

Površina, poluopseg i polumjer upisane kružnice trokuta

MATEA DVORŠČAK¹, IVICA GUSIĆ², JELENA GUSIĆ³

Na osnovnoj razini matematike u ljetnom roku ispita državne mature 2025. godine pojavio se zadatak iz područja geometrije koji je podijelio (matematičku) javnost i postao izvorom brojnih rasprava. Naizgled se radilo o jednostavnom zadatku čije se rješavanje svodi na korištenje formule koja površinu trokuta povezuje s njegovim poluopsegom i radijusom trokutu upisane kružnice, a koja se može naći u *knjižici formula* za državnu maturu ($P = r_u s$). Uvidom u dane veličine otkrio se problem – lagani aritmetički zadatak u geometrijskom kontekstu nije moguć. Objekt, koji je zadatku dao kontekst, ne postoji. Navedena situacija inspirirala nas je da malo dublje sagledamo problem zadavanja trokuta njegovim elementima. U ovom slučaju od tri elementa koja su povezana u formuli $P = r_u s$, površina, radijus trokutu upisane kružnice i poluopseg trokuta, biramo dva elementa utvrđujući egzistenciju takvog trokuta. U članku ćemo analizirati nužne uvjete odnosno relacije koje navedeni elementi trokuta moraju zadovoljavati kako bi se zaista radilo o trokutu. Usput ćemo provjeriti radi li se o omašci koja je mogla biti jednostavno ispravljena ili je situacija ipak malo kompliciranija. Za kraj ćemo ponuditi i „as iz rukava”, odnosno metodu kojom se nastavnici mogu poslužiti prilikom zadavanja elemenata trokuta, a kako bi osigurali da zadane vrijednosti zaista određuju trokut. Napomenimo da relacije koje će se pronaći u nastavku članka nisu standard srednjoškolske matematike. Od nastavnika se ne očekuje njihova primjena, niti se od srednjoškolaca očekuje poznavanje takvih relacija. Ipak, svi izvodi provedeni su na srednjoškolskoj razini i kao takvi mogu poslužiti za zgodna matematička istraživanja na satu matematike.

Neka je P površina, s poluopseg i r polumjer upisane kružnice trokuta. Poznato je da je onda

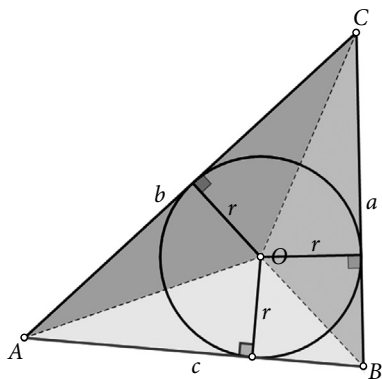
$$P = rs \tag{1}$$

Na primjer, ako je $P = 117$ i $r = 13$, onda bi iz formule (1) slijedilo da je $s = 9$. Problem je u tome što takav trokut ne postoji. Intuitivno, to je jasno jer je gotovo očito da je $r < s$, a u ovom je primjeru $r > s$.

¹Matea Dvorščak, Križevci

²Ivica Gusić, Zagreb

³Jelena Gusić, Zagreb



Nejednakost $r < s$ može se dokazati na više načina, a za srednju školu možda je najprikladnije korištenje Heronove formule:

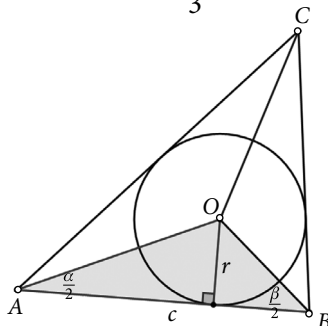
$$P^2 = s(s-a)(s-b)(s-c), \text{ gdje su } a, b, c \text{ stranice trokuta} \quad (2)$$

Slika 1. Površina trokuta jednaka je zbroju površina triju trokuta kojima su visine r , a baze stranice trokuta.

Odavde odmah slijedi da je $P^2 < s^4$, tj. $P < s^2$, što se zbog (1) može napisati i kao $r < s$.

To pokazuje da, iako svaka od veličina P, r, s može imati bilo koju pozitivnu vrijednost, u jednakosti (1) nijedne se dvije ne mogu uzeti po volji.

Možda bi nam palo na pamet da u ovom primjeru u kojemu je $P = 117$ situaciju „spasimo” primjenom komutativnosti množenja. Odnosno, možda bi se moglo pokušati zamijeniti vrijednosti radijusa i poluopsega, odnosno staviti $r = 9$ jer bi tada bilo $s = 13$, tj. vrijedilo bi $r < s$. Ipak, ni ovaj trokut ne postoji, ali za dokaz se treba dodatno pomučiti. Naime, argumentima koje mogu razumjeti i osnovnoškolci može se pokazati da u (1) mora biti $r < \frac{2}{3}s$, što par $r = 9, s = 13$, ne zadovoljava.



Slika 2. U tupokutnom trokutu OAB r je kraći od duljine stranice c .

Zato se najprije uočiti trokut ABC , središte upisane kružnice O i tri trokuta dobivena spajanjem središta O s vrhovima A, B, C . Ti su trokuti tupokutni, s tupim kutom u O . Ako, na primjer, gledamo trokut OAB , onda su kutovi uz vrhove A, B jednaki $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}$. Kako je $\alpha + \beta < 180^\circ$, to je $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} < 90^\circ$, pa je kut uz O tup. U trokutu OAB uočimo visinu iz O na stranicu \overline{AB} kojoj je duljina r i koja trokut dijeli na dva pravokutna trokuta kojima je zajednička kateta r . Kateta je manja od pripadne hipotenuze \overline{AO} koja je pak manja od stranice \overline{AB} trokuta OAB (jer je nasuprot većeg kuta veća stranica). Zato je $r < c$, i slično $r < a$ i $r < b$, pa zbrajanjem dobijemo $3r < a + b + c = 2s$, odnosno $r < \frac{2}{3}s$.

Zato prijedimo na $r = 6$, $s = \frac{39}{2}$ za koje je $P = 117$. Ovaj trokut zadovoljava relaciju $r < \frac{2}{3}s$, međutim niti on ne postoji, što se vidi iz tzv. **izoperimetarske nejednakosti za trokut**⁴

$$s^2 \geq 3\sqrt{3}P, \text{ uz jednakost ako i samo ako je trokut jednakostraničan. } \quad (3)$$

Tu ćemo nejednakost dokazati iz Heronove formule zapisane u obliku

$$\frac{P^2}{s} = (s-a)(s-b)(s-c) \quad (2)'$$

korištenjem aritmetičko-geometrijske nejednakosti⁵ za tri pozitivna broja x, y, z :

$$\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3 \geq xyz, \text{ uz jednakost ako i samo ako je } x=y=z \quad (4)$$

Uz supstituciju $x = s - a$, $y = s - b$, $z = s - c$, lijeva strana nejednakosti (4) postaje $\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3 = \left(\frac{s}{3}\right)^3$, dok množenjem xyz iz formule (2)' dobijemo $xyz = \frac{P^2}{s}$ pa se nejednakost (4) zapisuje kao $\frac{s^3}{27} \geq \frac{P^2}{s}$, što nakon sređivanja daje formulu (3) $s^2 \geq 3\sqrt{3}P$.

U terminima r i s nejednakost $s^2 \geq 3\sqrt{3}P$ može se napisati kao $r \leq \frac{\sqrt{3}}{9}s$ (dijeljenjem s poluopsegom s , $s \geq 3\sqrt{3}\frac{P}{s} = 3\sqrt{3}r$), što je puno stroža nejednakost od onih prije spomenutih. Lako se vidi da $r = 6$, $s = \frac{39}{2}$ ne zadovoljava taj uvjet.

Iz nejednakosti (3) $s^2 \geq 3\sqrt{3}P$ vidi se da ako je zadan P , onda postoji minimalni s za koji postoji trokut kojemu je s poluopseg. Slično, ako nejednakost (3) zapišemo pomoću r i P (množenjem s P pa dijeljenjem sa s^2), dobijemo $3\sqrt{3}r^2 \leq \frac{P}{s}$, pa zaključujemo da za zadani P postoji maksimalni r za koji postoji trokut kojemu je r radijus upisane kružnice.

U slučaju kada je u (3) jednakost, rješenje je jedinstveno i trokut je jednakostraničan (površina jednakostraničnog trokuta izražena pomoću polumjera upisane kružnice upravo je $P = 3\sqrt{3}r^2$).

⁴Izoperimetarski znači imati isti opseg, a izoperimetarske nejednakosti su nejednakosti koje uspoređuju kvadrat opsega geometrijskog lika i njegove površine. Za trokut kojemu je površina P i opseg O vrijedi $O^2 \geq 12\sqrt{3}P$, uz jednakost ako i samo ako je trokut jednakostraničan. Ovu nejednakost možemo iskazati tvrdnjom: *Među trokutima istog opsega, jednakostranični trokut ima najveću površinu*. U članku se ova nejednakost iskazuje u terminima s i P .

⁵Aritmetičko-geometrijska (AG) nejednakost je relacija između aritmetičke sredine n pozitivnih brojeva i njihove geometrijske sredine. Aritmetička je sredina uvijek veća ili jednaka geometrijskoj, uz jednakost ako i samo ako su svi brojevi jednaki.

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$$

U srednjoj se školi najčešće koristi AG nejednakost za dva pozitivna broja, koju je jednostavno dokazati. Ovdje koristimo nejednakost za tri broja, koju nećemo dokazivati, mada je dokaz srednjoškolicima razumljiv.

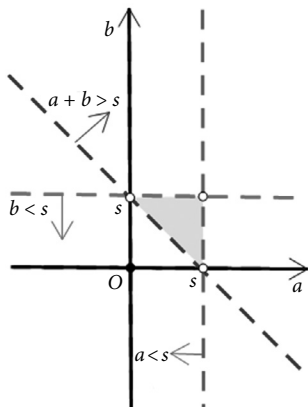
Ako je u (3) stroga nejednakost, onda nije unaprijed jasno postoji li pripadni trokut. U nastavku ćemo pokazati ne samo da postoji takav trokut, već da ih postoji beskonačno mnogo. Iz definicije poluopsega s možemo pisati $c = 2s - (a + b)$, tj. $s - c = a + b - s$. Jednadžba (2)' se uz ovu zamjenu zapisuje

$$\frac{P^2}{s} = (s - a)(s - b)(a + b - s) \tag{5}$$

Jednadžba (5), u kojoj su P, s pozitivne konstante, jednadžba je krivulje s varijablama a, b . Pitanje je ima li ta krivulja točku (a, b) koja određuju trokut, tj. jesu li a, b pozitivni brojevi za koje vrijedi $a + b > c, a + c > b$ i $b + c > a$, gdje je $c = 2s - (a + b)$. Ovi uvjeti, zapisani pomoću s , daju:

$$a + b > s, b < s \text{ i } a < s \tag{6}$$

Na Slici 3. je prokazano područje određeno nejednadžbama (6), pa je zadatak odrediti one točke (a, b) krivulje (5) koje se nalaze unutar osjenčanog pravokutnog trokuta.



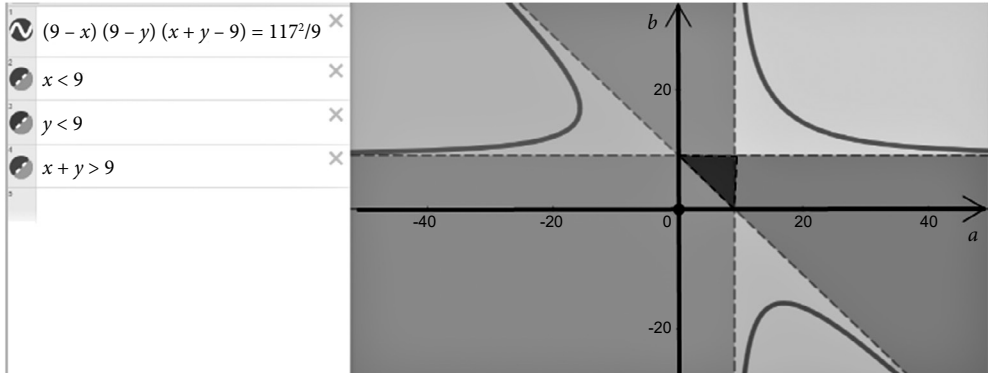
Slika 3.

Ovaj problem u srednjoj školi pogodan je za istraživanje uz pomoć nekog algebarsko geometrijskog programa ili programa dinamičke geometrije. U nastavku će se pokazati nekoliko primjera istraživanja ovog problema pomoću softvera otvorenog koda *Desmos*⁶.

Primjer 1: Rješavanje početnog primjera $P = 117$ i $s = 9$.

Krivulja (5) u ovom slučaju ima jednadžbu $(9 - x)(9 - y)(x + y - 9) = \frac{117^2}{9}$. Iz grafičkog prikaza (Slika 4.) vidimo da nema točaka krivulje koje se nalaze unutar osjenčanog pravokutnog trokuta pa zaključujemo (ono što nam je poznato od prije) da ne postoji trokut određen zadanim elementima.

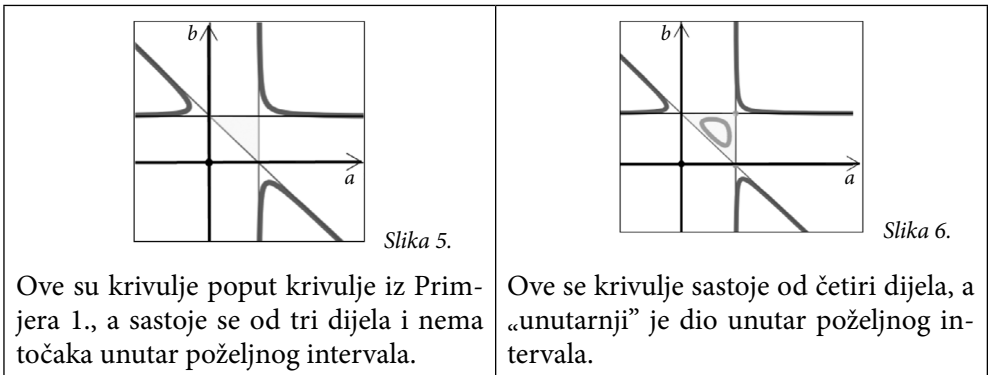
⁶<https://www.desmos.com/>



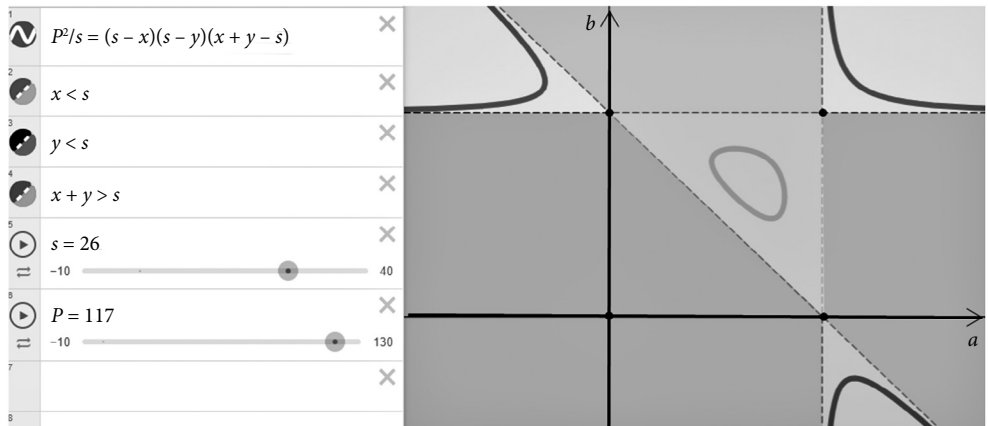
Slika 4.

Primjer 2: Za $P = 117$ mijenjanjem parametra s pokušajmo pronaći krivulju koja će imati rješenje u području određenom nejednadžbama (6).

Uočavamo da se pojavljuju dva tipa krivulja:



Na Slici 7. prikazan slučaj za $s = 26$. Vidimo da je dio krivulje unutar poželjnog područja pa zaključujemo da postoje trokuti kojima je površina 117, a poluopseg 26.



Slika 7.

Očitavanjem koordinata točaka sa zatvorenog dijela krivulje dobijemo duljine stranica a i b . Primjerice, na gornjoj krivulji nalazi se točka $(18.37003\dots, 12.89576\dots)$ pa su stranice jednog našeg trokuta (s točnošću na dvije decimale) $a = 18.37$, $b = 12.90$, $c = 2 \cdot 26 - (18.37\dots + 12.89\dots) \approx 20.73$.

Uočimo da ako krivulja ima bar jednu točku unutar dopuštenog intervala (koji je trokut bez rubova, pa je otvoreno područje), onda će ih imati beskonačno mnogo jer je cijeli jedan dio te krivulje također unutar područja.

U nastavku ćemo pokazati da, uz uvjet $s^2 \geq 3\sqrt{3}P$, postoje točno dva rješenja od (5) koja odgovaraju jednakokračnim trokutima. Uvrštavanjem $a = b$ u (5) dobijemo:

$$\frac{P^2}{s} = (s-a)^2 (2a-s), \text{ uz uvjete } 0 < a < s, a > \frac{s}{2} \quad (7)$$

U (7) je kubna jednadžba za koju ćemo pokazati da, uz uvjet $s^2 \geq 3\sqrt{3}P$, ima tri pozitivna rješenja od kojih dva zadovoljavaju uvjete iz (7). Za to razmotrimo funkciju

$$f(a) = (s-a)^2 (2a-s) - \frac{P^2}{s}.$$

Uvrštavanjem vrijednosti $a = \frac{s}{2}, s, \frac{2s}{3}, 2s$ dobivamo:

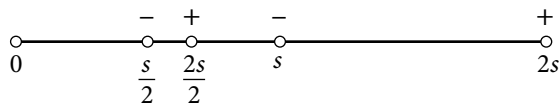
$$f\left(\frac{s}{2}\right) = f(s) = -\frac{P^2}{s} < 0$$

$$f\left(\frac{2s}{3}\right) = \frac{s^3}{27} - \frac{P^2}{s} > 0,$$

jer je $s^2 > 3\sqrt{3}P$, što se može zapisati i kao $s^4 > 27P^2$, tj. $\frac{s^3}{27} > \frac{P^2}{s}$; tu nam je trebala stroga nejednakost u (3).

$$f(2s) = 3s^3 - \frac{P^2}{s} > 0.$$

Kako je f kubna funkcija, a onda i neprekinuta, zaključujemo da između vrijednosti funkcije različitog predznaka postoji barem jedna nultočka.



Slika 8.

Zato funkcija f ima bar jednu nultočku između $\frac{s}{2}$ i $\frac{2s}{3}$, bar jednu nultočku između $\frac{2s}{3}$ i s , te bar jednu nultočku između s i $2s$. S obzirom na to da kubna funkcija može imati najviše tri nultočke, možemo zaključiti da smo pronašli sve nultočke

ove funkcije. Prve dvije zadovoljavaju uvjete ($0 < a < s$, $a > \frac{s}{2}$) i određuju dva jednakokračna trokuta koji imaju zadane P i s .

Rezime

Za zadane P i s mogu nastupiti sljedeće mogućnosti:

1. $s^2 < 3\sqrt{3}P$, tada ne postoji trokut tih veličina.
2. $s^2 = 3\sqrt{3}P$, tada postoji jedinstven trokut tih veličina, i to jednakostraničan.
3. $s^2 > 3\sqrt{3}P$, tada ima beskonačno mnogo trokuta tih veličina od kojih su točno dva jednakokračna (i ni jedan od njih nije jednakostraničan).

Ove relacije napisane u terminima s i P . mogu se zapisati ekvivalentnim relacijama u terminima r i P , kao i u terminima r i S :

Odnos polumjera upisane kružnice trokuta (r) i njegove površine (P)	Egzistencija trokuta sa zadanim veličinama	Odnos poluopsega trokuta (s) i polumjera upisane kružnice trokuta (r)
$P < 3\sqrt{3}r^2$	ne postoji trokut tih veličina	$s < 3\sqrt{3}r$
$P = 3\sqrt{3}r^2$	postoji jedinstven trokut tih veličina i trokut je jednakostraničan	$s = 3\sqrt{3}r$
$P > 3\sqrt{3}r^2$	ima beskonačno mnogo trokuta tih veličina od kojih su točno dva jednakokračna (i ni jedan od njih nije jednakostraničan)	$s > 3\sqrt{3}r$

Dakle, u početnom je zadatku, ako se želi zadržati površina $P = 117$, potrebno uzeti $r \leq \sqrt{\frac{117}{3\sqrt{3}}} = 4.745\dots$ pa bi primjerice $r = 3$ rezultiralo trokutom kojemu je $s = 39$. U slučaju da želimo zadržati polumjer $r = 13$, površina bi trebala biti $P \geq 3\sqrt{3} \cdot 13^2 = 878.149\dots$ pa bi primjerice $P = 910$ rezultiralo trokutom kojemu je $s = 70$.

Trokuti s cjelobrojnim stranicama i površinom

Pri sastavljanju zadatka u srednjoj školi ugodno je da elementi trokuta budu cjelobrojni (ili racionalni), a ovaj primjer pokazuje da se nepažljivim pristupom lako pogriješi. Zato bi bilo dobro poznavati neku metodu za određivanje trokuta s cjelo-

brojnim elementima tako da nastavnik može unaprijed znati da će zadatak imati rješenje. Jednu takvu metodu znao je još indijski matematičar Brahmagupta⁷, a možda su jednostavnije Eulerove⁸ relacije koje generiraju trokute s cjelobrojnim a, b, c, P, r, s . Lako je provjeriti sljedeće:

Ako za relativno proste pozitivne cijele brojeve m, n i relativno proste pozitivne cijele brojeve p, q takve da je $mp > n$ stavimo

$$a = mn(p^2 + q^2), \quad b = pq(m^2 + n^2), \quad c = (mp - nq)(mq + np),$$

postojat će trokut sa stranicama a, b, c

površine $P = mn pq (mp - nq)(mq + np)$, poluopsega $s = mp(mq + np)$ i polumjera upisane kružnice $r = nq(mp - nq)$

(8)

Primjera radi, ako se stavi $p = q = 1$ i $m > n$, dobit će se Pitagorejske trojke odnosno cjelobrojni pravokutni trokuti s hipotenuzom b i katetama a, c . Ako se želi neka jednostavna formula za kreaciju raznostraničnih cjelobrojnih trokuta s cjelobrojnim P, r, s , može se primjerice staviti $p = 2, q = n = 1$, pa se dobije:

$$a = 5m, \quad b = 2(m^2 + 1), \quad c = (2m - 1)(m + 2), \quad P = 2m(2m - 1)(m + 2),$$

$$P = 2m(2m - 1)(m + 2), \quad (9)$$

Vidimo da su za paran m u ovim formulama duljine stranica parni brojevi pa se može gledati cjelobrojni trokut s dva puta kraćim stranicama. Njemu su poluopseg i površina također cjelobrojni, ali r nije, pa se taj trokut ne može dobiti izravno iz Eulerovih relacija.

Trokut iz Eulerovih relacija (8) ne samo da ima cjelobrojne a, b, c, P, r, s , već i racionalne visine (visina na stranicu c uvijek je i cjelobrojna) i polumjer opisane kružnice R . Vrijedi

$$R = \frac{abc}{4P} = \frac{(p^2 + q^2)(m^2 + n^2)}{4},$$

što općenito ne mora biti cijeli broj. To je cijeli broj ako i samo ako su m, n, p, q neparni. Naime, zbroj kvadrata neparnih brojeva djeljiv je s 2, ali nije djeljiv s 4. Kako smo vidjeli, trokuti iz (8) općenito nisu primitivni (tj. a, b, c mogu imati zajednički djelitelj veći od 1). Dijeljenjem sa zajedničkim djeliteljem dobije se trokut s cjelobrojnim a, b, c, P i s , ali ne nužno s cjelobrojnim r .

⁷Brahmagupta – indijski matematičar i astronom koji je živio i djelovao sredinom 1. stoljeća. Poznat je po tome što je prvi uveo nulu u matematiku, zadržavši pravila za računanje s nulom.

⁸Leonhard Euler (1707. – 1783.) – švicarski matematičar, fizičar i astronom. Smatra se jednim od najvećih matematičara svoga doba, a najpoznatiji je po radovima na infinitezimalnom računu.

Ilustrirajmo primjerom izvedenim iz pravokutnog trokuta sa stranicama 3, 4, 5. Od dvaju takvih trokuta može se sastaviti jednakokračan trokut stranica 5, 5, 6, kao i jednakokračni trokut stranica 5, 5, 8. Za oba je $P = 12$, dok je za prvi $s = 8, r = \frac{3}{4}, R = \frac{25}{8}$ za drugi je $s = 9, r = \frac{4}{3}, R = \frac{25}{6}$. Zato se ni jedan od tih trokuta ne može izravno dobiti iz Eulerovih relacija. Ipak, ako stavimo $m = p = 2, n = q = 1$, dobit ćemo $a = b = 10, c = 12$. Skraćivanjem s 2 dobio bi se trokut sa stranicama 5, 5, 6. Slično, stavljajući $m = p = 3, n = q = 1$, dobili bismo $a = b = 30, c = 48$, odakle bi se skraćivanjem sa 6 dobio trokut sa stranicama 5, 5, 8.

Ove formule mogu pomoći nastavniku da osigura egzistenciju trokuta bez potrebe da poznaje relacije koje smo napisali i koje nisu dio srednjoškolskog kurikula. Nastavnik može odrediti sve elemente trokuta, a onda izabrati što će učenicima zadati i što oni trebaju odrediti.

Primjerice, za $m = 5$ u trokutu je $a = 25, b = 52, c = 63, P = 630, r = 9, s = 70$, pa možemo izabrati različite varijante zadatka: recimo $P = 630, r = 9$ i odrediti s ili $r = 9, s = 70$ i odrediti P i sl. Mi ćemo ovdje riješiti sljedeći zadatak:

Zadatak 1: Odredite duljine stranica jednakokračnih trokuta kojima je površina 630, a opseg 140.

Iz prethodnog razmatranja vidimo da postoji trokut $a = 25, b = 52, c = 63$, ima površinu 630 i opseg 140.

Mi možemo koristiti jednadžbu (7), ali i učenici relativno brzo mogu doći do nje.

Evo osnovnih koraka iz učeničkog rješenja:

Učenik koristi ove odnose:

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad s = \frac{a+b+c}{2}.$$

Stavljajući za jednakokračan trokut $a = b$, iz s dobiva $2s = 2a + c \Rightarrow c = 2s - 2a$,

pa je

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-a)(s-(2s-2a))} \Rightarrow P = \sqrt{s(s-a)^2(2a-s)}.$$

Za podatke iz zadatka vrijedi:

$$630 = \sqrt{70(70-a)^2(2a-70)}.$$

Kvadriranjem se dobije jednadžba ekvivalentna jednadžbi (7)

$$70(70-a)^2(2a-70) = 630^2.$$

Za rješavanje ove kubne jednadžbe koristimo džepno računalo (danas većina učenika ima džepno računalo koje može rješavati kubne jednadžbe iz njegovih koe-

ficijenata). Zato transformirajmo jednadžbu:

$$(70-a)^2(a-35)-2835=0 \Rightarrow a^3-175a^2+9800a-174335=0.$$

Džepno računalo daje rješenja:

$$a_1 \approx 37.7, a_2 = \frac{313482}{5298} \approx 59.2, a_3 = \frac{304783}{3902} \approx 78.1.$$

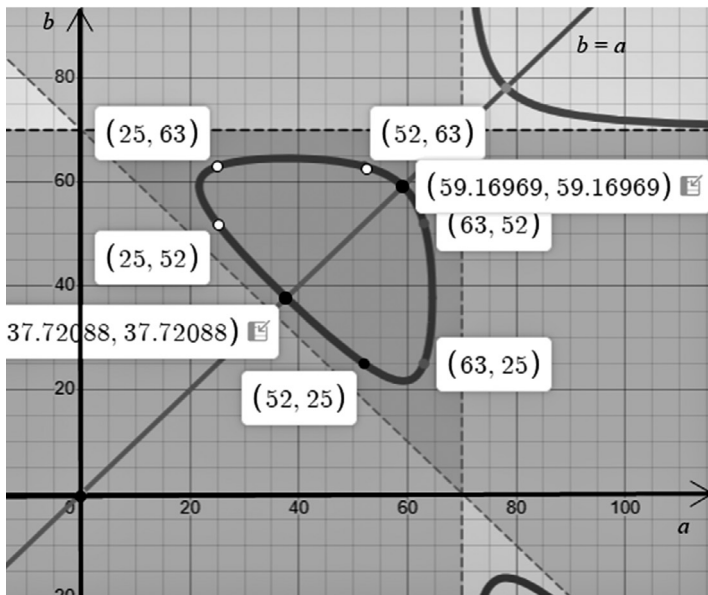
Provjeravanjem uvjeta iz jednadžbe (7) vidimo da su sva tri rješenja realna i pozitivna, i veća od $\frac{s}{2} = 35$, ali najveće ne zadovoljava uvjet $a < s = 70$, pa imamo samo 2 rješenja.

Jedan jednakokrtačan trokut ima stranice približno (na jednu decimalu) jednake 37.7, 37.7, $140 - 2 \cdot 37.720 \dots \approx 64.6$, a drugi 59.2, 59.2, $140 - 2 \cdot 59.169 \dots \approx 21.7$.

Učenik u pravilu ne zna uvjete (7), ali može izbaciti treće rješenje jer

$78.1, 78.1, 140 - 2 \cdot 78.109 \dots \approx -16.2$ dobiva negativnu stranicu, pa vidi da taj trokut ne postoji.

Da smo zadatak rješavali pomoću nekog softvera, koristeći već viđenu metodu u Primjeru 2, dobili bismo isti rezultat.



Slika 9.

Na Slici 9. je prikazano rješenje dobiveno u softveru Desmos kao presjek krivulje $\frac{630^2}{70} = (70-a)(70-b)(a+b-70)$ i pravca $b = a$. Na slici je prikazana točka

$(a, b) = (25, 52)$ i još pet točaka koje sve određuju jedan te isti trokut s cjelobrojnim duljinama stranica od kojega smo krenuli. Taj trokut nastavniku je osigurao egzistenciju trokuta a da ne mora pamtit i uvjete (u ovom slučaju zadani su površina i opseg (O)), pa je uvjet $s^2 > 3\sqrt{3}P$, odnosno zapisano pomoću P i O uvjet je: $O^2 > 12\sqrt{3}P$).

Zaključak

Omaška s „nepostojećim trokutom” na državnoj maturi iz matematike osvijetlila je i jedan važan aspekt unutar geometrije, a to je da formula nije dovoljna za postojanje geometrijskog objekta i da je odgovor „nema takvog objekta” ne samo očekivan, već u nekim situacijama i priželjkivan. Jasno je da je ishod koji se provjeravao ovim zadatkom bio da se provjeri poznaju li učenici odnos među zadanim geometrijskim elementima, znaju li da postoji formula koja ih povezuje i mogu li ispravno izvršiti algebarsku manipulaciju. Mogla bi se povesti diskusija je li u ovom slučaju važno postoji li taj trokut ili ne jer učenici u pravilu ionako ne znaju provjeriti „stoji li” zaista iza danih brojeva trokut, a neki drugi način rješavanja zadatka nije im prikladan. Mislimo ipak da je nastavnik odgovoran osigurati egzistenciju trokuta ukoliko očekuje primjenu formula.

Inače, zadatci toga tipa česti su u zbirkama zadataka i učenik načelno ne zna postoji li trokut s dva od tri spomenuta elementa ako ne zna za nejednakost iz članka (a to nije standard za srednju školu). Jedan od načina da se popravi ova situacija je da se zadatak formulira tako da u njemu eksplicitno piše da postoji trokut. Primjerice: *Postoji trokut kojemu je $r = \dots$, $s = \dots$ (i ove vrijednosti trebaju biti takve da trokut zaista postoji), izračunaj P .* Ovo nije običaj u nastavnoj praksi, iako bi se o tome moglo razmisliti jer, osim što je precizniji, takav bi zadatak učenicima davao poruku da postoje razni uvjeti za egzistenciju trokuta. Iako je algebarski u jednadžbi $P = rs$ moguće zadati bilo koja dva elementa (u ovom slučaju, zbog geometrijske interpretacije, moraju biti pozitivni), čime je treći element jedinstveno određen, vidimo da geometrijski to nije tako. U ovoj formuli samo se jedan element može zadati slobodno, drugi možemo birati uz neki uvjet (mora zadovoljavati nejednadžbu), a treći je tada s ta dva elementa jedinstveno određen.