



## ZADATCI I RJEŠENJA

Redakcija, iz tehničkih razloga, daje ovo upozorenje:

Krajnji rok za primanje rješenja iz ovog broja je 30. rujna 2026. Rješenja (i imena rješavatelja) bit će objavljena u br. 2/306.

Ujedno molimo da pripazite na upute rješavateljima koje su na str. 294.

### A) Zadatci iz matematike

**4085.** Ako je

$$(3x-y)^2 + \sqrt{x+38+14\sqrt{x-11}} + |x-y+z| = 7$$

koliko je  $x + y + z$ ?

**4086.** Ako su  $a, b, c$  pozitivni brojevi takvi da je  $a + b + c = 1$ , dokaži nejednakost

$$7(ab + bc + ca) \leq 2 + 9abc.$$

**4087.** Neka je  $P(x) = ax^2 + bx + c$  kvadratni trinom s nenegativnim koeficijentima. Dokaži da za svaki pozitivan  $x$  vrijedi

$$P(x)P\left(\frac{1}{x}\right) \geq (P(1))^2.$$

**4088.** Odredi kompleksne brojeve  $w$  i  $z$  iz uvjeta:

$$\frac{w+z}{1+wz} + \frac{1}{z} = 0, \quad \frac{w-z}{1-wz} + \frac{1}{w} = 0.$$

**4089.** Ako su  $a, b, x, y$  pozitivni realni brojevi dokaži nejednakost

$$\frac{a^3}{x} + \frac{b^3}{y} \geq \frac{(a+b)^3}{2(x+y)}.$$

**4090.** U četverokutu  $ABCD$  je  $|AB| = 4$  cm,  $|BC| = 7.5$  cm,  $|AD| = 6$  cm,  $|BD| = 5$  cm i  $\sphericalangle BAD = \sphericalangle DBC = \alpha$ . Kolika je duljina dužine  $\overline{CD}$ ?

**4091.** Na pravcu su dane točke  $A, B, C, D$ , tim redom. Nad  $\overline{AB}$  i  $\overline{CD}$  kao promjerima su konstruirane kružnice i njihova zajednička tangenta  $EF$ , gdje su  $E$  i  $F$  točke na tim kružnicama i  $EF \cap AD = G$ . Pokaži da je

- i)  $|AC||BG| = |BD||AG|$
- ii)  $|EF|^2 = |AC||BD|$ .

**4092.** Neka su  $s_\alpha$  i  $s_\beta$  duljine simetrala šiljastih kutova pravokutnog trokuta  $ABC$  i  $P$  njegova površina. Dokaži da vrijedi nejednakost

$$\frac{1}{s_\alpha^2} + \frac{1}{s_\beta^2} \geq \frac{1}{4P}(2 + \sqrt{2}).$$

**4093.** Duljina osnovice jednakokračnog trokuta je  $2a$ , a visina na nju je  $h$ . Tangenta na upisanu kružnicu paralelna je s osnovicom trokuta. Odredi duljinu dijela tangente unutar trokuta.

**4094.** Na kružnici opisanoj oko kvadrata  $ABCD$  proizvoljno je odabrana točka  $M$  na manjem kružnom luku  $BC$ . Presjeci pravaca  $AM$  i  $BD$ , odnosno  $AC$  i  $DM$ , su  $P$  i  $Q$ . Ako je duljina stranice kvadrata jednaka  $a$ , kolika je površina četverokuta  $APQD$ ?

**4095.** Točka  $F$  nalazi se na produžetku stranice  $\overline{AD}$  paralelograma  $ABCD$  ( $D$  je između  $A$  i  $F$ ). Dužina  $\overline{BF}$  siječe dijagonalu  $\overline{AC}$  u točki  $E$  i stranicu  $\overline{CD}$  u  $G$ . Dokaži da vrijedi nejednakost

$$\frac{1}{|BE|} = \frac{1}{|BG|} + \frac{1}{|BF|}.$$

**4096.** Unutar kvadrata  $ABCD$  dana je točka  $P$  takva da je  $|AP| = 4$  cm,  $|BP| = 1$  cm i  $|DP| = 5$  cm. Kolika je površina kvadrata?

**4097.** U trapezu  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ) simetrale unutarnjih kutova kod vrhova  $A$  i  $D$  sijeku se na kraku  $\overline{BC}$ . Dokaži  $|AD| = |AB| + |CD|$ .

**4098.** Park je oblika četverokuta  $ABCD$  kojemu su kutovi u vrhovima  $A$  i  $D$  pravi. Duljine paralelnih stranica su  $a$  i  $b$ . Ako postoji drvo koje je na jednakoj udaljenosti od sve četiri njegove stranice, kolika je površina parka?

### B) Zadatci iz fizike

**OŠ – 566.** Mihael je u lonac mase 800 g stavio tri litre vode početne temperature  $18^\circ\text{C}$ . Temperatura lonca bila je  $22^\circ\text{C}$ . Voda je na ploči zakuhala za 10 min. Nakon toga je u vodu dodao 400 g tjestenine iste početne temperature kao lonac i izmjerio da je prošla jedna minuta dok voda nije opet zakuhala. Zna da je specifični toplinski kapacitet vode  $4200 \text{ J/kgK}$ , a lonca  $600 \text{ J/kgK}$ . Iz svojih je mjerenja izračunao specifični toplinski kapacitet tjestenine. Koji je rezultat dobio?

**OŠ – 567.** Brod plovi rijekom između dvije luke. Njegova je brzina 5 puta veća od brzine rijeke. Iz luke A je krenuo u 8:30 i u luku B stigao u 11 sati. Tamo se zadržao 2 sata i krenuo natrag. U koliko se sati vratio u luku A? Luka B je nizvodno od luke A.

**OŠ – 568.** Konvergentna leća jakosti 4 dioptrije daje sliku predmeta visoku 18 cm. Slika je od leće udaljena 50 cm. Koliko je predmet udaljen od leće i koliko je visok?

**OŠ – 569.** Tijelo se nalazi na kosini nagiba  $30^\circ$  i može kliziti po njoj. Tijelo je spojeno na oprugu. U početnom trenutku opruga nije deformirana. Početna brzina tijela iznosi 2 m/s i ono titra na kosini. Ukupan put koji tijelo prijeđe dok se ne zaustavi iznosi 0.8 m. Opruga je tada ponovo u početnom položaju. Koliko iznosi koeficijent trenja na kosini? Kinetička energija tijela jednaka je polovici umnoška mase tijela i kvadrata njegove brzine.

**1896.** Banane su poznate po visokom udjelu kalija i blagoj radioaktivnosti zbog izotopa  $^{40}\text{K}$  koji ima prirodnu zastupljenost od 0.012 % i vrijeme poluraspada 1.251 milijardi godina. Banana, čim je ubrana, više ne može biološkim putem održavati prirodnu zastupljenost radioaktivnog izotopa  $^{40}\text{K}$ , već ona s vremenom opada. Iako se  $^{40}\text{K}$  samo u 89 % slučajeva  $\beta$ -raspada u  $^{40}\text{Ca}$  (a u 11 % slučajeva uhvatom elektrona u  $^{40}\text{Ar}$ ), pretpostavite radi jednostavnosti da se *uvijek* (u 100 % slučajeva) raspada u izotop kalcija. Maseni omjer ukupnog kalcija i kalija u tek ubranoj banani iznosi  $m_{\text{Ca}}/m_{\text{K}} = 1.4\%$ . Radi jednostavnosti također pretpostavite da svi izotopi kalija i kalcija imaju jednaku molarnu masu. Nakon koliko će vremena navedeni omjer iznositi 1.41 %? Kolika je krajnja vrijednost tog omjera, nakon što se raspadne sav  $^{40}\text{K}$ ?

**1897.** Pretpostavi da se Zemlja giba po savršeno kružnoj putanji oko Sunca. Neka je  $r$  polumjer te putanje,  $T$  period ophoda oko Sunca, a  $v$  brzina njezina kruženja. Ako Sunce zamijenimo crnom rupom:

A) iste mase kao Sunce;

B) istog polumjera kao Sunce;

kolika mora biti relativna promjena:

a)  $T$  i  $v$  Zemlje da bi  $r$  ostao isti;

b)  $r$  i  $v$  Zemlje da bi  $T$  ostao isti;

c)  $r$  i  $T$  Zemlje da bi  $v$  ostao isti?

Masa Sunca je  $2 \cdot 10^{30}$  kg, a polumjer  $7 \cdot 10^8$  m.

*Pomoć:* Istraži pojam Schwarzschildova polumjera (vidi rješenje zadatka 1883).

**1898.** U sustavu jednog promatrača foton vidljive svjetlosti ima energiju 2 eV. Drugi promatrač giba se spram prvoga brzinom od 60 % brzine svjetlosti. Kolika je energija fotona u sustavu tog promatrača ako se on giba:

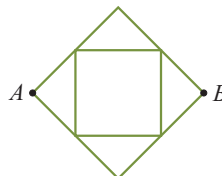
a) u istom smjeru kao i foton;

b) u suprotnom smjeru od fotona?

Je li za drugog promatrača foton i dalje unutar spektra vidljive svjetlosti?

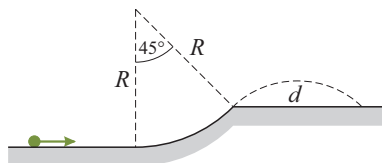
*Uputa:* Koristi Lorentzove transformacije.

**1899.** Na slici je prikazan strujni krug sastavljen od otpornih žica. Sve žice imaju ista otporna svojstva (otpornost i površinu poprečnog presjeka). Krug se sastoji od manjeg kvadrata unutar većeg kvadrata, međusobno zakrenutih za  $45^\circ$ . Otpor stranice manjeg kvadrata je  $1 \Omega$ . Koliki je otpor kruga između točaka A i B?



*Uputa:* Nemoj odmah napasti problem računom. Neke od žica mogu se ukloniti iz priče pravilnim argumentom.

**1900.** Malena kuglica giba se po horizontalnoj podlozi početnom brzinom 10 m/s. Zatim nailazi na cilindrično uzvišenje polumjera zakrivljenosti 2 cm, koje zatvara kut od  $45^\circ$ , kao na slici. Nakon odvajanja od podloge kuglica preleti udaljenost  $d$  prije nego udari o tlo (na visini s koje je odletjela). Kolika je udaljenost  $d$ ? Koristi  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .



(Zadatak osmislio Duje Dodig.)

**1901.** Između izvora svjetlosti i sfernog konavnog zrcala polumjera zakrivljenosti 1 m postavljena je planparalelna staklena ploča indeksa loma 1.5, okomito na optičku os sustava. Ako je izvor na udaljenosti 1.1 m od tjemena zrcala, kolika mora biti debljina ploče da bi se izvor poklopio sa svojom slikom? Ovisi li rješenje o položaju ploče? Promatraj samo zrake svjetlosti vrlo bliske optičkoj osi.

(Zadatak osmislio Duje Dodig.)

**1902.** Uz pretpostavku da se temperatura tijela vrlo brzo izjednačuje duž čitavoga njegova volumena, može se pokazati da vrijeme  $\Delta t$  potrebno da se tijelo ohladi toplinskim zračenjem s neke početne temperature  $T_1$  na konačnu  $T_2$  ovisi kao

$$\Delta t = \frac{V}{A} f(T_1, T_2),$$

gdje je  $V$  volumen tijela,  $A$  njegovo oplošje, a  $f(T_1, T_2)$  neka funkcija koja ovisi o samo krajnjim temperaturama i svojstvima materijala. (Rastuća ovisnost o volumenu dolazi zbog povećanja količine materijala koji se mora ohladiti, a padajuća ovisnost o oplošju zbog povećanja površine kroz koju se toplina može probijati.) Ako se kugla neke mase toplinskim zračenjem ohladi s neke  $T_1$  na neku  $T_2$  za 1 minutu, za koliko se vremena između istih temperatura ohladi kugla od istoga materijala, 30 puta veće mase?

### C) Rješenja iz matematike

**4057.** Dokaži da realne brojeve  $a \neq b$  vrijedi nejednakost

$$(a^2 + b^2)^3 < 2(a^3 + b^3)^2.$$

**Rješenje.** Sređivanjem dobivamo

$$a^6 + 3a^4b^2 + 3a^2b^4 + b^6 \leq 2a^6 + 4a^3b^3 + 2b^6$$

tj. dobivamo ekvivalentnu nejednakost

$$3a^2b^2(a^2 + b^2) \leq a^6 + 4a^3b^3 + b^6.$$

Sada imamo

$$3a^2b^2(a^2 - 2ab + b^2) \leq a^6 - 2a^3b^3 + b^6$$

$$3a^2b^2(a - b)^2 \leq (a^3 - b^3)^2 \\ = (a - b)^2(a^2 + ab + b^2)^2.$$

Za  $a \neq b$  dijeljenjem s  $(a - b)^2$  dobivamo ekvivalentnu nejednakost

$$3a^2b^2 \leq (a^2 + ab + b^2)^2.$$

No,

$$(a^2 + ab + b^2)^2 \geq (2ab + ab)^2 = 9a^2b^2 \geq 3a^2b^2,$$

pa i polazna nejednakost vrijedi.

Ur.

**4058.** Nađi sva realna rješenja  $(x, y)$  jednadžbe

$$y^4 + 4y^2x - 11y^2 + 4xy - 8y + 8x^2 - 40x + 52 = 0.$$

**Rješenje.** Zapišimo danu jednadžbu kao kvadratnu jednadžbu po varijabli  $x$ :

$$8x^2 + 4(y^2 + y - 10)x \\ + y^4 - 11y^2 - 8y + 52 = 0.$$

Izračunajmo diskriminantu ove jednadžbe:

$$D = 16(y^2 + y - 10)^2 - 32(y^4 - 11y^2 - 8y + 52) \\ = -16(y^2 - y - 2)^2 \leq 0.$$

Da bi rješenja bila realna, diskriminanta mora biti nenegativna. Dakle, jedino moguće je:

$$y^2 - y - 2 = 0 \implies y_1 = 2 \quad \text{i} \quad y_2 = -1.$$

Kad je diskriminanta jednaka 0, rješenje kvadratne jednadžbe je jedinstveno i iznosi  $x = -\frac{b}{2a}$ . Tako imamo

$$x = -\frac{y^2 + y - 10}{4} \implies x_1 = 1 \quad \text{i} \quad x_2 = \frac{5}{2}.$$

Znači, zadana jednadžba ima dva realna rješenja:

$$(x, y) \in \left\{ (1, 2), \left( \frac{5}{2}, -1 \right) \right\}.$$

Ivan Jukić (1),

Gimnazija Vukovar, Vukovar

**4059.** Dan je polinome

$$P(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1.$$

Nađi polinome  $Q(x)$  i  $R(x)$  koji imaju pozitivne stupnjeve i cjelobrojne koeficijente, tako da vrijedi  $Q(x)R(x) = P(5x^2)$  za svaki  $x$ .

**Rješenje.** Potražimo faktorizaciju s  $R(x) = Q(-x)$  jer  $P(5x^2)$  mora biti parna funkcija. Ne-ka je

$$R(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e.$$

Tada je

$$\begin{aligned} P(5x^2) &= 625x^8 + 125x^6 + 25x^4 + 5x^2 + 1 \\ &= (ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e) \\ &\quad \cdot (ax^4 - bx^3 + cx^2 - dx + e) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a^2 = 625 \quad \text{tj.} \quad a = 25$$

$$e^2 = 1 \quad \text{tj.} \quad e = 1$$

$$2ac - b^2 = 125$$

$$2ac - 2bd + c^2 = 25$$

$$2ce - d^2 = 5$$

$$(1) \quad 50c - b^2 = 125$$

$$(2) \quad 50 - 2bd + c^2 = 25$$

$$\text{tj.} \quad 2bd - c^2 = 25$$

$$(3) \quad 2c - d^2 = 5$$

$$(1) \text{ i } (3) \Rightarrow b = 5d$$

$$(2) \Rightarrow 10d^2 - c^2 = 25$$

$$(3) \Rightarrow d^2 = 2c - 5$$

$$\Rightarrow 10(2c - 5) - c^2 = 25$$

$$c^2 - 20c + 75 = 0$$

$$c_{1,2} = 10 \pm 5$$

$$c_1 = 15, \quad c_2 = 5.$$

Uzmimo  $c = 15$ . Tada je  $d^2 = 2c - 5$ ,  $d = 5$  i  $b = 5d = 25$ .

Dakle, jedna mogućnost je

$$R(x) = 25x^4 + 25x^3 + 15x^2 + 5x + 1$$

$$Q(x) = 25x^4 - 25x^3 + 15x^2 - 5x + 1.$$

Ur.

**4060.** Nađi imaginarni dio kompleksnog broja  $z^2$ , ako vrijedi  $\arg[z^3(-1+i)] = \pi$  i  $\operatorname{Re}(z^2) = -2\sqrt{3}$ .

**Rješenje.**

$$\arg[z^3(-1+i)] = \pi$$

$$\arg z^3 + \arg(-1+i) = \pi$$

$$3\varphi + \frac{3\pi}{4} = \pi + 2k\pi$$

$$3\varphi = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad / : 3$$

$$\varphi = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \varphi = \arg z \in \left\{ \frac{\pi}{12}, \frac{3\pi}{4}, \frac{17\pi}{12} \right\}$$

jer je  $0 \leq \varphi < 2\pi$

$$\Rightarrow \arg z^2 = 2\varphi \in \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{6} \right\}.$$

Iz drugog uvjeta  $\operatorname{Re}(z^2) = -2\sqrt{3}$  vidimo da je  $z^2$  smješten u 2. ili 3. kvadrantu, tj.  $\arg z^2 = \frac{5\pi}{6}$ .

$$\operatorname{tg} \frac{5\pi}{6} = \frac{\operatorname{Im}(z^2)}{\operatorname{Re}(z^2)} \Rightarrow$$

$$\operatorname{Im}(z^2) = -2\sqrt{3} \cdot \left( -\frac{\sqrt{3}}{3} \right) = 2.$$

Ivan Jukić (1), Vukovar

**4061.** Dokaži da vrijedi jednakost determinanti

$$\det \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$$

**Prvo rješenje.** Razvit ćemo svaku determinantu po prvom retku.

$$A = \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= \begin{vmatrix} b & ca \\ c & ab \end{vmatrix} - a \begin{vmatrix} 1 & ca \\ 1 & ab \end{vmatrix} + bc \begin{vmatrix} 1 & b \\ 1 & c \end{vmatrix} \\ &= ab^2 - ac^2 - a^2b + a^2c + bc^2 - b^2c \end{aligned}$$

$$B = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= \begin{vmatrix} b & b^2 \\ c & c^2 \end{vmatrix} - a \begin{vmatrix} 1 & b^2 \\ 1 & c^2 \end{vmatrix} + a^2 \begin{vmatrix} 1 & b \\ 1 & c \end{vmatrix} \\ &= bc^2 - b^2c - ac^2 + ab^2 + a^2c - a^2b. \end{aligned}$$

Odavde dobijemo  $A = B$ .

Ivan Jukić (1), Vukovar

**Drugo rješenje.** Tvrdnja vrijedi dodavanjem trećem stupcu lijeve determinante drugi pomnožen s  $(a + b + c)$  i oduzimanjem prvog stupca pomnoženog s  $(ab + bc + ca)$ .

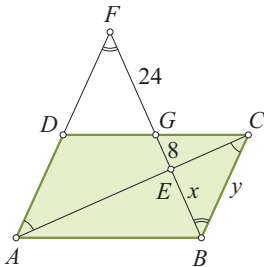
$$\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} 1 & a & bc + a(a + b + c) - (ab + bc + ca) \\ 1 & b & ca + b(a + b + c) - (ab + bc + ca) \\ 1 & c & ab + c(a + b + c) - (ab + bc + ca) \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$$

Ur.

**4062.** Stranica  $\overline{AD}$  paralelograma  $ABCD$  produljena je do točke  $F$ . Pravac  $BF$  siječe dijagonalu  $\overline{AC}$  u  $E$  i stranicu  $\overline{DC}$  u  $G$ . Ako je  $|EF| = 32$  i  $|FG| = 24$ , koliko je  $|BE|$ ?

**Rješenje.** Kako je  $AF \parallel BC$  i jednakosti kutova na slici, po KK poučku o sličnosti je:

$$\triangle AFE \sim \triangle CBE, \quad \frac{|AF|}{|CB|} = \frac{|FE|}{|BE|} \\ \frac{|AF|}{y} = \frac{32}{x} \implies |AF| = \frac{32y}{x} \\ \implies |FD| = \frac{32y}{x} - y.$$



Isto tako je očito:

$$\triangle FDG \sim \triangle FAB, \quad \frac{|FD|}{|AF|} = \frac{|FG|}{|FB|} \\ \implies \frac{\frac{32y - xy}{x}}{\frac{32y}{x}} = \frac{24}{x + 32} \\ \implies (32 - x)(32 + x) = 32 \cdot 24$$

$$32^2 - x^2 = 768$$

$$x^2 = 256 / \sqrt{\quad}$$

$$x = 16.$$

Znači,  $x = |BE| = 16$ .

Ivan Jukić (1), Vukovar

**4063.** Radijus trokutu upisane kružnice jednak je 1, a duljine njegovih stranica su cijeli brojevi. Dokaži da su stranice trokuta jednake 3, 4, 5.

**Rješenje.** Neka je  $p$  poluopseg trokuta,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  duljine njegovih stranica. Po Heronovoj formuli je

$$p^2 = p(p - a)(p - b)(p - c).$$

Uvedimo oznake  $x = p - a$ ,  $y = p - b$ ,  $z = p - c$ . Tada je

$$x + y + z = xyz.$$

Pretpostavimo da je  $p$  cijeli broj ili je  $p = \frac{1}{2}$  cijeli broj. Prema tome su  $x$ ,  $y$ ,  $z$  istovremeno ili cijeli brojevi ili su oblika  $\frac{k}{2}$ , gdje je  $k$  neparan broj. Ako je  $p$  oblika  $\frac{k}{2}$ , gdje je  $k$  neparan broj, tada je  $xyz$  oblika  $\frac{m}{8}$ , gdje je  $m$  neparan broj. Kako to nije moguće,  $x$ ,  $y$ ,  $z$  su cijeli brojevi. Možemo pretpostaviti  $x \leq y \leq z$ . Tada je  $xyz = x + y + z \leq 3z$ , tj.  $xy \leq 3$ . Moguća su tri slučaja.

1)  $x = 1$ ,  $y = 1 \implies 2 + z = z$ , što nije moguće.

2)  $x = 1$ ,  $y = 2 \implies 3 + z = 2z$ , tj.  $z = 3$ .

3)  $x = 1$ ,  $y = 3 \implies 4 + z = 3z$ , tj.  $z = 2 < y$ , što je suprotno pretpostavci.

Dakle,  $x = 1$ ,  $y = 2$ ,  $z = 3$  i  $p = x + y + z = 6$ ,  $a = p - x = 5$ ,  $b = 4$ ,  $c = 3$ .

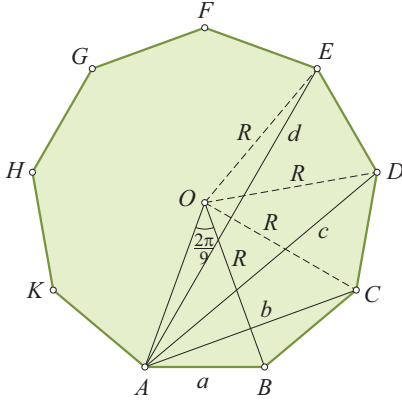
Ur.

**4064.** Ako je  $ABCDEFGHK$  pravilni deveterokut,  $|AB| = a$ ,  $|AC| = b$ ,  $|AD| = c$  i  $|AE| = d$ , dokaži da je  $\frac{c}{b} - \frac{a}{d} = 1$ .

**Rješenje.** Primjenjujemo poučak o sinusima redom na trokute  $ABC$ ,  $ACO$ ,  $ADO$  i  $AEO$  pa imamo:

$$a = R \cdot \frac{\sin \frac{2\pi}{9}}{\sin \frac{7\pi}{18}}, \quad b = R \cdot \frac{\sin \frac{4\pi}{9}}{\sin \frac{5\pi}{18}},$$

$$c = R \cdot \frac{\sin \frac{2\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{6}}, \quad d = R \cdot \frac{\sin \frac{8\pi}{9}}{\sin \frac{\pi}{18}}.$$



Sada je

$$\frac{c}{b} - \frac{a}{d}$$

$$= \frac{\sin \frac{2\pi}{3} \sin \frac{5\pi}{18}}{\sin \frac{\pi}{6} \sin \frac{4\pi}{9}} - \frac{\sin \frac{2\pi}{9} \sin \frac{\pi}{18}}{\sin \frac{7\pi}{18} \sin \frac{8\pi}{9}}$$

$$= \frac{\sqrt{3} \sin \frac{5\pi}{18}}{\sin \frac{4\pi}{9}} - \frac{\sin \frac{2\pi}{9} \cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{18} \right)}{\cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{7\pi}{18} \right) \cdot 2 \sin \frac{4\pi}{9} \cos \frac{4\pi}{9}}$$

$$= \frac{\sqrt{3} \cos \frac{2\pi}{9}}{2 \sin \frac{2\pi}{9} \cos \frac{2\pi}{9}} - \frac{2 \sin \frac{\pi}{9} \cos \frac{\pi}{9}}{\cos \frac{\pi}{9} \cdot 2 \sin \frac{4\pi}{9}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2 \sin \frac{2\pi}{9}} - \frac{\sin \frac{\pi}{9}}{2 \sin \frac{2\pi}{9} \cos \frac{2\pi}{9}}$$

$$= \frac{\sqrt{3} \cos \frac{2\pi}{9} - \sin \frac{\pi}{9}}{2 \sin \frac{2\pi}{9} \cos \frac{2\pi}{9}}$$

$$= \frac{\sqrt{3} \cos \frac{2\pi}{9} - \sin \left( \frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{9} \right)}{\sin \frac{4\pi}{9}}$$

$$= \frac{\sqrt{3} \cos \frac{2\pi}{9} - \left( \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{2\pi}{9} - \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{2\pi}{9} \right)}{\sin \frac{4\pi}{9}}$$

$$= \frac{\sqrt{3} \cos \frac{2\pi}{9} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \frac{2\pi}{9} + \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{9}}{\sin \frac{4\pi}{9}}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \frac{2\pi}{9} + \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{9}}{\sin \frac{4\pi}{9}}$$

$$= \frac{\sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{2\pi}{9} + \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{2\pi}{9}}{\sin \frac{4\pi}{9}}$$

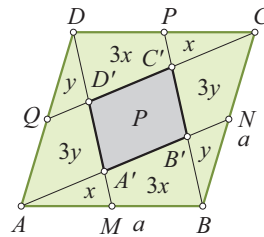
$$= \frac{\sin \left( \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{9} \right)}{\sin \frac{4\pi}{9}} = \frac{\sin \frac{5\pi}{9}}{\sin \frac{4\pi}{9}}$$

$$= \frac{\sin \left( \pi - \frac{5\pi}{9} \right)}{\sin \frac{4\pi}{9}} = \frac{\sin \frac{4\pi}{9}}{\sin \frac{4\pi}{9}} = 1.$$

Ivan Jukić (1), Vukovar

**4065.** U rombu  $ABCD$  su  $M, N, P, Q$  položišta stranica  $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$ , tim redom. Kolika je površina četverokuta određenog pravcima  $AN, BP, CQ, DM$  ako je površina romba jednaka  $100 \text{ cm}^2$ .

**Rješenje.** Pravci dijele romb  $ABCD$  na četiri trokuta i pet četverokuta kao na slici.



Iz  $\triangle AMA' \sim \triangle ABB'$

$$\frac{P_{\triangle ABB'}}{x} = \left( \frac{a}{a} \right)^2 \Rightarrow P_{\triangle ABB'} = 4x.$$

Isto tako je

$$P_{\triangle CDD'} = 4x \text{ te } P_{\triangle AA'D} = P_{\triangle BCC'} = 4y.$$

Zato površine možemo označiti kao na slici.

Uočimo da vrijedi:

$$3x + P + 3x = 50$$

$$\underline{3y + P + 3y = 50}$$

jer je

$$P_{\triangle ABN} = P_{\triangle DCQ} = \frac{1}{4} \cdot 100 = 25.$$

Oduzimanjem gornjih dviju jednažbi slijedi  $x = y$ . Sada iz

$$P_{\triangle ABN} = 25 \implies 4x + y = 25 \implies$$

$$5x = 25 \implies x = 5 \quad (\text{i } y = 5).$$

iz jedne od jednažbi sustava je:

$$6x + P = 50$$

$$30 + P = 50$$

$$P = 20 \text{ cm}^2.$$

Ivan Jukić (1), Vukovar

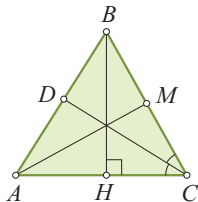
**4066.** Nadi vezu između stranica  $a, b, c$  trokuta  $ABC$  ako se težišnica  $\overline{AM}$ , visina  $\overline{BH}$  i simetrala  $CD$  kuta  $\sphericalangle ACB$  sijeku u jednoj točki.

**Rješenje.** Prema Cevinom teoremu je:

$$\frac{|AD|}{|BD|} \cdot \frac{|BM|}{|CM|} \cdot \frac{|CH|}{|AH|} = 1. \quad (*)$$

Kako je  $\overline{AM}$  težišnica vrijedi

$$|BM| = |CM| \quad \text{i} \quad \frac{|BM|}{|CM|} = 1.$$



Teorem koji kaže da simetrala unutarnjeg kuta trokuta dijeli nasuprotnu stranicu u omjeru preostalih dviju stranica daje nam

$$\frac{|AD|}{|BD|} = \frac{b}{a} \xrightarrow{(*)} \frac{b}{a} \cdot \frac{|CH|}{|AH|} = 1$$

$$\implies \frac{|CH|}{|AH|} = \frac{a}{b}.$$

Stavimo  $|CH| = ka$  i  $|AH| = kb$ ,  $0 < k < 1$ . Sada je

$$ak + bk = b \implies k = \frac{b}{a+b}.$$

S druge strane, primjenom Pitagorina poučka na  $\triangle ABH$  i  $\triangle BHC$  je:

$$|BH|^2 = c^2 - k^2 b^2 \quad \text{i} \quad |BH|^2 = a^2 - k^2 a^2$$

$$\implies c^2 - k^2 b^2 = a^2 - k^2 a^2$$

$$\implies k^2 = \frac{a^2 - c^2}{a^2 - b^2}.$$

U ovu jednakost stavimo  $k = \frac{b}{a+b}$  i slijedi:

$$\frac{b^2}{(a+b)^2} = \frac{a^2 - c^2}{a^2 - b^2} \implies \frac{b^2}{a+b} = \frac{a^2 - c^2}{a-b}.$$

Ivan Jukić (1), Vukovar

**4067.** Iz jednog vrha trokuta povučena je težišnica duljine  $t$ . Ona dijeli kut pri tom vrhu na dijelove  $\varepsilon$  i  $\varphi$ . Dokaži da je površina trokuta jednaka

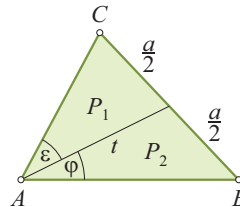
$$P = \frac{2t^2 \sin \varepsilon \sin \varphi}{\sin(\varepsilon + \varphi)}.$$

**Rješenje.**

$$P_1 = \frac{1}{2}bt \sin \varepsilon, \quad P_2 = \frac{1}{2}ct \sin \varphi$$

$$P = \frac{1}{2}bc \sin(\varepsilon + \varphi)$$

Vidimo da je  $P_1 = P_2 = \frac{1}{2}P$ .



$$P = 2P_1$$

$$bc \sin(\varepsilon + \varphi) = 2bt \sin \varepsilon$$

$$c = \frac{2t \sin \varepsilon}{\sin(\varepsilon + \varphi)}$$

$$P = 2P_2$$

$$bc \sin(\varepsilon + \varphi) = 2ct \sin \varphi$$

$$b = \frac{2t \sin \varphi}{\sin(\varepsilon + \varphi)}$$

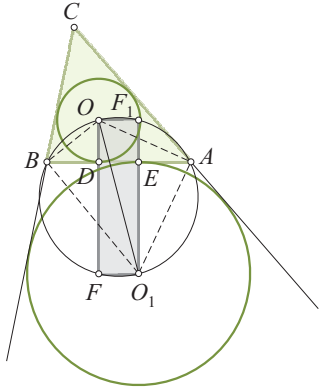
$$P = \frac{1}{2} \cdot \frac{2t \sin \varphi}{\sin(\varepsilon + \varphi)} \cdot \frac{2t \sin \varepsilon}{\sin(\varepsilon + \varphi)} \cdot \sin(\varepsilon + \varphi)$$

$$= \frac{2t^2 \sin \varepsilon \sin \varphi}{\sin(\varepsilon + \varphi)}.$$

Ivan Jukić (1), Vukovar

**4068.** Upisana i pripisana kružnica trokuta  $ABC$  dodiruju stranicu  $\overline{AB}$  u točkama  $D$  i  $E$ . Pokaži da je  $|AD||DB| = |AE||EB|$  i da je to površina pravokutnika čije su duljine stranice jednake duljinama polumjera tih kružnica.

**Rješenje.** Neka su  $O, O_1$  središta upisane i pripisane kružnice koje dodiruju stranicu  $\overline{AB}$  trokuta  $ABC$ . Povucimo dužine  $\overline{AO}, \overline{BO}, \overline{AO_1}, \overline{O_1B}$  i kontruirajmo kružnicu kroz točke  $A, O, B, O_1$ . Produžimo  $\overline{OD}$  do sjecišta  $F$  s tom kružnicom i povucimo dužinu  $\overline{FO_1}$ .



**Dokaz.**  $AO$  i  $AO_1$  su simetrale kutova uz  $\sphericalangle A$ , a  $BO$  i  $BO_1$  su simetrale kutova uz  $\sphericalangle B$ . Tada je  $\sphericalangle OAO_1 = \sphericalangle OBO_1 = 90^\circ$ . Dakle, četverokut  $AOBO_1$  je tetivni i  $\overline{OO_1}$  je dijelitelj pravokutne kružnice.  $\sphericalangle OFO_1 = 90^\circ$  i četverokut  $EDFO_1$  je pravokutnik:  $|EO_1| = |DF|$ . Sada je

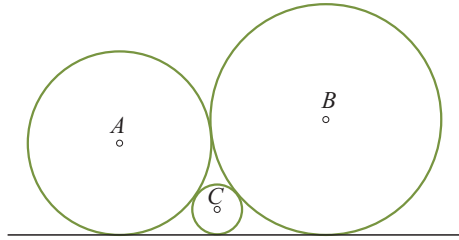
$$|AD| \cdot |DB| = |OD| \cdot |DF| = |OD| \cdot |EO_1|.$$

Slično se produženjem  $\overline{O_1E}$  do središta s kružnicom  $O_1AO$  u točki  $F_1$  dobiva

$$|AE| \cdot |EB| = |OD| \cdot |EO_1|.$$

Ur:

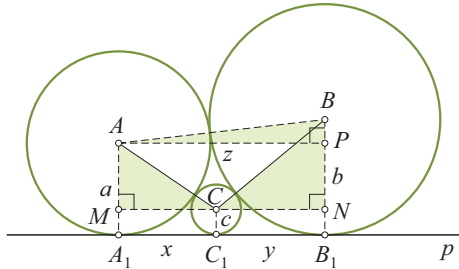
**4069.** Tri kružnice sa središtima  $A, B, C$  dodiruju se međusobno i imaju zajedničku tangentu, kao na slici.



Ako su  $a, b, c$  polumjeri kružnica sa središtima  $A, B, C$  dokaži

$$\frac{1}{\sqrt{c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}.$$

**Rješenje.** Neka su  $A_1, B_1, C_1$  nožišta okomica spušteneh na pravac  $p$  redom iz središta  $A, B, C$ .



Iz  $\triangle AMC$  po Pitagorinu poučku je:

$$x^2 = (a + c)^2 - (a - c)^2, \quad x = 2\sqrt{ac}.$$

Isto tako iz  $\triangle BCN$  je:

$$y^2 = (b + c)^2 - (b - c)^2, \quad y = 2\sqrt{bc}.$$

Iz  $\triangle ABP$  po Pitagorinu poučku je:

$$z^2 = (a + b)^2 - (a - b)^2, \quad z = 2\sqrt{ab}.$$

Budući je

$$z = x + y$$

$$2\sqrt{ab} = 2\sqrt{ac} + 2\sqrt{bc} \quad / : 2\sqrt{abc}$$

$$\frac{1}{\sqrt{c}} = \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

Ivan Jukić (1), Vukovar

**4070.** Brojevi  $1, 2, \dots, 2n$  poredani su proizvoljno na  $2n$  mjesta koja su numerirana s  $1, 2, \dots, 2n$ . Zatim se zbroji svaki redni broj s brojem koji mu je pridružen. Dokaži da među tim sumama postoje barem dvije koje imaju isti ostatak pri diobi s  $2n$ .

**Rješenje.** Pretpostavimo da se pojavljuju svi ostaci  $0, 1, 2, \dots, 2n-1$ . Zbroj svih cijelih brojeva i njihovih rednih brojeva je:

$$\begin{aligned} S_1 &= 2(1 + 2 + \dots + 2n) \\ &= 2n(2n + 1) \equiv 0 \pmod{2n}. \end{aligned}$$

Zbroj svih ostataka je:

$$\begin{aligned} S_2 &= 0 + 1 + \dots + 2n - 1 = n(2n - 1) \\ &= 2n \cdot n - n \equiv -n \pmod{2n} \\ &\equiv 2n - n \equiv n \pmod{2n}. \end{aligned}$$

Ako su svi ostaci različiti mora biti

$$S_1 \equiv S_2 \pmod{2n},$$

a to nije moguće jer je  $0 \not\equiv n \pmod{2n}$  za  $n \geq 1$ . Ovim smo dobili proturječje i dokazali tvrdnju zadatka.

Ivan Jukić (1), Vukovar

## D) Rješenja iz fizike

**OŠ – 558.** Opruga se produlji za 3 cm kad se na nju objesi uteg mase 50 g. Kad se na nju objesi staklena kocka produljenje opruge iznosi 9.6 cm. Kolika je duljina brida kocke? Gustoća stakla iznosi  $2500 \text{ kg/m}^3$ .

**Rješenje.**

$$m_1 = 50 \text{ g} = 0.05 \text{ kg}$$

$$\Delta l_1 = 3 \text{ cm} = 0.03 \text{ m}$$

$$\Delta l_2 = 9.6 \text{ cm} = 0.096 \text{ m}$$

$$\rho = 2500 \text{ kg/m}^3 = 2.5 \text{ g/cm}^3$$

$$a = ?$$

$$k = \frac{F_1}{\Delta l_1}$$

$$F_1 = G_1 = mg = 0.5 \text{ N}$$

$$k = \frac{0.5 \text{ N}}{0.03 \text{ m}} = \frac{50 \text{ N}}{3 \text{ m}}$$

$$F_2 = k\Delta l_2 = \frac{50 \text{ N}}{3 \text{ m}} \cdot 0.096 \text{ m} = 1.6 \text{ N} = G_2$$

$$m_2 = \frac{G_2}{g} = 0.16 \text{ kg} = 160 \text{ g}$$

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{160 \text{ g}}{2.5 \text{ g/cm}^3} = 64 \text{ cm}^3 = a^3$$

$$a = 4 \text{ cm}.$$

Jakov Smoljak (8),  
OŠ Mate Lovraka, Zagreb

**OŠ – 559.** Luka je mjerio broj otkucaja srca i utvrdio da u mirovanju ima 60 otkucaja u minuti. Zna da je snaga ljudskog srca oko 2.5 W. Koliko energije potroši srce tijekom dana, a koliko za jedan otkucaj?

**Rješenje.**

$$n = 60$$

$$t = 1 \text{ min}$$

$$\underline{P = 2.5 \text{ W}}$$

$$E_1 \text{ dan} = ?$$

$$E_1 \text{ otkucaj} = ?$$

$$E_1 \text{ minuta} = Pt = 2.5 \text{ W} \cdot 60 \text{ s} = 150 \text{ J}$$

$$E_1 \text{ otkucaj} = \frac{150 \text{ J}}{60} = 2.5 \text{ J}$$

$$1 \text{ dan} = 24 \text{ h} = 1440 \text{ min}$$

$$E_1 \text{ dan} = 150 \text{ J} \cdot 1440 = 216\,000 \text{ J}.$$

Niko Kurtović (8),  
OŠ Mate Lovraka, Zagreb

**OŠ – 560.** Baterija ima svoj unutarnji otpor. Učenik je, želeći ga odrediti, izmjerio napon na novoj bateriji od 4.5 V dok nije bila spojena u strujni krug. Napon je tada iznosio 4.8 V. Kad ju je spojio sa žaruljicom i ampermetrom izmjerio je struju od 250 mA. Napon na krajevima žaruljice je tada iznosio 4.4 V. Koliki je unutarnji otpor baterije?

**Rješenje.**

$$U_1 = 4.8 \text{ V}$$

$$I = 250 \text{ mA} = 0.25 \text{ A}$$

$$\underline{U_2 = 4.4 \text{ V}}$$

$$R_b = ?$$

$$U_b = U_1 - U_2 = 4.8 \text{ V} - 4.4 \text{ V} = 0.4 \text{ V}$$

$$R = \frac{U}{I} = \frac{0.4 \text{ V}}{0.25 \text{ A}} = 1.6 \Omega.$$

Luka Sabolić (8),  
OŠ Mate Lovraka, Zagreb

**OŠ – 561.** U Zagrebu se provodi projekt postavljanja solarnih panela na krovove škola. Jedan panel ima površinu  $10 \text{ m}^2$ . Prosječna količina Sunčevog zračenja iznosi  $1000 \text{ W/m}^2$ . Korisnost panela je oko 20 % i dnevno radi prosječno 5 sati. Ako škola dnevno troši 30 kWh elekt-

rične energije, koliko bi trebalo postaviti takvih panela da pokriju sve potrebe škole?

**Rješenje.**

$$A = 10 \text{ m}^2$$

$$\frac{P}{m^2} = 1000 \text{ W/m}^2$$

$$\eta = 20 \% = 0.2$$

$$t = 5 \text{ h}$$

$$E = 30 \text{ kWh}$$

$$n = ?$$

$$P = \frac{E}{t} = \frac{30 \text{ kWh}}{5 \text{ h}} = 6 \text{ kW}$$

$$P_1 = 10 \text{ m}^2 \cdot 1000 \text{ W/m}^2 = 10\,000 \text{ W}$$

$$P_{1 \text{ korisno}} = \eta P_1 = 0.2 \cdot 10\,000 \text{ W} \\ = 2000 \text{ W} = 2 \text{ kW}$$

$$n = \frac{P}{P_{1 \text{ korisno}}} = \frac{6 \text{ kW}}{2 \text{ kW}} = 3.$$

Mihael Ratkajc (8),  
OŠ Mate Lovraka, Zagreb

**1882.** U svakome vrhu pravilnog 2025-terokuta duljine stranice 1 m nalazi se jedna čestica. Svaka čestica giba se brzinom stalnog iznosa (i istoga za sve čestice) prema čestici u prvome susjednom vrhu, u smjeru kazaljke na satu. Koliki će put prijeći svaka čestica prije nego se sve nađu u istoj točki?

**Rješenje.** Riješimo problem za pravilni  $n$ -terokut. Promotrimo trokut razapet središtem i dvama susjednim vrhovima  $n$ -terokuta (na slici je prikazan uvelike raširen trokut). Kut  $\alpha$  je  $\alpha = 2\pi/n$  pa je  $\beta = (\pi - \alpha)/2$ . Sve čestice sve vrijeme leže na vrhovima  $n$ -terokuta koji se steže prema središtu pa je radijalna komponenta brzine  $v_r$  (prema središtu) konstantna. Neka je  $v$  iznos brzine svake čestice. Radijalnu brzinu nalazimo kao projekciju vektora ukupne brzine na odgovarajuću stranicu trokuta

$$v_r = v \cos \beta = v \sin \frac{\alpha}{2} = v \sin \frac{\pi}{n}.$$

Tom brzinom čestice moraju prijeći radijalnu udaljenost  $R$  do središta. Uz  $a$  kao početnu duljinu stranice  $n$ -terokuta imamo

$$R = \frac{a}{2 \sin \frac{\pi}{n}}.$$

Za prijeći  $R$  potrebno je vrijeme:

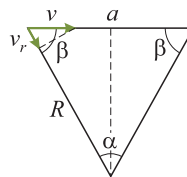
$$t = \frac{R}{v_r} = \frac{a}{2v \sin^2 \frac{\pi}{n}}.$$

Ukupna duljina puta je

$$L = vt = \frac{a}{2 \sin^2(\pi/n)},$$

što daje 207 740 m, tj. gotovo 208 km.

Ur.



**1883.** Schwarzschildov polumjer je polumjer koji bi kugla dane mase morala imati da bi postala crna rupa. On se pravilno izvodi unutar Einsteinove opće teorije relativnosti, no sretna je okolnost i zanimljiva podudarnost da se isti rezultat može dobiti i klasičnim računom. U sklopu klasičnog razmatranja Schwarzschildov polumjer određuje se iz uvjeta da druga kozmička brzina za lansiranje tijela s površine kugle postane jednaka brzini svjetlosti. (Druga kozmička brzina je minimalna brzina potrebna da bi se lansirano tijelo uspjelo odmaknuti na beskonačnu udaljenost od drugoga tijela – u našem slučaju od promatrane kugle.) Izračunajte Schwarzschildov polumjer Zemlje, tj. koliki bi polumjer Zemlje morao biti da bi ona postala crna rupa. Masa Zemlje je  $6 \cdot 10^{24}$  kg.

**Rješenje.** Druga kozmička brzina  $v$  (za tijelo mase  $m$ ) određuje se iz uvjeta da pri vertikalnom izbačaju s površine kugle mase  $M$  kinetička energija izbačenoga tijela bude dovoljna da “nadvlada” razliku gravitacijske potencijalne energije između početne točke na površini kugle i točke u beskonačnosti,

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{GMm}{R},$$

gdje je  $R$  polumjer kugle, a  $G$  opća gravitacijska konstanta. Schwarzschildov polumjer slijedi iz uvjeta da druga kozmička brzina postane jednaka brzini svjetlosti ( $v = c$ ):

$$R = \frac{2GM}{c^2}.$$

Uvrštavanjem brojeva dobivamo 8.9 mm za Schwarzschildov polumjer Zemlje.

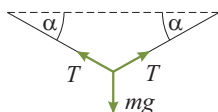
Ur.

**1884.** Žica duljine  $2L$  rastegnuta je horizontalno između dva stupa za rasvjetu. Svjetiljka mase  $3 \text{ kg}$  obješena je na sredini žice. Koliki će biti kut žice prema horizontali ako je presjek žice  $0.2 \text{ cm}^2$ , a njezin Youngov modul elastičnosti  $50 \text{ GPa}$ ? Uz  $g = 10 \text{ m/s}^2$ , koristi aproksimaciju malih kutova.

(Zadatak osmislio Duje Dodig.)

**Rješenje.** Vertikalna komponenta napetosti nit  $T$  mora pokriti težinu svjetiljke (mase  $m$ ):

$$2T \sin \alpha = mg \implies T = \frac{mg}{2 \sin \alpha}.$$



Iz definicije modula elastičnosti  $E$  imamo:

$$E = \frac{T/A}{\Delta L/L_0} \implies T = EA \frac{\Delta L}{L_0}.$$

$A$  je površina presjeka žice,  $L_0$  duljina u neopterećenom stanju, a  $\Delta L$  produljenje. Vidimo:

$$\cos \alpha = \frac{L_0}{L_0 + \Delta L} \implies \Delta L = L_0 \frac{1 - \cos \alpha}{\cos \alpha}.$$

Oдавде je napetost žice

$$T = EA \frac{1 - \cos \alpha}{\cos \alpha}$$

pa uvjet uzdržavanja svjetiljke daje

$$\frac{mg}{2EA} = \frac{1 - \cos \alpha}{\cos \alpha} \sin \alpha.$$

Sad koristimo aproksimaciju malih kutova prema kojoj  $\sin \alpha \approx \alpha$  te  $\cos \alpha \approx 1 - \alpha^2/2$  (za brojnik nam treba razvoj do drugog člana, a u nazivniku nam je dovoljna samo vodeća jedinica). Oдавде:

$$\frac{mg}{2EA} \approx \frac{\alpha^3}{2} \implies \alpha \approx \sqrt[3]{\frac{mg}{EA}} \approx 1.78^\circ.$$

Ivan Jukić (1),  
Gimnazija Vukovar, Vukovar

**1885.** Zavojnica induktiviteta  $0.318 \text{ H}$  spojena je u seriju s kondenzatorom promjenjiva kapaciteta i otpornikom od  $22 \Omega$ . Strujni krug zatvoren je priključivanjem na izvor izmjeničnoga napona amplitude  $380 \text{ V}$  i frekvencije  $50 \text{ Hz}$ .

a) Ako je kapacitet kondenzatora  $0.5 \mu\text{F}$ , izračunaj efektivnu struju u krugu, amplitudu napona na zavojnici te fazni pomak između struje i napona u krugu.

b) Na koju vrijednost treba podesiti kapacitet kondenzatora da bi krugom tekla maksimalna struja? Kolike su tada tražene vrijednosti iz a) dijela zadatka?

(Zadatak osmislio Duje Dodig.)

**Rješenje.** a) Za zadanu frekvenciju  $f$ , kružna frekvencija izmjeničnoga napona je  $\omega = 2\pi f \approx 314.16 \text{ s}^{-1}$ . Amplituda struje kroz čitav krug dobiva se iz amplitude napona  $U_0$  kao:

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \approx 60.6 \text{ mA}.$$

Efektivna struja je

$$I_{\text{eff}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \approx 42.9 \text{ mA}.$$

Amplituda napona na zavojnici je

$$U_L = I_0 \omega L \approx 6.06 \text{ V}.$$

Budući da je  $1/\omega C > \omega L$ , napon kasni u fazi za strujom. Fazni pomak određen je s

$$\text{tg } \varphi = \frac{1}{R} \left( \frac{1}{\omega C} - \omega L \right), \quad \text{što daje } \varphi = 89.8^\circ.$$

b) Struja je maksimalna kad je nazivnik iz  $I_0$  najmanji, tj. kad je  $\omega L - 1/\omega C = 0$ , pa:

$$C = \frac{1}{\omega^2 L} \approx 31.9 \mu\text{F}.$$

Tražene veličine sada su:  $I_0 \approx 17.3 \text{ A}$ ,  $I_{\text{eff}} \approx 12.2 \text{ A}$ ,  $U_L = 1725.6 \text{ V}$  i  $\varphi = 0^\circ$ .

Ur.

**1886.** Raketa se lansira vertikalno uvis izbacivanjem vrućih plinova u dva navrata, s vremenskom razlikom  $\Delta t$  (prvo izbacivanje nastupa dok raketa još miruje na tlu, a drugo nakon  $\Delta t$ ). Svako izbacivanje plinova traje vrlo kratko, a količina izbačenoga plina u oba je slučaja jednaka. Ako je brzina plina s obzirom na raketu jednaka  $u$ , koliki treba biti  $\Delta t$  da bi raketa dosegla najveću visinu? Zanemari otpor zraka.

(Zadatak osmislio Duje Dodig.)

**Rješenje.** Neka je  $M$  početna masa rakete, a  $m$  masa plina koji izlazi pri jednom izbacivanju. Pri prvom izbacivanju masa rakete smanji se s  $M$  na  $M - m$ . Prema klasičnom obliku raketne jednadžbe za vrlo kratka izbacivanja promjena brzine iznosi

$$\Delta v_1 = u \ln \frac{M}{M - m}.$$

Kako je raketa u početku mirovala, nakon prvog izbacivanja brzina joj je upravo  $v_1 = \Delta v_1$ . Tijekom uzdizanja u trajanju  $\Delta t$  gravitacija je jednoliko usporava, pri čemu joj se brzina smanjuje na

$$v_2 = v_1 - g\Delta t = u \ln \frac{M}{M-m} - g\Delta t.$$

Pri drugom izbacivanju plina masa rakete smanji se s  $M-m$  na  $M-2m$ , tako da u vrlo kratkom vremenu raketa dobije nagli potisak u brzini od

$$\Delta v_2 = u \ln \frac{M-m}{M-2m}.$$

Stoga je brzina nakon drugog izbacivanja plina

$$v'_2 = v_2 + \Delta v_2 = u \ln \frac{M}{M-2m} - g\Delta t.$$

Ukupna visina koju dosegne raketa sastoji se od početnog pomaka tijekom  $\Delta t$ ,

$$H_1 = v_1 \Delta t - \frac{g(\Delta t)^2}{2}$$

i od dodatnog pomaka nakon postizanja  $v'_2$

$$H_2 = \frac{(v'_2)^2}{2g},$$

sve do zaustavljanja na visini  $H = H_1 + H_2$ ,

$$H = \frac{u^2}{2g} \ln^2 \frac{M}{M-2m} + \Delta t \cdot u \ln \frac{M-2m}{M-m}.$$

Kako je član pod drugim logaritmom (koji množi  $\Delta t$ ) manji od jedinice, logaritam je negativan pa je ovo padajuća funkcija od  $\Delta t$ . Stoga se najviša vrijednost od  $H$  postiže za najmanju vrijednost  $\Delta t = 0$ . Drugim riječima, što dulje čekamo s drugim izbacivanjem plina, konačna visina rakete bit će manja pa je optimalno odmah izvesti oba potiska, jedan za drugim.

Ur.

**1887.** U medicini se često koriste radioaktivni kobalt  $^{60}\text{Co}$ , čije je vrijeme poluživota 5.27 godina, te radioaktivni jod  $^{131}\text{I}$  vremena poluživota 8.025 dana. Izračunajte omjer početnih masa  $^{60}\text{Co}$  i  $^{131}\text{I}$  ako su im u početnome trenutku aktivnosti jednake. Nakon koliko vremena će im omjer aktivnosti biti jednak 100? Koristite molarnu masu (po molu atoma)  $M_{\text{Co}} = 60 \text{ g/mol}$  za  $^{60}\text{Co}$  i  $M_{\text{I}} = 131 \text{ g/mol}$  za  $^{131}\text{I}$ .

**Rješenje.** Uz  $T_i$  kao vrijeme poluživota danoga izotopa, aktivnost njegova uzorka je

$$A_i(t) = \frac{N_i \ln 2}{T_i} 2^{-t/T_i},$$

gdje je  $N_i$  početni broj atoma danog izotopa.

Taj broj atoma nalazimo iz

$$N_i = \frac{m_i}{M_i} N_A,$$

gdje je  $N_A$  Avogadrova konstanta,  $m_i$  masa, a  $M_i$  molarna masa izotopa. Iz uvjeta zadatka  $A_{\text{Co}}(0) = A_{\text{I}}(0)$  za omjer masa u početnom trenutku nalazimo

$$\frac{m_{\text{Co}}}{m_{\text{I}}} = \frac{M_{\text{Co}} T_{\text{Co}}}{M_{\text{I}} T_{\text{I}}} \approx 109.8.$$

Aktivnost se može izraziti i kao

$$A_i(t) = A_0^{(i)} 2^{-t/T_i}$$

gdje je  $A_0^{(i)}$  aktivnost u početnom trenutku. Zbog uvjeta jednakih početnih aktivnosti ( $A_0^{(\text{Co})} = A_0^{(\text{I})}$ ) ovaj oblik jednostavniji je za nalaženje vremena  $t$  nakon kojeg će omjer aktivnosti biti jednak 100. Kako se  $^{131}\text{I}$  brže raspada, njegova aktivnost će ranije pasti pa će omjer  $A_{\text{Co}}(t)/A_{\text{I}}(t)$  biti veći od jedinice. Stoga trebamo riješiti

$$\frac{A_{\text{Co}}(t)}{A_{\text{I}}(t)} = 2^{-t(1/T_{\text{Co}} - 1/T_{\text{I}})} = 100,$$

odakle je  $t = \frac{T_{\text{Co}} T_{\text{I}}}{T_{\text{Co}} - T_{\text{I}}} \log_2 100 \approx 53.54$  dana.

Ur.

**1888.** Svjetlost prolazi kroz tri staklena bloka. Indeks loma prvoga bloka je 1.5, a drugoga 1.6. Razlika u valnim duljinama svjetlosti u tim dvama blokovima iznosi 20 nm. Kolika je valna duljina svjetlosti u trećem bloku, indeksa loma 1.8?

**Rješenje.** Veza između valne duljine  $\lambda_0$  u vakuumu i  $\lambda_i$  u mediju indeksa loma  $n_i$  je  $\lambda_i = \lambda_0/n_i$ . Uz  $n_1 = 1.5$ ,  $n_2 = 1.6$  i  $\Delta\lambda = 20 \text{ nm}$  je

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda_0}{n_1} - \frac{\lambda_0}{n_2},$$

odakle je

$$\lambda_0 = \frac{n_1 n_2}{n_2 - n_1} \Delta\lambda = 480 \text{ nm}.$$

U trećem bloku, s  $n_3 = 1.8$ , sada je:

$$\lambda_3 = \frac{\lambda_0}{n_3} \approx 266.7 \text{ nm}.$$

Ivan Jukić (1), Vukovar

**Napomena uredništva:** Razlika valne duljine  $\Delta\lambda$  greškom je zadana kao 20 nm umjesto 30 nm. U tom slučaju ispalo bi  $\lambda_3 = 400 \text{ nm}$ .