

Od površine do rekonstrukcije: metodički pristupi učenju određenog integrala

LJERKA JUKIĆ MATIĆ¹, KRISTINA ŠPOLJARIĆ²

1. Uvod

Određeni integral jedan je od središnjih pojmova matematičke analize i važan alat u prirodnim i tehničkim znanostima. Učenici se s ovim konceptom prvi put susreću tijekom srednjoškolskog obrazovanja, najčešće kroz problemske pristupe poput određivanja površine ispod grafa funkcije. Na visokoškolskim studijima prirodnih i tehničkih disciplina određeni integral proučava se detaljnije, s posebnim naglaskom na konkretne primjene, dok se na studijima matematike pristupa formalno, uz naglasak na precizne definicije i dokazivanje temeljnih teorema. Istraživanja pokazuju da učenici i studenti najčešće razviju pretežno geometrijsku interpretaciju određenog integrala kao površine ispod grafa funkcije, što može ograničiti njegovo razumijevanje u kontekstu drugih veličina i primjena, primjerice pri modeliranju energije ili analizi kretanja [6, 9]. U udžbenicima fizike integral se često prikazuje kroz model „zbrajanja dijelova”, koji olakšava intuitivno razumijevanje, ali može dovesti do poteškoća u učenju fizikalnih pojmova poput kinematike, termodinamike i elektrostatike kada nedostaje šira interpretacija integrala [1]. Stoga je cilj ovog rada prikazati četiri osnovne interpretacije određenog integrala i pokazati kako njihova sustavna metodička razrada može značajno doprinosti razvoju fleksibilnijeg i dubljeg razumijevanja tog pojma kod učenika i studenata.

2. Osnovne predodžbe određenog integrala

Pojam osnovnih predodžbi odnosi se na različite načine na koje učenici i studenti mogu shvatiti i primijeniti matematički koncept u konkretnim životnim i stručnim situacijama [3]. Kod određenog integrala osobito je važno razvijati više od pukog formalnog razumijevanja – potrebno je poticati intuitivna i praktična značenja ovog pojma. U nastavnoj praksi pokazalo se da pretežna usmjerenost na geometrijsku in-

¹Ljerka Jukić Matić, Fakultet primijenjene matematike i informatike, Sveučilište u Osijeku

²Kristina Špoljarić, Komercijalna i trgovačka škola Bjelovar

interpretaciju može ograničiti shvaćanje integrala te on postaje „površina ispod grafa”, čime se zanemaruju procesne, konstruktivne i analitičke dimenzije koncepta. Stoga se ističu četiri ključne predodžbe čije sustavno njegovanje doprinosi dubljem i fleksibilnijem razumijevanju [4]:

Površina – integral kao površina ispod grafa funkcije, što je intuitivno, ali nije dovoljna interpretacija, posebice pri negativnim vrijednostima ili funkcijama koje presijecaju os.

Akumulacija – promatranje integrala kao procesa postupnog zbrajanja manjih doprinosa, približavanje stvarnoj veličini kroz sumiranje diskretnih podataka.

Rekonstrukcija – razumijevanje integrala kao metode dobivanja ukupne veličine iz poznate stope promjene, gdje posebnu ulogu ima povezanost s pojmom derivacije.

Srednja vrijednost – promatranje integrala kao alata za određivanje prosječne vrijednosti funkcije na intervalu, što daje dublji uvid u mnoge primjene u prirodnim i tehničkim znanostima.

Svaka od predodžbi donosi specifična didaktička pitanja, tipične studentske pogreške i preporuke za nastavni rad, a njihovo integrirano poučavanje pomaže učenicima i studentima da razviju cjelovitije razumijevanje pojma određenog integrala. U nastavku su pojedinačne interpretacije detaljno opisane i ilustrirane primjerima.

2.1. Predodžba površine

Predodžba određenog integrala kao površine najčešća je i najintuitivnija u nastavi matematike. Prema ovom pristupu, određeni integral funkcije na intervalu $[a, b]$ tumači se kao površina između grafa funkcije i osi x . Takvo shvaćanje omogućuje jednostavno i smisleno razumijevanje pojma integrala, osobito kada se funkcija prikaže grafički, a površina zamišlja kao „popunjavanje prostora” ispod krivulje. Međutim, ova predodžba ima i svoja ograničenja. Česta poteškoća jest poistovjećivanje vrijednosti integrala s površinom, zbog čega se integral pogrešno smatra uvijek pozitivnim. Nerazumijevanje je osobito izraženo kada integral poprima negativne vrijednosti.

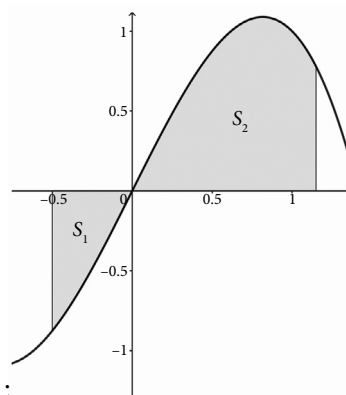
Pri određivanju vrijednosti integrala važno je razlikovati tri osnovna slučaja:

1. Graf iznad osi x – vrijednost integrala jednaka je površini između grafa i osi x , i pozitivna je.
2. Graf ispod osi x – apsolutna vrijednost integrala jednaka je površini, ali je sam integral negativan.
3. Graf presijeca os x – interval je potrebno podijeliti na podintervale između nul-točaka i izračunati integral na svakom podintervalu zasebno. Tek se tada mogu ispravno zbrojiti pozitivni i negativni dijelovi.

Treći slučaj posebno dobro pokazuje ograničenja predodžbe površine jer ukupna vrijednost integrala nije jednaka ukupnoj površini. Stoga ovu predodžbu ne bi trebalo koristiti kao jedinu u nastavi. Ipak, zbog svoje jednostavnosti i intuitivnosti ona je često prva koja se uvodi pri učenju određenog integrala, no važno je postupno razvijati i druge predodžbe kako bi razumijevanje pojma bilo potpunije.

Primjer 1. Slika 1 prikazuje graf funkcije $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sa sljedećim svojstvima

- S_1 je površina omeđena s x -osi, $x = a$ i $y = f(x)$.
- S_2 je površina omeđena s x -osi, $x = b$ i $y = f(x)$.
- $a < b, 0 < S_1 < S_2$



Slika 1.

Zaokruži čemu je jednaka vrijednost izraza

$$\int_a^b f(x)dx :$$

- a) $S_1 + S_2$
- b) $S_1 - S_2$
- c) $S_2 - S_1$
- d) $|S_1 - S_2|$
- e) $\frac{1}{2}(S_1 + S_2)$

Rezultati ovog zadatka iz TIMSS-studije jasno ukazuju na opasnost poistovjećivanja pojma integrala s predodžbom površine [2]. Točno rješenje $S_2 - S_1$ odabralo je tek 35 % ispitanika. Ponudeni odgovori odgovaraju uobičajenim pogrešnim predodžbama učenika i studenata: vrijednost integrala poistovjećuje se s površinom između grafa i x -osi, prva parcijalna površina uvijek se računa kao pozitivna, integral se tumači kao načelno pozitivan ili se srednja vrijednost parcijalnih površina uzima kao ispravno rješenje. Ovaj zadatak pokazuje da shvaćanje integrala kao površine zahtijeva širu i dublju interpretaciju. Naime, iako je površina pozitivan broj, pri ra-

čunanju određenog integrala možemo dobiti negativan broj. Iako poistovjećivanje pojma integrala s pojmom površine u nekim slučajevima dovodi do točnog rezultata, u drugim slučajevima ono vodi do pogrešnih zaključaka.

2.2. Predodžba akumulacije

Predodžba akumulacije temelji se na shvaćanju određenog integrala kao granične vrijednosti sume produkata. Akumulacija, u matematičkom kontekstu, označava proces nakupljanja ili postupnog zbrajanja malih doprinosa tijekom nekog intervala, najčešće preko sve finije podjele tog intervala. To znači da je iznos određenog integrala rezultat zbrajanja velikog broja izrazito malih produkata (npr. vrijednosti funkcije i duljina podintervala), što formalno vodi do Riemannove sume i konačne integracijske vrijednosti. Geometrijski, predodžba akumulacije vizualizira se postupnim „građenjem” površine ispod grafa funkcije pomoću stepenastih pravokutnika, gdje se širina pravokutnika neprestano smanjuje kako bi se približili preciznoj vrijednosti integrala. Za razliku od predodžbe površine, ova predodžba naglasak stavlja na integraciju kao proces.

U metodičkom smislu, predodžba akumulacije učenicima i studentima pomaže razumjeti integral kao dinamički proces prikupljanja ili nakupljanja veličina (primjerice put, energija, masa ili količina), a ne samo kao izračunavanje „broja na kraju računa”. Sume produkata u različitim kontekstima (npr. suma umnoška brzina i vremenskih intervala za prijeđeni put) predstavljaju realne situacije u kojima integracija opisuje promjenu ili akumulaciju kroz vrijeme ili prostor. Ovakvo razumijevanje osigurava povezanost integrala s praktičnim primjenama u fizici, kemiji i ekonomiji te omogućuje studentima shvaćanje povezanosti matematičkog modela i realnih procesa.

Primjer 2. Pretpostavimo da je mjerac prijeđene udaljenosti na automobilu pokvaren i želimo procijeniti prijeđeni put u intervalu od 30 sekundi. Brzinu mjerimo svakih 5 sekundi, a radi lakšeg računanja sve brzine izražavamo u metrima u sekundi (m/s) jer su i vremena dana u sekundama. Dobivene podatke prikazujemo u sljedećoj tablici:

Vrijeme (m)	0	5	10	15	20	25	30
Brzina (m/s)	25	31	35	43	47	45	41

Tijekom prvih pet sekundi brzina se ne mijenja značajno, pa možemo procijeniti prijeđeni put u tom vremenskom intervalu pretpostavljajući da je brzina konstantna. Ako za brzinu tijekom tog intervala uzmemo početnu vrijednost $v_0 = 25 \text{ m/s}$, tada dobivamo približnu udaljenost prijeđenu u prvih pet sekundi:

$$s_0 \approx v_0 \cdot \Delta t = 25 \cdot 5 = 125 \text{ m.}$$

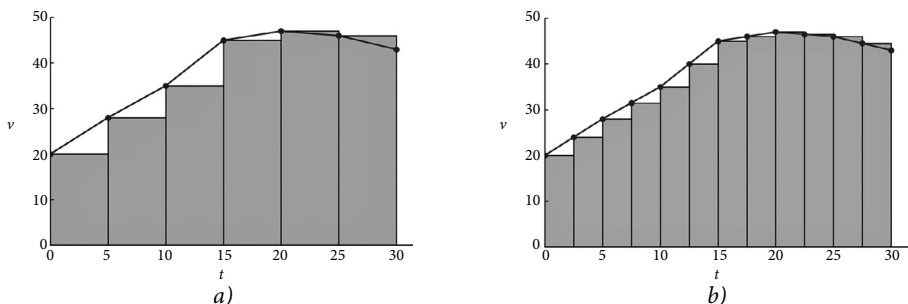
Na sličan način za drugi vremenski interval uzimamo brzinu $v_1 = 31 \text{ m/s}$ i dobivamo:

$$s_1 \approx v_1 \cdot \Delta t = 31 \cdot 5 = 155 \text{ m.}$$

Zbrajanjem svih djelomičnih udaljenosti dobivamo ukupni prijeđeni put:

$$s \approx s_0 + s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5 = 1130 \text{ m.}$$

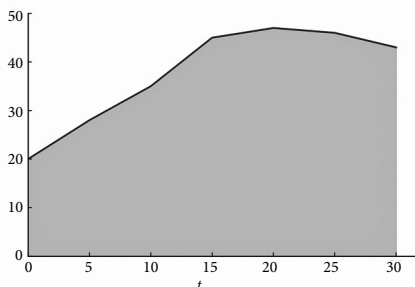
Ovaj postupak možemo vizualizirati grafički: nacrtamo graf funkcije brzine $v(t)$ te iznad svakog podintervala konstruiramo pravokutnik visine v_i (Slika 2. a). Površina svakog pravokutnika predstavlja približnu udaljenost prijeđenu u tom intervalu. Što su podintervali uži, to je ukupna površina pravokutnika bliža stvarnoj površini ispod grafa funkcije brzine (Slika 2. b).



Slika 2. Funkcija brzine

Ako bismo brzinu mjerili češće (svake 2 sekunde, 1 sekundu,...), procjena bi bila točnija. U graničnom slučaju, kada je broj mjerenja beskonačan, dobivamo određeni integral. (Slika 3.) predstavlja točnu vrijednost prijeđenog puta:

$$s = \int_0^{30} v(t)dt$$



Slika 3. Prijeđeni put

Na taj način integral vidimo kao proces postupnog nakupljanja doprinosa, a ne samo kao gotovu brojčanu vrijednost.

2.3. Predodžba rekonstrukcije

Predodžba rekonstrukcije temelji se na shvaćanju određenog integrala kao alata za dobivanje ukupne veličine iz poznate stope (eng. *rate of change*). Primjerice, ukupni volumen udahnutog zraka tijekom određenog vremena može se izračunati

korištenjem brzine protoka: dijeljenjem vremena na vrlo male intervale, množenjem brzine s trajanjem svakog intervala te zbrajanjem svih djelomičnih produkata dobiva se ukupna količina zraka. Ova predodžba jasno naglašava proces nakupljanja malih promjena ili doprinosa kako bi se dobio ukupan rezultat.

Ponekad je primjerenije govoriti o konstrukciji nove veličine nego o rekonstrukciji, osobito ako tražena veličina nije bila poznata unaprijed. Tako je rekonstrukcija ukupne godišnje dobiti iz niza mjesečnih dobitaka tipičan primjer, dok je konstrukcijom moguće smatrati procjenu buduće potrošnje na temelju predviđenih stopa potrošnje. Ključna razlika leži u interpretaciji početne funkcije: promatramo li je kao stopu promjene, integral služi za rekonstrukciju ukupne promjene, a promatramo li je kao trenutnu vrijednost veličine, integral pomaže u konstrukciji nove funkcije koja opisuje sumarni razvoj veličine kroz vrijeme ili prostor.

Ova predodžba ujedno uključuje i ideju (re)konstrukcije primitivne funkcije (antiderivacije) na temelju poznate funkcije: graf primitivne funkcije može se izgraditi iz grafičkog prikaza funkcije derivacije, što izravno povezuje integral s procesom „ponovnog sastavljanja” iz lokalnih promjena u cjelinu. Istraživanja pokazuju kako učenici često nailaze na teškoću takozvane pogreške „graf kao slika”, tj. zamjenjuju graf derivacije s grafom same funkcije, što otežava vizualizaciju odnosa između funkcije i njezine primitivne funkcije [6]. Razumijevanje integrala kao konstrukcije ili rekonstrukcije iznimno je važno jer omogućuje povezivanje različitih aspekata pojma integrala te jasno uspostavlja vezu s pojmom derivacije. Nužno je razumjeti derivaciju kao lokalnu brzinu promjene ili stopu promjene jer upravo na toj relaciji počiva i interpretacija integracije kao rekonstrukcije ukupnog učinka te promjene tijekom određenog intervala.

Primjer 3. U prazni umivaonik pušta se voda brzinom od 10 litara u minuti tijekom 1 minute. Zatim se dovod vode zaustavlja i istovremeno se otvara odvod kroz koji otječe 5 litara u minuti. Nakon dodatnih 1.5 minute odvod se ponovno zatvara. Što se iz brzine dotoka može zaključiti o količini vode u umivaoniku?

Pogledajmo fazu dotoka vode gdje je $0 \leq t \leq 1$. Na početku je $V(0) = 0$. Budući da voda teče konstantnom brzinom od 10 L/min, količina vode linearno raste:

$$V(t) = 10 \cdot t, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Nakon jedne minute imamo

$$V(1) = 10 \cdot 1 = 10 \text{ L.}$$

Pogledajmo sada fazu otjecanja vode ($1 \leq t \leq 2.5$). Na početku ove faze u umivaoniku je 10 L vode. Dotok je zatvoren, a voda otječe brzinom 5 L/min, pa količina vode opada:

$$V(t) = 10 - 5 \cdot (t - 1), \quad 1 < t \leq 2.5.$$

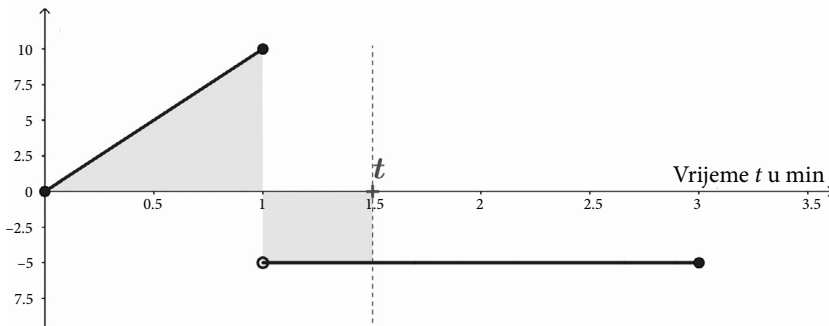
Primjerice

$$V(2) = 5L, \quad V(2.5) = 2.5L.$$

Kada se odvod zatvori ($t > 2.5$) količina ostaje konstantna:

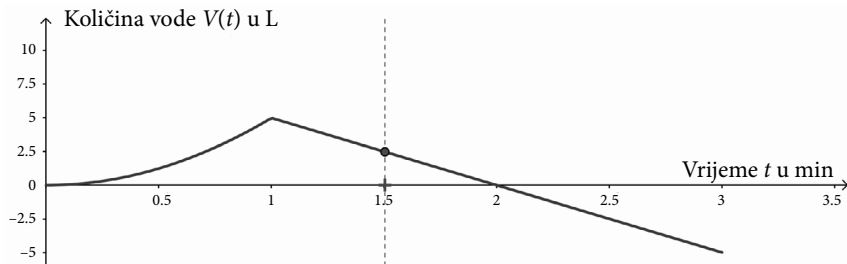
$$V(t) = 2.5, \quad t > 2.5.$$

Na Slici 4. možemo vidjeti graf brzine protoka vode (dotok/otjecanje). Linija prikazuje kako se brzina mijenja tijekom vremena, a sivo obojeno predstavlja površinu koja se računa da bi se dobila količina vode.



Slika 4. Brzina protoka vode

Sljedeća slika (Slika 5.) prikazuje graf količine vode $V(t)$. Graf prikazuje kako se ukupna količina vode mijenja tijekom vremena; prvo raste (dotok), zatim pada (otjecanje).



Slika 5. Količina vode u umivaoniku

Funkcija koja opisuje cijeli proces glasi:

$$V(t) = \begin{cases} 10 \cdot t, & 0 \leq t \leq 1 \\ 10 - 5 \cdot (t - 1), & 1 < t \leq 2.5 \\ 2.5, & t > 2.5 \end{cases}$$

Količina vode $V(t)$ jednaka je orijentiranoj površini ispod grafa brzine protoka: pozitivna površina za dotok i negativna za otjecanje. Integral daje ukupnu promjenu količine vode od početka promatranog intervala do trenutka t .

2.4. Predodžba srednje vrijednosti

Predodžba srednje vrijednosti temelji se na interpretaciji određenog integrala kao alata za određivanje srednje vrijednosti funkcije na nekom intervalu. Matematičku osnovu ovog pristupa čini teorem srednje vrijednosti za određeni integral, koji kaže:

Ako je funkcija f neprekidna na intervalu $[a, b]$, tada postoji barem jedna točka $c \in [a, b]$ takva da vrijedi:

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx .$$

Drugim riječima, vrijednost određenog integrala na zadanom intervalu jednaka je umnošku duljine intervala $[a, b]$ i srednje vrijednosti funkcije na tom intervalu. Stoga srednju vrijednost funkcije f na intervalu $[a, b]$ definiramo kao:

$$f_{sr} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx .$$

Geometrijski, to znači da je „orijentirana površina” ispod grafa funkcije f na intervalu $[a, b]$ jednaka površini pravokutnika širine $b - a$ i visine f_{sr} . Konstrukcija pravokutnika s jednakom površinom kao ispod grafa funkcije ilustrira kako srednja vrijednost „izravnava” sve vrijednosti funkcije na tom intervalu. Za ilustraciju, funkciju možemo zamisliti kao valovitu površinu pijeska u pješčaniku. Predodžba srednje vrijednosti tada odgovara zaglađivanju pijeska tako da nastane ravna površina s jednakom ukupnom količinom pijeska. Analogija s aritmetičkom sredinom pomaže studentima da integral dožive kao prirodno proširenje pojma prosjeka s diskretnih na kontinuirane podatke. Na primjer, prosječna brzina, temperatura ili potrošnja dobiva se upravo ovakvim integralom. Ovaj pristup jasno povezuje zbrajanje manjih doprinosa i njihovo „prosječno” ponašanje na razini cijelog intervala.

U nastavi je preporučljivo koristiti konkretne tablične podatke, grafove i dinamičke vizualizacije kako bi učenici intuitivno povezali integral sa situacijama iz prakse (npr. „Kolika je prosječna brzina vožnje tijekom sata ako je brzina varirala kroz vrijeme?”). Tako se srednja vrijednost integralno povezuje s idejama sume produkata, rekonstrukcije i površine, čime se razvija funkcionalno matematičko razumijevanje integralnog računa.

Primjer 4. Pretpostavimo da smo tijekom 24 sata svaka 3 sata izmjerili temperaturu T_i :

$$\bar{T} = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 T_i$$

ili, pomnoženo s duljinom svakog intervala ($\Delta t = 3$), za Riemannovu sumu:

$$T_{sr,n} = \frac{1}{24} \sum_{i=1}^8 T_i \cdot 3$$

Ako funkcija $T(t)$ opisuje temperaturu u svakom trenutku vremena, srednja vrijednost temperature kroz dan tada je dana kao:

$$T_{sr} = \frac{1}{24} \int_0^{24} T(t) dt$$

Na primjer, za $T(t) = 12 + 6 \sin\left(\frac{\pi t}{12}\right)$:

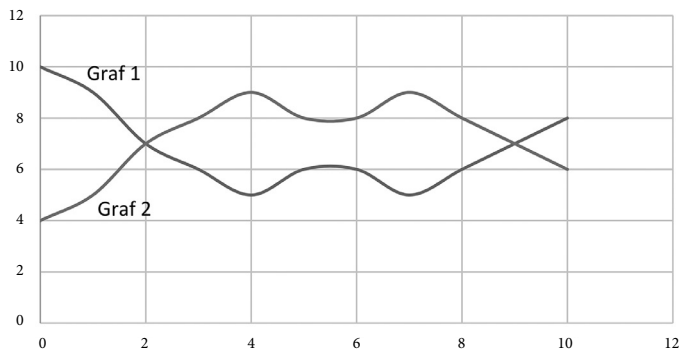
$$T_{sr} = \frac{1}{24} \int_0^{24} \left(12 + 6 \sin\left(\frac{\pi t}{12}\right)\right) dt .$$

Iako je predodžba srednje vrijednosti korisna i često intuitivna, isključivo oslanjanje na ovu interpretaciju ograničava razumijevanje integrala. Potrebno je poticati i druge predodžbe koje naglašavaju proces, površinu ili rekonstrukciju veličina.

3. Zadatci s osnovnim predožbama

U nastavku prikazujemo dva zadatka u kojima možemo aktivirati sve navedene osnovne predožbe. Zadatke smo modificirali iz testa kojim se može ispitati razvijanost osnovnih predožbi o pojmu određenog integrala [5].

Zadatak 1. Graf 1 i Graf 2 prikazuju dotok vode u litrama po minuti u dva identična spremnika. Spremnici su u početnom trenutku bili prazni. Cilj zadatka je objasniti zašto su u trenutku $t = 5$ oba spremnika jednako puna.



Na ovaj zadatak možemo odgovoriti na sljedeće načine:

- Prosječni dotok vode u intervalu $[0,5]$ jednak je za oba spremnika. Ovaj odgovor odgovara predožbi srednje vrijednosti jer se integral tumači kao prosječnu vrijednost funkcije na intervalu.
- Površina između grafa i osi t u intervalu $[0,5]$ jednaka je za oba grafa. Ovo odgovara predožbi površine, gdje se integral povezuje s površinom ispod grafa funkcije.

- Zamislimo dotok kao konstantan u malim intervalima i zbrojimo količine. Za $t = 5$ dobijemo istu vrijednost za oba grafa. Ovo odgovara predodžbi akumulacije jer naglašava proces postupnog zbrajanja doprinosa kroz male intervale.
- Iz svakog grafa možemo odrediti funkciju volumena. Za $t = 5$ obje funkcije imaju istu vrijednost. Na ovaj način koristimo predodžbi rekonstrukcije, gdje se integral promatra kao sredstvo za dobivanje funkcije koja opisuje ukupnu promjenu veličine.

Zadatak možemo zadati tako da ponudimo odgovore i tražimo da studenti daju obrazloženje slažu li se ili ne s tim odgovorom.

Zadatak 2. Tijelo stoji na podu i visoko je 2 m. Presiječemo li ga paralelno s tlom na visini $h \in [0, 2]$, presjek ima površinu $B(h)$. Koje značenje ima izraz

$$\int_0^2 B(h)dh ?$$

- Izraz predstavlja volumen tijela. Ovaj odgovor povezan je s predodžbom rekonstrukcije jer se integral koristi za određivanje ukupne veličine tijela na temelju lokalnih presjeka.
- Izraz predstavlja površinu omeđenu grafom funkcije $B(h)$ i pravcem h . Ovo odgovara predodžbi površine, gdje se integral tumači kao površina ispod grafa funkcije.
- Izraz odgovara srednjem presjeku tijela pomnoženom s visinom. Odgovor koristi srednju vrijednost funkcije za aproksimaciju ukupne količine, pa odgovara predodžbi srednje vrijednosti.
- Izraz je granična vrijednost zbroja volumena tankih slojeva. Ovaj odgovor odgovara predodžbi akumulacije jer se integral interpretira kao suma beskonačno malih volumena diskova ili slojeva.

Ovaj zadatak vrlo jasno povezuje intuiciju i formalni pojam određenog integrala, što omogućuje uvid u različite načine razumijevanja volumena. Ovakvi zadatci pomažu u povezivanju lokalnih svojstava funkcije s globalnim promjenama veličina. Kao i prethodni zadatak, i ovaj možemo zadati tako da ponudimo odgovore i tražimo da studenti daju obrazloženje slažu li se ili ne s tim odgovorom. Tako pokazujemo da istu matematičku situaciju možemo tumačiti na više načina, a zadatak potiče raspravu o značenju matematičkih pojmova.

Literatura:

1. Bajracharya, R. R., Sealey, V. L., & Thompson, J. R. (2023.). Student understanding of the sign of negative definite integrals in mathematics and physics. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 9(1), 62–91. <https://doi.org/10.1007/s40753-022-00202-y>

2. Baumert, J., Lehmann, R., Lehrke, M., Schmitz, B., Clausen, M., Hosenfeld, I., Köller, O., Neubrand, J. (1997.). *TIMSS – Mathematisch-Naturwissenschaftlicher Unterricht im internationalen Vergleich. Deskriptive Befunde*. Opladen: Leske + Budrich.
3. Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H. S., Ulm, V., & Weigand, H. G. (2016.). *Didaktik der Analysis: Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe*. Springer Spektrum.
4. Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V., & Weigand, H.-G. (2021.). Basic mental models of integrals – Theoretical conception, development of a test instrument, and first results. *ZDM – Mathematics Education*, 53(3), 649–66. <https://doi.org/10.1007/s11858-020-01207-0>
5. Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H. S., Ulm, V., & Weigand, H. G. (2022.). *Test zur Erfassung von Grundvorstellungen zu Ableitungen und Integralen (GV-AI)*. Universität Augsburg.
6. Jones, S. R. (2015.). The prevalence of area-under-a-curve and antiderivative conceptions over Riemann-sum-based conceptions in students' explanations of definite integrals. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 46(5), 721–736. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2014.1001454>
7. Roth, J., & Siller, H.-S. (2016.). Bestand und Änderung: Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *mathematik lehren*, 199, 2–9.
8. Sealy, V. (2006.). Student understanding of definite integrals, Riemann sums and area under a curve: What is necessary and sufficient? In S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz, & A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 46). Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional
9. Sealey, V. (2014.). A framework for characterizing student understanding of Riemann sums and definite integrals. *Journal of Mathematical Behavior*, 33, 230–245. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.12.002>
10. Stewart, J. (2007.). *Essential Calculus: Early Transcendentals (6 ed.)*. Belmont, CA: Brooks Cole.
11. Špoljarić, K. (2025.). *Razumijevanje određenog integrala kroz osnovne predodžbe i pojmovne aspekte*. Diplomski rad. Fakultet primijenjene matematike i informatike, Sveučilište u Osijeku.