \frac{a}{2}\right) + \left(a + \frac{b}{2}\right) = \frac{3}{2}(a+b),$$
što je ekvivalentno s desnim dijelom nejednakosti (4).

Analogno, osnovna nejednakost trokuta primijenjena na trokut ADG je,
$$|AD| + |AG| \geq |DG| = \sqrt{(a+b)^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2},$$
a odavde je
$$t_a + t_b \geq \frac{\sqrt{5}}{2}(a+b), \quad \text{tj.} \quad \frac{t_a+t_b}{a+b} \geq \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Teorem 3. Za težišnice t_a i t_b pravokutnog trokuta ABC vrijedi
$$\frac{1}{2} < \frac{t_a}{t_b} < 2. \tag{5}$$

Dokaz. Primjenom Pitagorinog poučka na pravokutne trokute CAA_1 i BCB_1, dobivamo
$$t_a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2 \quad \text{i} \quad t_b^2 = a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2. \tag{6}$$



Slika 3.

Dijeljenjem ovih jednakosti je
$$\frac{t_a^2}{t_b^2} = \frac{a^2 + 4b^2}{4a^2 + b^2}.$$
Kako je
$$\frac{1}{4} < \frac{1}{4}\left(1 + \frac{15b^2}{4a^2 + b^2}\right) = \frac{a^2 + 4b^2}{4a^2 + b^2} = 4 - \frac{15a^2}{4a^2 + b^2} < 4,$$
tj.
$$\frac{1}{4} < \frac{t_a^2}{t_b^2} < 4,$$
dobivamo nejednakost (5).

Zadatci za vježbu

1. Dokaži da za stranice a, b, c trokuta ABC (c je hipotenuza) vrijedi:

a) $a + b \leq c\sqrt{2}$ b) $a^3 + b^3 < c^3$ c) $4(ac + b^2) \leq 5c^2$.

Kada pod c) vrijedi jednakost?.

2. Vrijede li u pravokutnom trokutu ABC nejednakosti:

a) $\frac{c}{h} + \frac{h}{c} \geq \frac{5}{2}$ b) $t_a t_b \geq \frac{5}{2}P$ (P je površina trokuta)?

3. Ako su R i r duljine radijusa opisane i upisane kružnice pravokutnog trokuta, dokaži:

a) $R + r \geq \sqrt{ab}$ b) $R \geq r(1 + \sqrt{2})$.

4. Dokaži da u pravokutnom trokutu ABC vrijedi nejednakost $t_a^2 + t_b^2 \geq 5r^2(3 + 2\sqrt{2})$.

Literatura

[1] O. Bottema and al., *Geometric Inequalities*, Wolters-Noordhoff, Groningen, 1969.

[2] D. S. Mitrinović, J. E. Pečarić and V. Volenec, *Recent Advances in Geometric Inequalities*, Kluwer, Dordrecht, 1989.