ZANIMLJIVOSTI

Županijsko natjecanje iz matematike, 24. veljače 2026. g.

Zadatci za A varijantu

I. razred

1. Ante i Matea treniraju plivanje. Na jednom od zajedničkih treninga istovremeno su krenuli sa suprotnih strana bazena. Do trenutka kad su se prvi puta istovremeno našli na istom rubu bazena, zajedno su preplivali devet duljina bazena. Od tada do sljedećeg trenutka kad su se ponovno našli istovremeno na istom rubu bazena zajedno su preplivali dodatnih 855 metara. Ako oboje plivaju stalnim brzinama, kolika je duljina bazena u kojem treniraju?

2. Odredi sve uređene trojke cijelih brojeva (a, b, c) za koje vrijedi $a^2 = bc + 1$ i $b^2 = ac + 1$.

3. Neka je ABC trokut takav da je $|AC| > |BC|$. Neka je M nožište okomice iz vrha B na simetralu kuta $\sphericalangle BCA$. Dokaži da je površina trokuta AMC dvostruko manja od površine trokuta ABC.

4. Odredi sve uređene trojke (x, y, z) realnih brojeva za koje vrijedi

$$\frac{2x^2}{1+x^2} = y, \qquad \frac{2y^2}{1+y^2} = z, \qquad \frac{2z^2}{1+z^2} = x.$$

5. Može li se ploča dimenzija 2027×2027 prekriti koristeći dvije vrste pločica:

- pločice dimenzija 1×2 koje prekrivaju po dva susjedna polja u istom retku i
- pločice dimenzija 3×1 koje prekrivaju po tri uzastopna polja u istom stupcu?

ločice se ne smiju preklapati niti prelaziti preko ruba dane ploče.

II. razred

1. Odredi sve vrijednosti realnog parametra m za koje jednadžba

$$x^2 + (1-m)x + m + 1 = 0$$

ima dva različita realna rješenja pri čemu je veće rješenje manje od dvostrukog manjeg rješenja.

2. Odredi najmanji prirodni broj koji ima tri različita pozitivna djelitelja čiji je umnožak 14^{600}.

3. U kvadrat $ABCD$ upisan je jednakostranični trokut CEF tako da se točka E nalazi na stranici $\overline{AD}$, a točka F na stranici $\overline{AB}$. Neka je G polovište dužine $\overline{CE}$. Dokaži da je trokut ABG jednakostraničan.

4. Odredi sve uređene trojke (a, b, c) pozitivnih realnih brojeva za koje vrijedi

$$ab\left(\frac{a+b}{2} - c\right) + bc\left(\frac{b+c}{2} - a\right) + ca\left(\frac{c+a}{2} - b\right) = 0.$$

5. Ana i Borna igraju igru na 3×3 ploči. Na početku Ana u polja ploče upiše sve prirodne brojeve od 1 do 9. Zatim Borna odabire jedan put od gornjeg lijevog do donjeg desnog polja koji sadrži točno pet polja. Na kraju određuju zbroj brojeva upisanih u polja odabranog puta. Ana želi da taj zbroj bude što veći, a Borna da bude što manji. Ako oboje igraju optimalno, koliki će biti taj zbroj?

(Put je niz polja od kojih svaka dva uzastopna imaju zajedničku stranicu.)

III. razred

1. Riješi sustav jednadžbi

$$\frac{\log_2 x}{\log_x 2} - \log_2 y^2 = 3, \qquad \frac{\log_2 y}{\log_y 2} - \log_2 x^2 = 3.$$

2. Odredi sva rješenja sustava nejednadžbi

$$\begin{aligned}(\sin x + \cos y + 1)^2 &\geq 2(\sin x + 1)(\cos y + 1)\\ (\sin y + \cos z + 1)^2 &\geq 2(\sin y + 1)(\cos z + 1)\\ (\sin z + \cos x + 1)^2 &\geq 2(\sin z + 1)(\cos x + 1)\end{aligned}$$

za koja vrijedi $0 < x, y, z < \dfrac{\pi}{2}$.

3. Odredi sve prirodne brojeve n za koje je broj $1 + \lfloor\sqrt{n}\rfloor$ djelitelj broja n.

Za realni broj t, $\lfloor t \rfloor$ označava najveći cijeli broj koji je manji ili jednak t. Na primjer, $\lfloor 2 \rfloor = 2$ i $\lfloor \pi \rfloor = 3$.

4. U četverokutu $ABCD$ vrijedi $|\sphericalangle ABC| = 90^\circ$, $|\sphericalangle BCD| = 120^\circ$ i $|\sphericalangle CDA| = 90^\circ$. Neka je M sjecište dijagonala $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$. Ako je $|BM| = 1$ i $|MD| = 2$, odredi površinu četverokuta $ABCD$.

5. Neka je n prirodni broj. U nekoj državi koriste se kovanice svih apoena od 1 do n. Kolekcionar želi dio svojih kovanica rasporediti u pet kutija tako da budu ispunjena sljedeća četiri uvjeta:

- U svakoj je kutiji najviše jedna kovanica svakog apoena.
- U svim je kutijama isti broj kovanica i jednak iznos novca.
- Bilo koje dvije kutije zajedno sadrže barem jednu kovanicu svakog apoena.
- Kovanice niti jednog apoena ne nalaze se u svim kutijama.

Pod pretpostavkom da kolekcionar ima dovoljno kovanica svakog apoena, može li postići svoj cilj ako je

a) $n = 109$ b) $n = 110$?

IV. razred

1. Odredi sve nenegativne realne brojeve x takve da su $\lfloor x \rfloor$, $\{x\}$ i x uzastopni članovi aritmetičkog niza (ne nužno u tom poretku).

Za realni broj t, $\lfloor t \rfloor$ označava najveći cijeli broj koji je manji ili jednak t, a $\{t\}$ njegov decimalni dio, tj. $\{t\} = t - \lfloor t \rfloor$. Na primjer, $\lfloor 15.1 \rfloor = 15$ i $\{15.1\} = 0.1$.

2. Neka je z kompleksan broj takav da je broj

$$\frac{6z^2 + 5z + 6}{3z^2 + 10z + 3}$$

realan. Dokaži da je z realan broj ili da vrijedi $|z| = 1$.

3. Na kružnici je označeno 3000 točaka. Muha koja se u početku nalazi na jednoj od točaka kreće se isključivo skokovima u smjeru kazaljke na satu za 2 ili 3 mjesta. Koliko joj je najmanje skokova potrebno za obilazak svih točaka i povratak na početnu točku?

4. Odredi sve prirodne brojeve $n \geq 2$ za koje postoje prirodni brojevi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ takvi da vrijedi:

- $\sqrt{a_k + 1}$ je prirodan broj za sve $k = 1, 2, \ldots, n$
- $\sqrt{a_k + 1}$ je djelitelj broja a_{k+1} za sve $k = 1, 2, \ldots, n-1$
- $a_n - a_1 = 20$.

5. Neka je ABC pravokutan trokut s pravim kutom u vrhu C i $|AC| > |BC|$. Neka je k polukružnica s promjerom $\overline{AC}$ koja se nalazi s iste strane pravca AC kao i točka B. Neka je P točka na k takva da je $|CP| = |CB|$ i neka je Q točka na $\overline{AC}$ takva da je $|AP| = |AQ|$. Dokaži da polovište dužine $\overline{BQ}$ pripada polukružnici k.

Zadatci za B varijantu

I. razred

1. Blagajnica Branka pogriješila je vraćajući Ani ostatak novca: iznos koji je trebala vratiti u eurima vratila je u centima, a iznos koji je trebala vratiti u centima vratila je u eurima. Ne provjeravajući vraćeni novac, Ana ga je spremila u prazni novčanik i otišla u drugu trgovinu gdje je potrošila 4.45 eura. Nakon toga je primijetila da u novčaniku ima točno dvostruko više novca nego što joj je blagajnica Branka trebala vratiti. Koliki je iznos blagajnica Branka trebala vratiti Ani ako je poznato da je taj iznos manji od 100 eura?

2. Zadana je jednadžba

$$\frac{x-2a}{2+x} - \frac{x+2a}{x-2} = \frac{4a}{4-x^2}.$$

a) Odredi vrijednost realnog parametra a za koji je 2026 rješenje zadane jednadžbe.

b) Odredi sve vrijednosti realnog parametra a za koje zadana jednadžba nema rješenja.

3. Za realne brojeve a, b i c različite od nule vrijedi

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}.$$

Dokaži da je zbroj nekih dvaju od tih brojeva jednak nuli.

4. U polja tablice s 18 redaka i 18 stupaca upisani su redom prirodni brojevi od 1 do 324 tako da su u prvom retku redom slijeva nadesno upisani brojevi $1, 2, 3, \ldots, 18$, a u svakom sljedećem retku narednih 18 uzastopnih prirodnih brojeva. Unutar tablice odabran je kvadrat dimenzija 6×6. Ako zbroj neka tri od četiriju brojeva u kutnim poljima tog kvadrata iznosi 616, odredi koji broj može biti u četvrtom kutnom polju tog kvadrata.

5. U trokutu ABC vrijedi $|AB| = 6$ i $|AC| = |BC| = 9$. Odredi zbroj udaljenosti ortocentra tog trokuta od njegovih vrhova.

II. razred

1. Napiši neku kvadratnu jednadžbu kojoj su rješenja realni brojevi m i n takvi da vrijedi

$$\sqrt[3]{m} - \sqrt[3]{n} = 2 \quad \text{i} \quad m + n = 6\left(\sqrt[3]{m^2} - \sqrt[3]{mn} + \sqrt[3]{n^2}\right).$$

2. U ovisnosti o realnom parametru a odredi u koliko se točaka sijeku grafovi funkcija

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=a(x+a)(x+a+2)\qquad \text{i}$$
$$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad g(x)=a(x-2a)(x-2a+2)+24x.$$

3. Odredi duljinu kružnoga luka $\overset{\frown}{CA}$ kružnice opisane trokutu ABC kojemu duljine stranica iznose

$$|AB|=3\sqrt{2}-\sqrt{6},\qquad |BC|=2\quad \text{i}\quad |AC|=2\sqrt{3}-2.$$

4. Odredi površinu mnogokuta koji je omeđen grafovima funkcija

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=\sqrt{x^2-6x+9}-2\qquad \text{i}\qquad g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad g(x)=|x+3|-|x-2|.$$

5. Svaku stranicu i dijagonalu pravilnog osmerokuta treba obojiti plavom ili crvenom bojom. Na koliko se načina to može napraviti tako da se rotacijom osmerokuta za $90°$ oko njegovog središta dobije isti raspored boja?

III. razred

1. Odredi umnožak svih realnih rješenja jednadžbe $x^2-\sqrt{2026}\cdot x^{\log_{2026}x}=0$.

2. Koliko ima peteroznamenkastih brojeva koji imaju točno dvije različite znamenke?

3. Pješčani sat sastoji se od dva sukladna uspravna stošca sa zajedničkim vrhom spojena tako da pijesak prolazi kroz vrh iz jednog dijela u drugi. Pijesak zauzima točno polovinu ukupnog volumena pješčanog sata, a da bi sav pijesak iscurio iz gornjeg dijela sata u donji, potrebno je 125 sekundi. Kada je sav pijesak u gornjem dijelu sata pustimo ga da curi. Koliki će biti omjer visina pijeska u donjem i gornjem dijelu sata nakon 98 sekundi?

4. Ako su x, y i z realni brojevi takvi da vrijedi

$$\operatorname{tg}x=2\cos y,\qquad \operatorname{tg}y=3\cos z\quad \text{i}\quad \operatorname{tg}z=7\cos x,$$

odredi $\cos 2x$.

5. Neka je pravokutnik $ABCD$ takav da je $|AB|=12$ i $|BC|=30$. Točka E nalazi se na stranici $\overline{AD}$, a točka F na stranici $\overline{BC}$ tako da se kružnice opisane trokutima ABE i CDF dodiruju. Ako je $|AE|=9$, odredi duljinu dužine $\overline{CF}$.

IV. razred

1. Odredi prirodnu domenu funkcije $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-16}}{\log_{6-x}(x^2+3x-10)}$.

2. Neka je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz realnih brojeva takav da za sve $n\geq 2$ vrijedi

$$x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}+x_n=n^2x_n.$$

Ako je $x_1=1013$, koliko je x_{2026}?

3. Odredi pozitivan realni broj a takav da u razvoju binoma $\left(ax+\dfrac{1}{x^2}\right)^6$ po potencijama od x koeficijent uz x^6 bude za 52 veći od koeficijenta uz x^{-9}.

4. Nad stranicama trokuta ABC konstruirani su prema van kvadrati $BAEF$, $CBPQ$ i $ACMN$. Ako vrijedi $|BC|=6$, $|AC|=5$ i kut $|\sphericalangle ACB|=135°$, kolika je površina šesterokuta $EFPQMN$?

5. Na koliko načina šest parova može sjesti u jedan red kazališta koji ima 20 mjesta, ako svaki par želi sjediti zajedno?

Državno povjerenstvo za natjecanje iz matematike