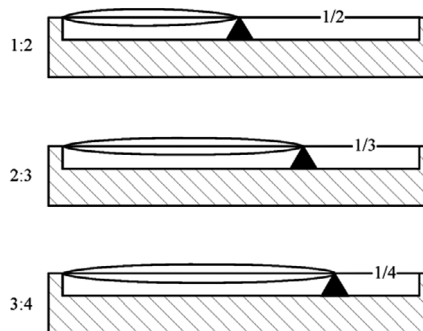


# Pitagorin zakon malih brojeva

ZVONIMIR ŠIKIĆ<sup>1</sup>

## 1. Problem

Pitagorejci su vjerovali da su principi matematike principi svega. Polazna točka ovoga prilično općenitog uvjerenja bila je njihovo otkriće „zakona malih brojeva”, tj. otkriće da je visina tona žice na liri jednostavno povezana s njenom duljinom. Kad se dužina skрати u omjeru 1 : 2, visina tona skoči za oktavu; kada se skрати u omjeru 2 : 3, ona skoči za kvintu; u omjeru 3 : 4 za četvrtinu; u omjeru 4 : 5 za veliku tercu itd. Ukratko, omjeri malih cijelih brojeva izvor su konsonantnosti – što manji brojevi, to veća konsonantnost.



Slika 1.

Skratiti duljinu žice znači povećati njezinu frekvenciju. Dakle, pitagorejci su otkrili da je omjer frekvencija između oktave i temeljnog tona 2 : 1, između kvinte i temeljnog tona 3 : 2, između kvarte i temeljnog tona 4 : 3 itd.

Ohrabreni ovim uspjehom, pitagorejci su pokušali cijeli univerzum opisati pomoću jednostavnih harmonijskih odnosa – od harmoničnih ili neharmoničnih rezonancija u ljudskome tijelu (koje je u koruptivnom *sublunarnom* području) do harmonije sfera (koja je u vječnom i nekoruptivnom *supralunarnom* području). Koristeći nomenklaturu jednog kasnijeg doba, *musica instrumentalis*, tj. obična glazba, postala je *musica humana* i *musica mundana* koje objašnjavaju mnogo više od obične glazbe.

Ono što nas ovdje zanima je sljedeće: ima li naše razlikovanje konsonantnih i disonantnih intervala neki temelj u činjenicama „tamo vani” u stvarnom svijetu ili je pak subjektivno?

<sup>1</sup>Zvonimir Šikić, Zagreb

Čini se da je zakon malih brojeva već dao odgovor na to pitanje. On jasno dokazuje da postoji nešto jedinstveno „tamo vani” što doživljavamo kao konsonantnost „tu unutra”. Ovaj jedinstveni izvor našeg razlikovanja konsonantnih i disonantnih intervala (kao „uhu ugodnih i uhu neugodnih”) harmonijski je niz frekvencija  $1f : 2f : 3f : 4f \dots$ . Taj početni niz cjelobrojnih frekvencija vanjski je uzrok konsonantnosti i razlikuje se od necjelobrojnih nizova koji rezultiraju disonantnošću. U tom su smislu naša razlikovanja konsonantnih i disonantnih intervala objektivna, a ne subjektivna.

Ovo objektivno objašnjenje uobičajeno je mišljenje o toj temi u zapadnoj umjetnosti i znanosti. Možemo ga ilustrirati citatom jednog od najvećih znanstvenika 17. stoljeća:

*Zakoni glazbe nepromjenjivi su, fiksirani prirodom, stoga bi trebali vrijediti ne samo za cijelu Zemlju, već i za stanovnike drugih planeta.* C. Huygens prema (Perlman, 1994.).

Sličan stav ima i jedan od najvećih kompozitora 20. stoljeća:

*Glazba – bila ona folk, pop, ..., tonska, atonalna, ..., prošla, buduća, ... – sva ima zajedničko podrijetlo u univerzalnom fenomenu harmonijskog niza.* (Bernstein, 1976.).

Ali jedan je veliki problem s tim općim mišljenjem. To je postojanje nezapadnih glazbenih tradicija čiji konsonantni intervali nemaju ništa s harmonijskim nizom. Na primjer, gamelan udaraljkaški orkestri, koji spadaju u autohtonu glazbenu tradiciju Jave i Balijske, koriste se 5-tonskom slendro i 7-tonskom pelog ljestvicom, a nijedna nije ni blizu zapadnim harmonijskim ljestvicama. Njihovi konsonantni intervali temelje se na nizovima frekvencija koje nisu cjelobrojne.

Izgleda da ipak ne postoji ništa jedinstveno „tamo vani” po čemu ljudi razlikuju konsonantnost od disonantnosti „tu unutra”. Čini se da su naša razlikovanja ipak subjektivna, a ne objektivna.

Suočeni smo s dva potpuno suprotna zaključka. Prema zakonu malih brojeva Pitagorina intonacija, koja se još zove točnom ili prirodnom i koja se temelji na nizu cjelobrojnih frekvencija, ljudska je univerzalija. No, ako uzmemo u obzir postojanje nezapadnih glazbenih tradicija, čije se ljestvice temelje na mnogo različitih nizova necjelobrojnih frekvencija, ona ipak nije ljudska univerzalija.

## 2. Druga dimenzija problema

Postoji i druga dimenzija problema. Je li naše razlikovanje konsonantnosti i disonantnosti urođeno (kao što smo do sada prešutno pretpostavljali) ili ono ovisi o našim iskustvima? Drugim riječima, jesu li ta razlikovanja urođena ili stečena? (Pod urođenim mislim na proizvod evolucije, a pod stečenim na proizvod kulture.) Prema zakonu malih brojeva čini se da su ona urođena i objektivna. U skladu s činjenicom postojanja različitih glazbenih tradicija, ona bi mogla biti stečena i subjektivna ili možda urođena i subjektivna.

Prije nego nastavim, dopustite da s nekoliko primjera pokažem da se neka druga auditorna razlikovanja mogu složiti u bilo koju od dostupnih kombinacija. Naše razlikovanje glasnog i tihog urođeno je i objektivno, razlikovanje gudačkog i puhačkog instrumenta stečeno je i objektivno, razlikovanje ružne i lijepe glazbe stečeno je i subjektivno, a razlikovanje materinjeg i stranog jezika urođeno je i subjektivno.

Prevladava mišljenje da je razlikovanje konsonantnosti i disonantnosti stečeno i stoga promjenjivo. Oko ovog mišljenja razvilo se mnogo glazbeno-političke gluposti.

*Glazbeni rasistički imperijalizam:* Glazba drugih kultura trebala bi evoluirati prema zapadnim superiornim formama koje se temelje na nepromjenjivim zakonima prirode.

*Glazbeni kulturni imperijalizam:* Glazba drugih kultura trebala bi evoluirati prema našim superiornim formama koje proizvodi naša superiorna kultura.

*Glazbeni kozmopolitizam:* Sve su glazbene tradicije jednako vrijedne i trebale bi utjecati jedna na drugu.

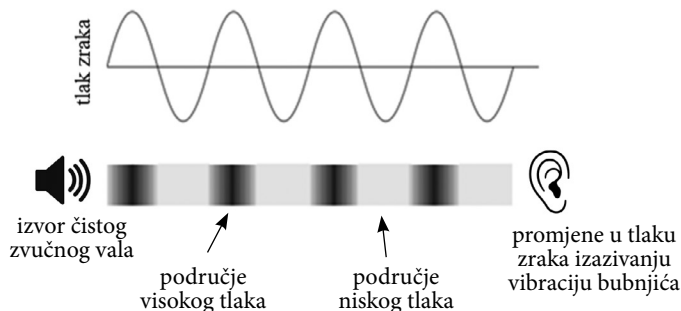
*Glazbeni nacionalizam:* To je naša glazba i ne želimo nikakve utjecaje.

Ukoliko se temelji na pojmu konsonantnosti, to je sve pogrešno jer se temelji na irelevantnim empirijskim podatcima. Osim toga ne uzima u obzir što se dogodilo sa zakonom malih brojeva u posljednjih petsto godina, niti uzima u obzir razumijevanje drugih glazbenih tradicija do kojega smo došli u prošlom stoljeću. Evo i objašnjenja tih „novosti”.

### 3. Galileova teorija

Primijetite da pitagorejci nisu ponudili objašnjenje zakona malih brojeva. Da biste do njega došli, trebate imati bar neke ideje o zvuku.

Ako se usredotočite na perceptivni aspekt, zvuk je osjet koji u organu sluha stimuliraju vibracije zraka s frekvencijama u rasponu od 20 do 20 000 Hz. Vibracije su vibracije tlaka zraka koje su poznatije pod imenom zvučni val. Njegovo je djelovanje objašnjeno na Slici 2.



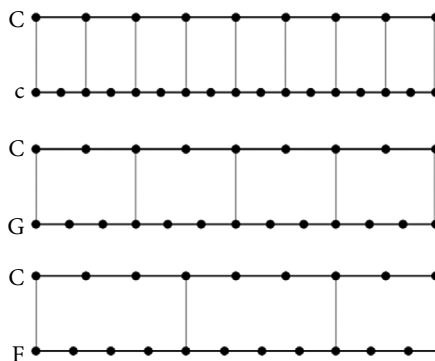
Slika 2.

Vrhovi sinusoide odgovaraju zatamnjenim područjima. Ona predstavljaju područja zgušnjavanja molekula zraka. To su područja višega tlaka. Doline sinusoide predstavljaju smanjenu gustoću zraka. To su područja nižega tlaka. Val potiskuje bubnjić u trenucima povišenog tlaka, a izvlači ga u trenucima sniženog tlaka i tako uzrokuje vibracije bubnjića. Te vibracije percipiramo kao zvuk.

U skladu s ovom općom idejom Galileo je ponudio jedno od prvih objašnjenja zakona malih brojeva (Galilei, 1974.)

*... ugodne konsonancije su parovi tonova koji pogađaju uho s određenom pravilnošću; ta se pravilnost sastoji u tome da su udari koje isporučuju dva tona, u istom vremenskom intervalu, sumjerljiva u broju, kako ne bi bubnjić dovodili u stalnu muku savijanja u dva različita smjera ...*

Gustoća Galileiovih udara određena je periodima odgovarajućih zvučnih valova. Ako ih prikazemo kao na Slici 3., onda broj točaka po jedinici intervala predstavlja odgovarajuću frekvenciju.



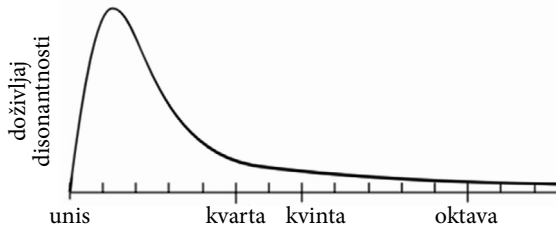
Slika 3.

Gledajući ovaj prikaz mogli bismo reći da je jedna polovica oktave c sadržana u temeljnom tonu C i to objašnjava blisku vezu oktave i njenog temeljnog tona. Slično, jedna trećina kvinte G sadržana je u temeljnom tonu C i to objašnjava malo manju bliskost kvinte i njenog temeljnog tona. Na isti je način u temeljnom tonu C sadržana jedna četvrtina kvarte F, jedna petina velike terce, jedna šestina male terce itd. To objašnjava njihove opadajuće konsonantnosti.

Galileiova teorija jako je lijepa i često citirana, čak i danas, ali postoji jedan veliki problem s tom teorijom. Ona nije istinita.

## 4. Istinita teorija

U važnom eksperimentu iz 1965. Plomp i Levelt istraživali su kako neuvježbani slušatelji prosuđuju disonantnost 70 raznih intervala kada ih ostvaruju parovi tonova koji su čisti sinusni valovi. Dakle, radi se o tonovima s jednom jedinom frekvencijom bez viših harmonika (v. dolje). Rezultat pokusa predstavljen je krivuljom disonance (Slika 4.).



Slika 4.

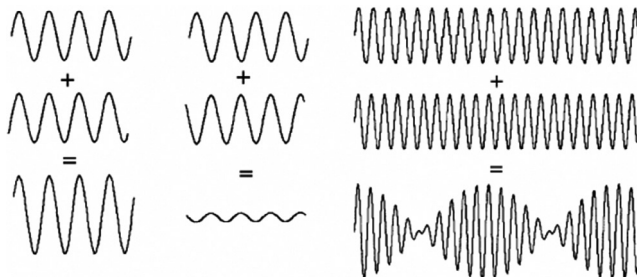
- (1) Disonantnost je nula kad oba sinusna vala imaju istu frekvenciju.
- (2) Disonantnost brzo raste do svog maksimuma negdje oko sekunde.
- (3) Zatim se disonantnost ravnomjerno smanjuje natrag prema nuli.

Primijetite da se za čiste sinusne valove velika septima i mala nona, po doživljenoj disonantnosti, gotovo ne razlikuju od oktave. To je u potpunoj suprotnosti s Galileovom teorijom.

Helmholtz je objasnio što se ovdje događa gotovo stoljeće prije nego što su Plomp i Levelet proveli svoj eksperiment (relevantan eksperiment Helmholtzu nije bio dostupan jer mu nisu bili dostupni čisti sinusni zvučni valovi koje lako generiraju današnja računala). On je svoje objašnjenje temeljio na fenomenu udara.

Fenomen udara nastaje alternacijom konstruktivne i destruktivne interferencije zvučnih valova. Kada dva sinusna vala potpuno iste frekvencije slušamo zajedno, oni zvuče kao jedan val. Ali takva kombinacija može biti glasnija ili tiša od originalnih valova. Kad su valovi u fazi, tj. kada imaju istu početnu točku, njihovi vrhovi i doline točno se poklapaju pa je zbroj veći od pribrojnika. To je konstruktivna interferencija. Kada valovi nisu u fazi, vrhovi jednog vala mogu se poklopiti s dolinama drugog i tada je zbroj valova manji od pojedinačnih valova. To je destruktivna interferencija.

Što se događa ako se dva sinusna vala tek malo razlikuju u frekvenciji? Najlakši način da to zamislimo jest da zamislimo da su to dva vala iste frekvencije kojima se njihova relativna faza polako mijenja. Kada su faze poravnate, one se zbrajaju konstruktivno; kada su pomaknute, zbrajaju se destruktivno. Rezultat su udari.

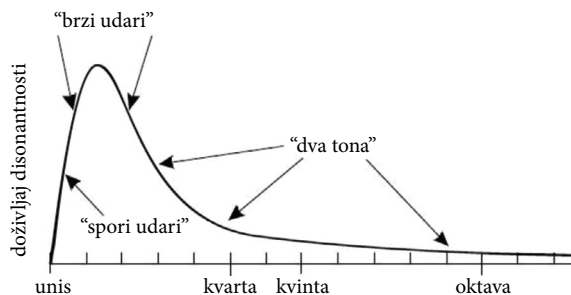


Slika 5.

Sada je lako razumjeti već najavljeno Helmholtzovo objašnjenje:

- (1) Kada su sinusni valovi vrlo bliskih frekvencija, čuju se kao jednostavan ugodan ton sa sporim vibracijama u glasnoći. Fizičko porijeklo ovog ugodnog vibrata je fenomen udara.
- (2) Uz nešto veću razliku u frekvenciji udari postaju brži i to se doživljava kao disonantnost.
- (3) Nakon toga tonovi se odvajaju i percipiraju se pojedinačno kao konsonantan par.

To je ilustrirano na Slici 6.



Slika 6.

To sve možete i čuti:

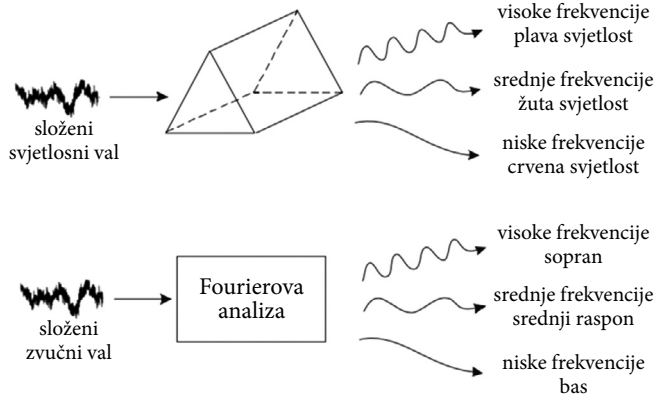
- Na poveznici [matematika.hr/pitagora\\_zvuk/#1](http://matematika.hr/pitagora_zvuk/#1) čut ćete čisti sinusni ton od 220 Hz u trajanju 4 sekunde. Zatim ćete čuti čisti sinusni ton od 221 Hz u trajanju 4 sekunde. Razlikuju se za 8 centa (100 centa je pola tona). I na kraju ćete čuti oba tona zajedno u trajanju 8 sekundi. Jasno se čuju polagani udari.
- Na poveznici [matematika.hr/pitagora\\_zvuk/#2](http://matematika.hr/pitagora_zvuk/#2) čut ćete sinusni ton od 220 Hz u trajanju 4 sekunde. Zatim ćete čuti čisti sinusni ton od 225 Hz u trajanju 4 sekunde. Razlikuju se za cca trećinu tona. I na kraju ćete čuti oba tona zajedno u trajanju 8 sekundi. Jasno se čuju brzi udari.
- Na poveznici [matematika.hr/pitagora\\_zvuk/#3](http://matematika.hr/pitagora_zvuk/#3) čut čisti sinusni ton od 220 Hz u trajanju 4 sekunde. Zatim ćete čuti čisti sinusni ton od 270 Hz u trajanju 4 sekunde. Razlikuju se za cca dva i pol tona. I na kraju ćete čuti oba tona zajedno u trajanju 8 sekundi. Jasno se čuju dva tona bez udara.

## 5. Složeni zvukovi

Mi smo zapravo zainteresirani za složene zvučne valove koje proizvode naši glazbeni instrumenti, a ne za čiste sinusne valove koje proizvode računala. Čisti sinusni valovi važni su samo zato što su od njih sastavljeni složeni valovi.

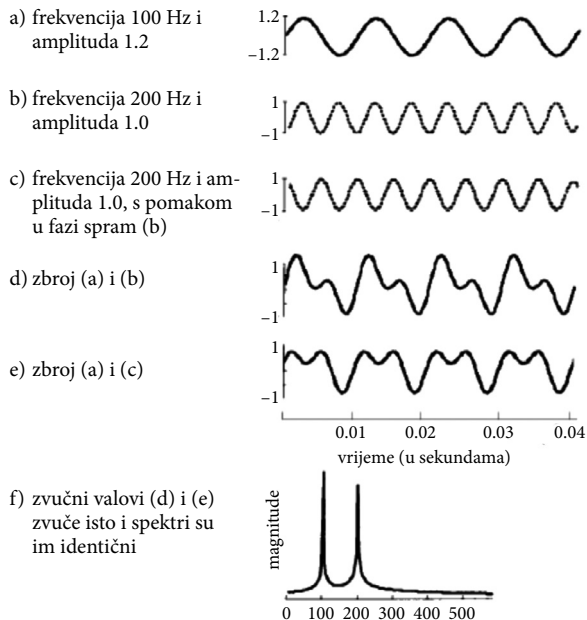
Kao što je složeni svjetlosni val napravljen od duginog spektra čistih valova pojedinačnih boja, tako se i složeni zvučni val sastoji se od čistih sinusnih valova različitih frekvencija.

Svjetlosni val možemo analizirati pomoću prizme, a zvučni pomoću Fourierove analize.



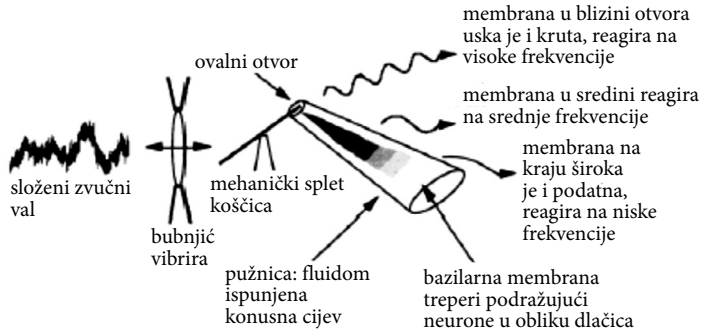
Slika 7.

Fourierova analiza svodi složeni zvučni val na njegov spektar frekvencija. Npr. složeni zvučni valovi (d) i (e), koji su (a) + (b) odnosno (a) + (c), reducirani su na spektar (f) koji otkriva frekvencije izvornih sinusnih valova.



Slika 8.

Naš je auditorni sustav biološki analizator spektra koji radi isto. On pretvara zvučni val u frekvencijski spektar koji ima auditorno značenje. (G. Ohm prvi je predložio ovu ideju 1843.) Ovo je objašnjeno na Slici 9.



Slika 9.

Vibracije se prenose na pužnicu ispunjenu tekućinom, koja je u ilustraciji razvučena. Gibanje tekućine ljulja membranu koja se proteže duž pužnice. Područje najbliže ovalnom otvoru reagira na visoke frekvencije, dok udaljeni kraj reagira na niske frekvencije. Sićušni neuroni koji sjede na membrani šalju poruke prema mozgu kada su zatitrani.

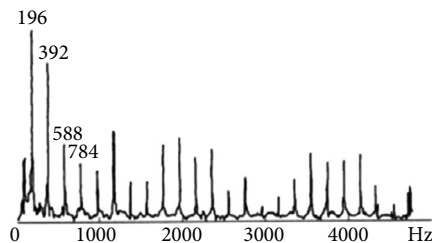
Tako uho prima zvučni val, poput (d) ili (e) na prethodnoj slici, i u mozak šalje reprezentaciju njegova spektra (f). Ova reprezentacija ima auditorno značenje.

## 6. Harmonijski i neharmonijski zvukovi

Kao što smo već rekli, ono što nas stvarno zanima je kako objasniti disonantnost različitih intervala, koje proizvode složeni zvučni valovi. To su zvukovi koje proizvode naši glazbeni instrumenti.

Prije svega treba reći da postoji velika razlika između složenih zvukova koji su harmonijski i onih koji nisu harmonijski. Predstavljamo ove dvije vrste zvuka s dva primjera.

Tipičan primjer harmonijskog zvuka je zvuk gitare. Njegov spektar prikazan je na Slici 10.

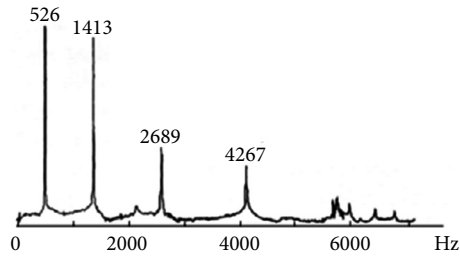


Slika 10.

Primijetite da se spektar sastoji od osnovne frekvencije  $f = 196$  Hz i od njenih cjelobrojnih višekratnika na  $2f = 392$  Hz,  $3f = 588$  Hz,  $4f = 784$  Hz itd. Takav spektar u

kojemu su sve frekvencije tzv. viših harmonika cijeli višekratnici temeljne frekvencije  $f$  naziva se harmonijskim, a odgovarajući zvuk zove se harmonijski zvuk. Budući da se periodi svake više harmonike ponavljaju točno unutar perioda temeljnoga tona, harmonijski su zvučni valovi periodični.

Tipičan primjer neharmonijskog zvuka je zvuk udarca po metalnoj pločici. Njegov spektar prikazan je na Slici 11.

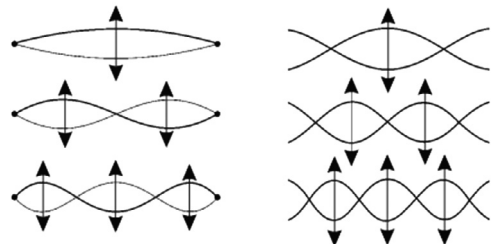


Slika 11.

Primijetite da se spektar sastoji od osnovne frekvencije na  $f = 526$  Hz i frekvencija viših harmonika koje nisu cjelobrojni višekratnici temeljne frekvencije:  $2,68f = 1413$  Hz,  $5,11f = 2689$  Hz i  $8,11f = 4267$  Hz. Takav spektar u kojemu frekvencije nisu cjelobrojni višekratnici temeljne frekvencije  $f$  naziva se neharmonijskim, a odgovarajući zvuk naziva se neharmonijskim zvukom. Budući da se periodi viših harmonika ne ponavljaju točno unutar perioda temeljnoga tona, neharmonijski zvučni valovi nisu periodični.

Žica i metalna pločica samo su dva od mnogih mogućih izvora zvuka. Gudački instrumenti, kao i mnogi drugi, također su harmonijski. Kada zrak oscilira u puhačkom instrumentu, njegovo je gibanje ograničeno na isti način kao što je gibanje žica ograničeno njenim fiksnim krajevima pa su zato i zvukovi puhača harmonijski. Naime, na zatvorenom kraju puhačkog instrumenta tlak zraka mora biti jednak nuli kao i na otvorenom kraju. Nasuprot tome, većina udaraljki kao što su bubnjevi, marimbe, gongovi itd. imaju neharmonijske spektre.

Spektar žice je harmonijski jer je ona fiksirana na oba kraja i može podržati samo one oscilacije koje se točno uklapaju u duljinu žice. Matematički se može dokazati da žica koja vibrira s temeljnom frekvencijom  $f$  može imati više harmonike samo s frekvencijama  $2f$ ,  $3f$  itd. To je vidljivo na Slici 12. (lijevo). Spektar metalne pločice je neharmonijski jer je šipka slobodna na oba kraja. I to se može matematički dokazati, a vidljivo je Slici 12. (desno).



Slika 12.

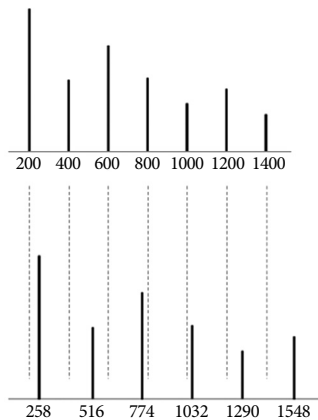
## 7. Teorija za složene zvukove

Vratimo se našem glavnom pitanju. Kako objasniti disonantnost odnosno konsonantnost intervala koje ostvaruju složeni zvučni valovi?

Plomp-Leveltov eksperiment prikupio je podatke samo o percepcijama čistih sinusnih valova. Stoljeće prije toga, kako bi objasnio doživljaj disonantnosti dvaju složenih tonova, Helmholtz je predložio sljedeći postupak:

*Zbrojite sve disonantnosti koje generiraju svi parova viših (čistih sinusnih) harmonika dvaju složenih tonova koje testiramo.*

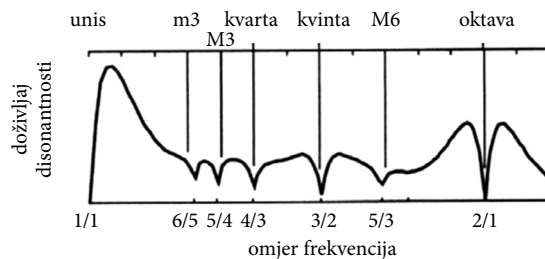
Primijetite da čak i ako ne postoje udari uslijed interferencije temeljnih tonova, mogu postojati udari uslijed interferencije njihovih viših harmonika. Evo jednog primjera (Slika 13.)



Slika 13.

Harmonijski zvuk s temeljnom frekvencijom  $f = 200$  Hz slušamo zajedno s harmonijskim zvukom kojemu je temeljna frekvencija  $g = 258$  Hz. Iako su temeljne frekvencije dovoljno daleko da ne stvaraju udare, neke od viših harmonika dovoljno su blizu da ih stvaraju. To dovodi do određene razine disonantnosti koju računamo tako da zbrojimo sve disonantnosti koje generiraju svi parova viših harmonika.

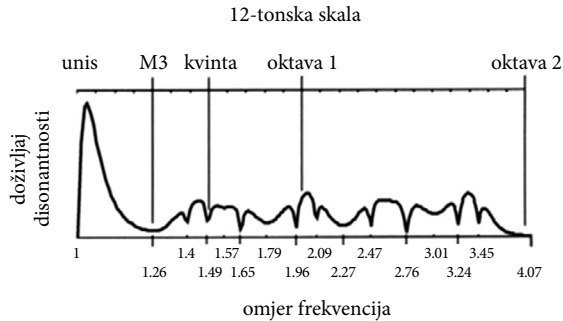
Krivulja disonantnosti koju nalazimo na taj način prikazana je na Slici 14.



Slika 14.

Uočite da se minimumi krivulje disonantnosti podudaraju s intervalima koje opisuje Pitagorin zakon malih brojeva. Matematički se može dokazati da krivulje disonantnosti harmonijskih spektara uvijek imaju ovo svojstvo, i to je konačno objašnjenje Pitagorina zakona malih brojeva za harmonijske zvukove.

Krivulja disonantnosti za neharmonijski spektar metalne pločice s temeljnom frekvencijom vibracije  $f$ , čije više harmonike imaju frekvencije  $2.76f$ ,  $5.41f$ ,  $8.94f$ ,  $13.35f$  i  $18.65f$  prikazana je na Slici 15.



Slika 15.

Primijetite da se minimumi krivulje disonantnosti ne podudaraju ni s jednim od Pitagorinih intervala koje karakterizira zakon malih brojeva (ali se za spektar udaraljki s Jave i Balijsa poklapa s konsonantnim intervalima slendro i pelog skala). Matematički se može dokazati da krivulje disonantnosti neharmonijskih spektara uvijek imaju ovo svojstvo, i to je konačno pobijanje Pitagorina zakona malih brojeva za neharmonijske zvukove.

## 8. Zaključak

Možemo zaključiti da je zakon malih brojeva samo jedan epifenomen koji je empirijski irelevantan za naša objašnjenja, kao što su to i necjelobrojni „zakoni” slendra, peloga i drugih neharmonijskih skala. Pravi izvor naših razlikovanja konsonantnosti i disonantnosti je fenomen udara, kako je pretpostavio Helmholtz, a izravno su potvrdili Plomp i Level svojim eksperimentom. Udari su stvarno nešto jedinstveno „tamo vani“ što doživljavamo kao disonantnost „tu unutra”. U tom smislu naša su razlikovanja objektivna, a ne subjektivna.

Nadalje, uobičajeno je svim glazbenim tradicijama (harmonijskima ili ne) da razlikuju konsonantne i disonantne intervale na ovaj način. Čini se da je to zajedničko svim ljudima, što znači da su naša razlikovanja konsonantnosti i disonantnosti urođena, a ne stečena, i to potvrđuju zapadne harmonijske tradicije kao i nezapadne neharmonijske tradicije.

Da budemo precizniji, možemo reći da je doživljaj konsonantnosti i disonantnosti funkcija **intervala i spektra** zvuka. Muzička skala i spektar povezani su ako krivulja disonantnosti za taj spektar ima minimume u intervalima te skale. Harmonijski spektri zapadnih glazbenih instrumenata povezani su sa zapadnim ljestvicama koje sadrže Pitagorine intervale. Neharmonijski spektri drugih glazbenih tradicija povezani su s njihovim skalama.

I to možete čuti:

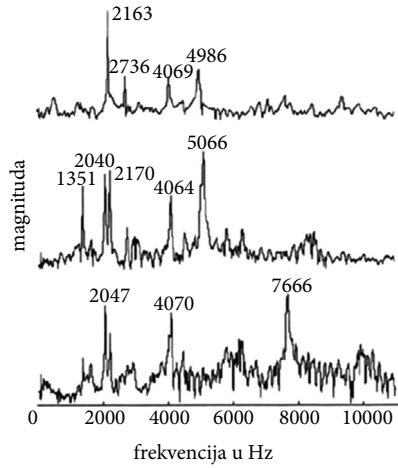
- Na poveznici [matematika.hr/pitagora\\_zvuk/#4](http://matematika.hr/pitagora_zvuk/#4) čut ćete skladbu koja koristi harmonijski zvuk i skalu povezanu s tim zvukom (tj. minimumi krivulje disonantnosti toga zvuka dio su te skale). Naravno, to zvuči dobro.
- Na poveznici [matematika.hr/pitagora\\_zvuk/#5](http://matematika.hr/pitagora_zvuk/#5) čut ćete istu skladbu koja koristi harmonijski zvuk i skalu koja je „rastegnuta” tako da je oktava 2.1 a ne 2 (i analogno su „rastegnuti” svi ostali intervali). Ta skala, naravno, nije povezana s tim zvukom (tj. minimumi krivulje disonantnosti toga zvuka nisu dio te skale) i to ne zvuči dobro.
- Na poveznici [matematika.hr/pitagora\\_zvuk/#6](http://matematika.hr/pitagora_zvuk/#6) čut ćete istu skladbu koja koristi „rastegnutu” skalu i neharmonijski zvuk koji je usklađen s tom skalom (tj. minimumi krivulje disonantnosti toga zvuka dio su te skale). Ta „rastegnuta” skala povezana je s tim neharmonijskim zvukom i to zvuči dobro (iako malo neobično).
- Na kraju ćete na poveznici [matematika.hr/pitagora\\_zvuk/#7](http://matematika.hr/pitagora_zvuk/#7) čuti istu skladbu koja koristi neharmonijski zvuk (usklađen s „rastegnutom” skalom) i standardnu nerastegnutu skalu. Ta skala, naravno, nije povezana s tim zvukom (tj. minimumi krivulje disonantnosti toga zvuka nisu dio te skale) i to ne zvuči dobro.

I ovo nije cijela priča. Neki suvremeni glazbenici skladaju za vrlo neobične zvukove. U skladu s prethodnim objašnjenjima, njihov je postupak sljedeći:

- (1) Odaberu zvuk.
- (2) Pronađu spektar toga zvuka.
- (3) Pojednostave taj spektar.
- (4) Izračunaju njegovu krivulju disonantnosti.
- (5) Konstruiraju odgovarajuću skalu koja sadrži minimume te krivulje.
- (6) Sintetiziraju instrumente koji proizvode tonove te skale.
- (7) Skladaju u toj skali i sviraju na tim instrumentima.

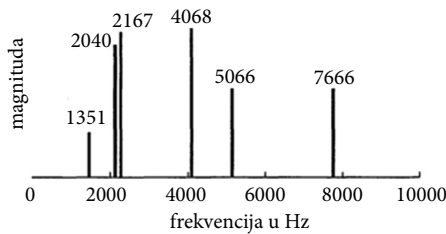
Takva je skladba W. Setharesa *Chacko canyon rock*.

- (1) Odabrani zvuk je zvuk drobljenja kamena pod gojzericom u kanjonu iz naslova.
- (2) Spektar toga zvuka izgleda ovako:



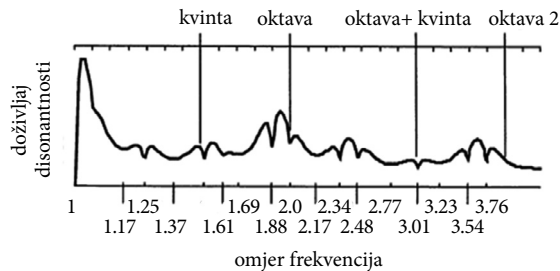
Slika 16.

(3) Pojednostavljeni spektar izgleda ovako:



Slika 17.

(4) Njegova krivulja disonantnosti prikazana je na Slici 18.:



Slika 18.

(5) Odgovarajuća skala prikazana je na Slici 19. (siva polja predstavljaju crne tipke na standardnoj klavijaturi):

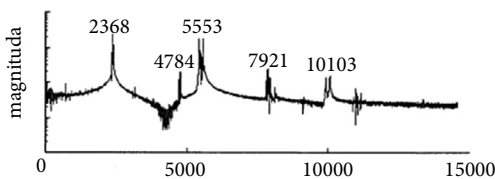
interval	centi
1.0	0
1.063	105
1.17	272
1.24	372
1.25	386
1.37	545
1.385	564
1.507	710
1.612	827
1.69	908
1.77	988
1.88	1093
2/1	1200

Slika 19.

(6)&(7) Nakon sintetiziranja odgovarajućih instrumenata Seathers je skladao kompoziciju koju možete poslušati na poveznici [matematika.hr/pitagora\\_zvuk/#8](http://matematika.hr/pitagora_zvuk/#8)

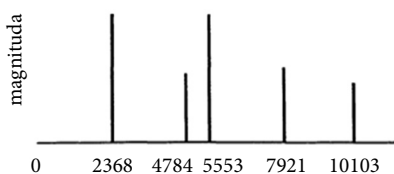
Još jedna Seathersova skladba za zvuk malih zvona je *Tingshaw*. Postupak je bio sljedeći:

(2)



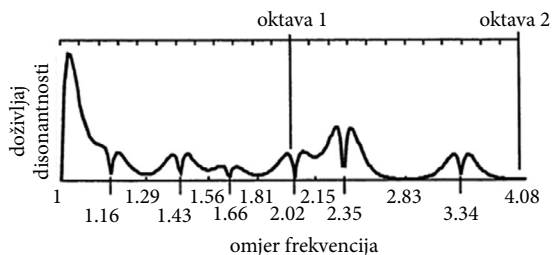
Slika 20.

(3)



Slika 21.

(4)



Slika 22.

(5)

omjer	centi
1.0	0
1.16	257
1.29	441
1.43	619
1.56	770
1.66	877
1.81	1027
2.02	1200

Slika 23.

Skladba za zvuk malih zvona može se poslušati na poveznici [matematika.hr/pitgora\\_zvuk/#9](http://matematika.hr/pitgora_zvuk/#9).

Napravili smo puni krug. Od glazbe, preko prvih empirijskih zakona, do njihova matematičkog razumijevanja i fizičkih potvrda, i konačno natrag do glazbe.

### Literatura:

1. Bernstein, L., 1976., *The Unanswered Question*, Harvard University Press. Galilei, G., 1974, *Two New Sciences*, transl. by S. Drake, University of Wisconsin Press
2. Perlman, M., 1994., American gamelan in the garden of eden: intonation in a cross cultural encounter, *Musical Quarterly* **78**: 510-555.
3. Sethares, W. A., 1997., *Tuning, Timbre, Spectrum, Scale*, Springer.
4. Šikić, Z., Mathematics, physics and music – A case study, *Role of Mathematics in Physical Sciences: Interdisciplinary and Philosophical Aspects*, eds. G. Boniolo, P. Budinich, M. Trobok, 179–196, Springer Science 2005.