

Delaunayova (Deloneova) triangulacija¹

RENI BANOV²

Brojni su primjeri primjene numeričkih simulacija u različitim područjima koji zahtijevaju rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednadžbi (skraćeno PDJ) za opisivanje prirodnih procesa. Rezultati dobiveni numeričkim metodama obično se koriste za simulaciju procesa i za eksperimentalnu provjeru valjanosti na jednostavnijim modelima, dok se točnost numeričkih izračuna postupno povećava na složenijim modelima. Modeli kojima se opisuju prirodni procesi u brojnim slučajevima sadrže složene geometrijske oblike (likove, tijela) i komplicirane veze među njima, te su određeni različitim parametrima, primjerice vrstom materijala, svojstvima fluida, te brojnim drugim karakteristikama. Sve to dovodi do zahtjevnih simulacijskih modela opisanih parcijalnim diferencijalnim jednadžbama na geometrijski složenim područjima, najčešće u dvije ili tri prostorne dimenzije, a za neke primjene i dodatnoj vremenskoj dimenziji. Primjerice, u inženjerskoj primjeni nerijetko susrećemo složene geometrijske oblike na kojima se simulira provođenje topline, raspodjela topline ili električkog naboja, te strukturnih opterećenja na konstrukcijama itd.

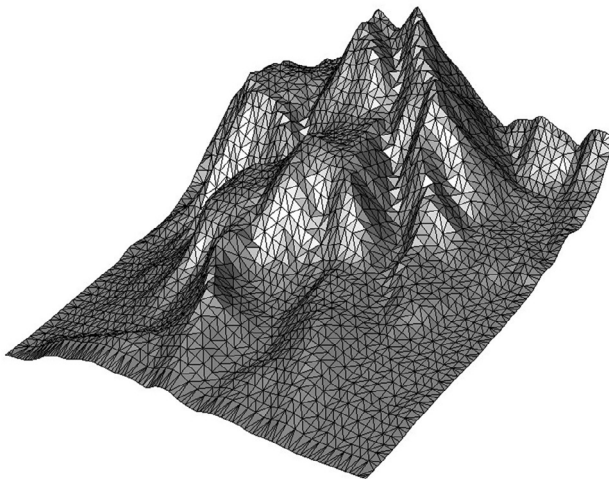
Pedesetih i šezdesetih godina [1] prošlog stoljeća intenzivira se primjena metode konačnih elemenata za numeričko rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednadžbi nad kompleksnim geometrijskim oblicima (strukturama) na inženjerskim problemima. Ideja se zasniva na predstavljanju složenih geometrijskih struktura mrežom jednostavnijih geometrijskih elemenata te numeričkim rješavanjem PDJ jednadžbe na njima. Najčešći jednostavni geometrijski oblici koji su se primjenjivali za izradu obično nestrukturirane mreže u ravnini (2D) bili su trokuti, dok su u prostoru (3D) korišteni tetraedri, iako su mogući odabiri i drugih oblika. Izborom tih jednostavnih elemenata pojavila se potreba za razvojem algoritama za određivanje mreže koja precizno (ili što preciznije) predstavlja stvarne oblike nad kojima se provodi simulacija. Razvojem računala i povećanjem njihove procesne moći metoda konačnih elemenata i metode za određivanje mreže počele su se intenzivnije koristiti u inženjerstvu i matematici u alatima za simulacije kod računalno potpomognutog inženjerstva (eng. *Computer Aided Engineering*, CAE).

¹triangulacija. (srednjovj. lat. triangulatio, od lat. triangulum: trokut), određivanje položaja točaka u trigonometrijskoj mreži trokuta. Hrvatska enciklopedija, mrežno izdanje. Leksikografski zavod Miroslav Krleža, 2013. – 2025. <https://enciklopedija.hr/clanak/triangulacija> (4. 6. 2025.)

²Reni Banov, Tehničko veleučilište u Zagrebu

Uvod

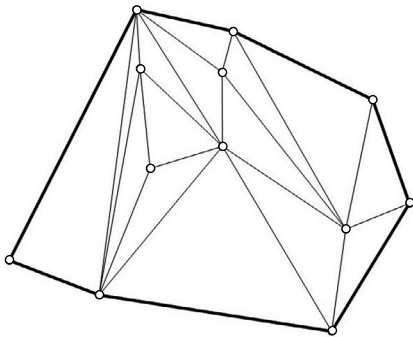
Metoda konačnih elemenata prvotno je korištena za numeričko rješavanje eliptičkih i paraboličkih parcijalnih diferencijalnih jednačnji, a razlog tomu bila je fleksibilnost varijacijske formulacije problema početnog ili rubnog uvjeta prema zadanim geometrijskim oblicima za dotični tip parcijalnih diferencijalnih jednačnji. Nešto kasnije, nakon razvoja teorije u radovima brojnih matematičara, metoda je široko prihvaćena u inženjerstvu za rješavanje i drugih tipova parcijalnih diferencijalnih jednačnji. Standardna metoda konačnih elemenata može se primijeniti na složenim geometrijskim strukturama neovisno o tomu je li struktura pripremljena u računalnom dizajnerskom alatu (eng. *Computer Aided Design*, CAD) ili je dobivena na neki drugi način, primjerice skeniranjem slike objekta. Važan korak za primjenu metode konačnih elemenata predstavlja određivanje mreže jednostavnih geometrijskih elemenata (trokut, kvadrat, tetraedar, ...) kojom se aproksimira područje određeno složenom geometrijskom strukturom. Primjerice, na Slici 1. vidimo složenu geometrijsku strukturu (skenirani oblik brdovitog terena) nad kojom je generirana mreža jednostavnih geometrijskih elemenata u obliku trokuta različitih dimenzija. Na slici uočavamo područja različitih oblika koja su opisana (prekrivena) varijabilnim brojem trokuta, to jest, uočavamo područja približno istih fizičkih dimenzija koja su opisana s različitim brojem trokuta. Raspored te broj generiranih trokuta posljedica su primijenjenog algoritma za izradu mreže, u ovom slučaju primijenjena je Delaunayova metoda. Generiranje mreže za geometrijske oblike u ravnini (2D) učestala je problematika za čije su rješavanje razvijene brojne metode izrade mreže prilagođene problemu koji se rješava. Spomenimo, primjerice, popularne metode zasnovane na Delaunayovoj triangulaciji i Voronoijevim dijagramima [3]. U ovom članku opisat ćemo metodu Delaunayove triangulacije nad skupovima točaka i likova iz dvodimenzijanskog prostora (ravnine).



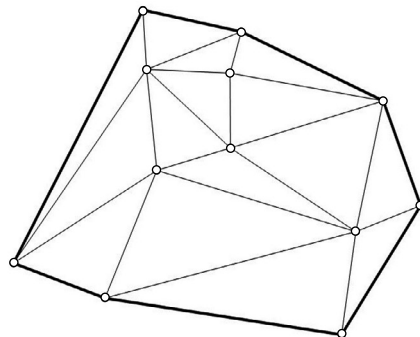
Slika 1. Mreža trokuta za opis reljefa (Izvor: [2])

Delaunayov kriterij

Postoji niz različitih načina za formiranje mreže trokuta nad skupom točaka iz ravnine, međutim, u postupku Delaunayove triangulacije izabrane trokute karakterizira jednostavno svojstvo koje nazivamo **Delaunayov kriterij**. Delaunayov kriterij uvjet je kojim se zahtijeva da opisana kružnica (eng. *circumcircle*) svakog trokuta ne sadrži nijednu drugu točku iz skupa osim tri koje određuju taj trokut. Ponekad se Delaunayov kriterij definira i kao svojstvo odabranih trokuta iz triangulacije kojima je maksimaliziran najmanji unutarnji kut kod svih trokuta. Ilustracija vizualne razlike u obliku i rasporedu odabranih trokuta nad istim skupom točaka, između proizvoljne mreže i mreže trokuta koja ispunjava Delaunayov kriterij, prikazana je na sljedećim dvjema slikama.



Slika 2. Proizvoljna mreža trokuta



Slika 3. Delaunayova mreža trokuta

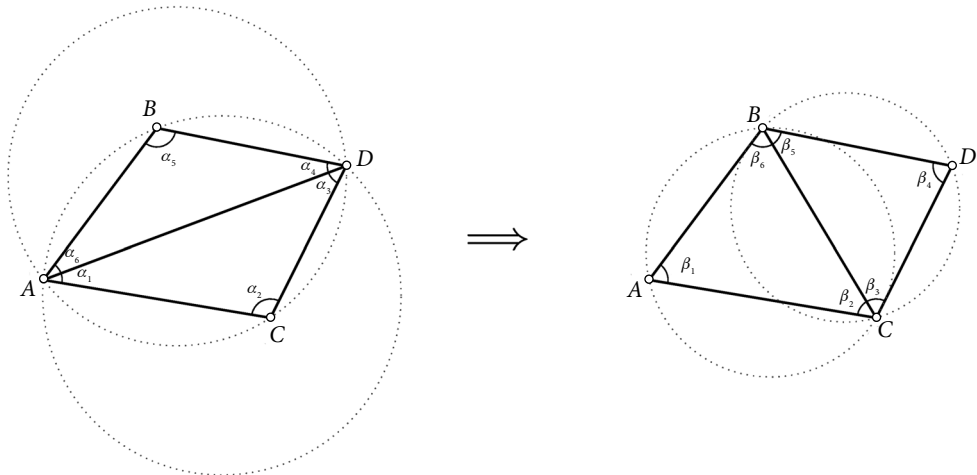
Uočavamo kako se trokuti na Slici 2. međusobno znatno razlikuju oblikom i dimenzijom, dok su takve razlike između trokuta na Slici 3. vidno manje pa triangulacija na toj slici izgleda „prirodnije.” Boris Delaunay (1890. – 1980.) pokazao je u svom radu [4] iz 1934. godine da triangulacija koja ispunjava taj kriterij, osim maksimalizacije najmanjeg kuta u trokutima, također ispunjava i kriterij minimalne najveće opisane kružnice za trokute, te minimizira kružnicu koja sadrži zadani skup točaka. Napomenimo kako je takva triangulacija po zadanim kriterijima lokalno optimalna samo u ravnini, drugim riječima, Delaunayova triangulacija skupa točaka u prostoru (3D) nije lokalno optimalna za maksimalizaciju minimalnog kuta u tetraedrima, ali je lokalno optimalna za određivanje minimalne sfere koja sadrži zadani skup točaka u prostoru i posljedično minimalizaciju najveće opisane sfere generiranih tetraedara.

U inicijalnoj implementaciji [5] Delaunayov kriterij polazna je točka za definiranje algoritma zamjene zajedničke stranice (*Flip* algoritam) kojom se određuje mreža trokuta u triangulaciji. Naime, pomoću toga kriterija određuje se koje točke iz skupa čine vrhove trokuta „bliskih” istostraničnima, to jest koji parovi točaka čine bridove trokuta tako da se očuva ujednačenost duljine stranice u trokutima. Ovakvi trokuti koji su bliski istostraničnima imaju brojne prednosti spram „šiljastih” (tankih) trokuta jer se s njima obično postiže ujednačeniji („prirodniji”) opis geometrijskog oblika

određenog skupom točaka. Novije implementacije (vidjeti [6,7,10]) koriste naprednije metode zasnovane na kriterijima ekvivalentnim Delaunayovom, ali sa smanjenim brojem potrebnih operacija za generiranje Delaunayove triangulacije.

Flip algoritam

Flip algoritam jedan je od jednostavnijih način određivanja Delaunayove triangulacije za skup točaka u ravnini, a sam algoritam zasniva se na iterativnoj provjeri i primjeni Delaunayova kriterija nad zajedničkim stranicama formiranih trokuta. Osim toga, *Flip* algoritam koristi se pri dokazivanju kako za svaki konačan skup točaka u ravnini postoji Delaunayova triangulacija, kao i da je ona optimalna prema kriterijima maksimalizacije minimalnog kuta u trokutima, te za minimalizaciju opisane kružnice najvećeg trokuta i minimalizaciju kružnice koja sadrži cijeli skup točaka. Ideju algoritma možemo ilustrirati na jednostavnom primjeru primjene Delaunayova kriterija za određivanje triangulacije za četiri točke u ravnini sa Slike 4.



Slika 4. Zamjena brida za očuvanje Delaunayova kriterija

Pretpostavimo da je formiran trokut ADB iz skupa točaka $\{A, B, C, D\}$ (ili trokut ACD iz istog skupa točaka). Dodavanjem točke C (ili točke B za trokut ACD) formirat ćemo dva trokuta ADB i ACD koji dijele zajedničku \overline{AD} stranicu, kako je prikazano na lijevoj strani Slike 4. Uočimo kako opisana kružnica oko bilo kojega od ta dva trokuta uvijek sadrži četvrtu točku te prema tome takva triangulacija ne ispunjava Delaunayov kriterij na skupu točaka $\{A, B, C, D\}$. Međutim, ukoliko za taj skup točaka zamijenimo zajedničku stranicu \overline{AD} s bridom (stranicom) \overline{BC} , dobit ćemo triangulaciju koja se sastoji od dva trokuta ACB i CDB za koje će Delaunayov kriterij ponovno biti ispunjen kako je prikazano na desnoj strani iste slike. Jednostavno se može pokazati (zadatak iz geometrije za matematičke gimnazije) kako nakon prethodne zamjene zajedničke stranice kod triangulacije za skup točaka $\{A, B, C, D\}$ vrijedi nejednakost

$$\min_{1 \leq i \leq 6} \alpha_i < \min_{1 \leq i \leq 6} \beta_i$$

za kutove u trokutima, tj. lokalno je ispunjen uvjet maksimalizacije minimalnog kuta.

Uočimo kako unija dvaju trokuta za $\{A, B, C, D\}$ skup točaka predstavlja četverokut te da su obje zajedničke stranice \overline{AD} i \overline{BC} zapravo dijagonale konveksnog četverokuta. Moguće je pokazati ([6]) da je zamjena zajedničkih stranica izvediva samo ako se te dvije stranice sijeku, tj. samo ako se radi o dijagonalama konveksnog četverokuta. Postavlja se pitanje što ako nije moguća zamjena dviju stranica, međutim, u tom slučaju (kako je dokazano u [6]) znamo da se radi o stranici koja lokalno ispunjava Delaunayov kriterij. Isto se tako možemo zapitati dobivamo li nakon konačnog broja zamjena zajedničkih stranica *Flip* algoritmom kao rezultat Delaunayovu triangulaciju skupa točaka. Ponovno se pokazuje (teorem iz [6]) kako nakon najviše $\frac{n(n-1)}{2}$ zamjena (n je broj točaka iz skupa) dobivamo Delaunayovu triangulaciju za

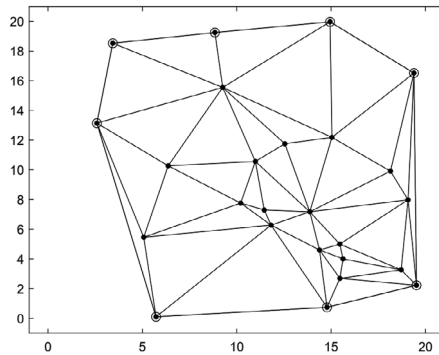
bilo koji izbor početne triangulacije. Drugim riječima, možemo napraviti proizvoljnu triangulaciju skupa točaka u ravnini te primijeniti *Flip* algoritam na zajedničkim stranicama za dobivanje Delaunayove triangulacije. Prema tom teoremu možemo zaključiti kako za svaki konačan skup točaka iz ravnine postoji Delaunayova triangulacija, čime je opravdana primjena *Flip* algoritma za generiranje Delaunayove triangulacije u računalom potpomognutom inženjerstvu. Napomenimo kako *Flip* algoritam nije jedini način dobivanja Delaunayove triangulacije za skup točaka u ravnini, a primjere drugih efikasnijih algoritama (reda $O(n \ln(n))$) možemo naći u literaturi [7].

Dva primjera Delaunayove triangulacije

Za ilustraciju određivanja triangulacije u ravnini primijenimo *Flip* algoritam za nalaženje Delaunayove triangulacije jednostavnih konveksnih i nekonveksnih geometrijskih likova. Primjerice, jednostavan konveksan lik u ravnini možemo dobiti određivanjem poligona koji obuhvaća zadani skup točaka u ravnini. Znamo kako je poligon zatvorena izlomljena linija zadana s najmanje tri dužine $p \geq 3$ koje se ne sijeku u nijednoj točki osim u zajedničkim vrhovima T_p , tj. poligon je područje omeđeno dužinama

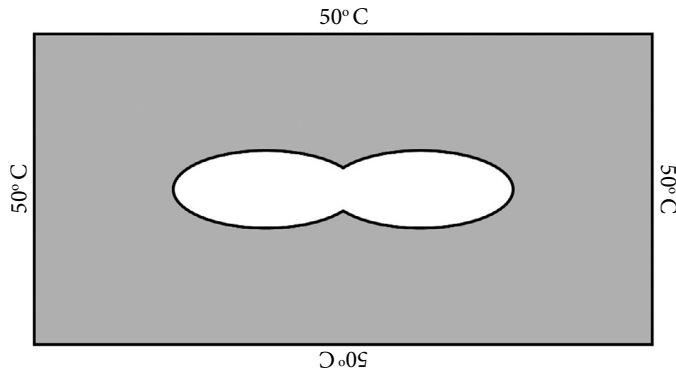
$$\overline{T_1 T_2}, \overline{T_2 T_3}, \dots, \overline{T_p T_1}.$$

Stoga poligon koji obuhvaća proizvoljan konačan skup točaka u ravnini možemo dobiti izborom onih točaka iz skupa koje formiraju zatvorenu izlomljenu liniju tako da su sve ostale točke (koje nisu izabrane) unutrašnje točke poligona. Na sljedećoj slici prikazan je upravo takav poligon koji obuhvaća skup slučajno generiranih točaka iz ravnine te njegova Delaunayova triangulacija određena *Flip* algoritmom, a kružićem na slici označene su izabrane točke koje određuju poligon.



Slika 5. Delaunayova triangulacija skupa slučajnih točaka

Za primjer primjene Delaunayove triangulacije u računalom potpomognutom inženjerstvu, promotrimo problem provođenja topline u stacionarnom stanju za tanku metalnu ploču pravokutnog oblika (širine 4 i dubine 2) sa Slike 6. koja je rubovima spojena na izvor konstantne temperature (50 °C). Inicijalna temperatura ploče iznosi 0° Celzijusa, a ploča se nalazi u velikoj prostoriji na temperaturi zraka od 25 °C, zbog čega dolazi do prijenosa topline između ploče i zraka u toj prostoriji.



Slika 6. Geometrijski oblik metalne ploče

Matematički model koji opisuje brzinu promjene temperature ploče za tako zadane uvjete opisujemo jednadžbom provođenja topline (vidjeti [8,9])

$$-k\Delta T = q,$$

gdje je q gustoća toplinskog toka, a k je koeficijent toplinske vodljivosti materijala (kondukcije³). Kako se ploča nalazi u prostoriji i spojena je na konstantan izvor to-

³kondukcija (vođenje), prijenos topline koji se ostvaruje između dva tijela ili između dijelova tijela na različitim temperaturama međusobnim djelovanjem susjednih molekula različitim brzinama titranja oko ravnotežnog položaja. Hrvatska enciklopedija, mrežno izdanje. Leksikografski zavod Miroslav Krleža, 2013. – 2025. <https://enciklopedija.hr/clanak/vodjenje> (4. 6. 2025.)

plina, gustoća toplinskog toka bit će određena temperaturom konstantnog izvora topline Q ($= 50 \text{ }^\circ\text{C}$) te razlikom temperature okoline T_v ($= 25 \text{ }^\circ\text{C}$) i temperature tijela T

$$q = h \cdot (T_v - T),$$

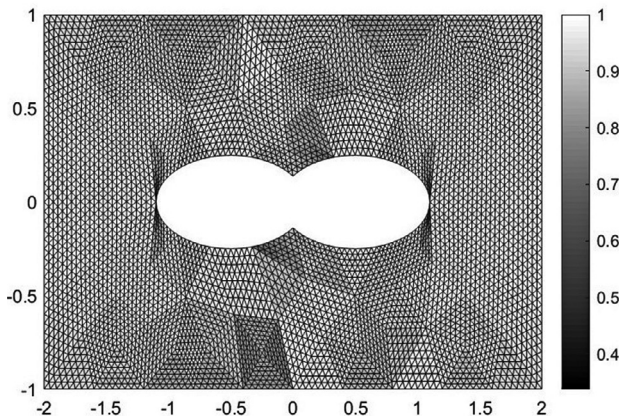
gdje je h je koeficijent konvekcije⁴, tj. prijenosa topline u tekućinama i plinovima. Budući da je ploča tanka (zanemarive debljine), problem možemo promatrati u dvije dimenzije, te se jednačba provođenja topline svodi na eliptičku parcijalnu diferencijalnu jednačbu sljedećeg oblika

$$-k \cdot \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) = h(T_v - T(x, y))$$

$$T(x, -1) = T(x, 1) = 50, \quad -2 \leq x \leq 2$$

$$T(-2, y) = T(2, y) = 50, \quad -1 \leq y \leq 1,$$

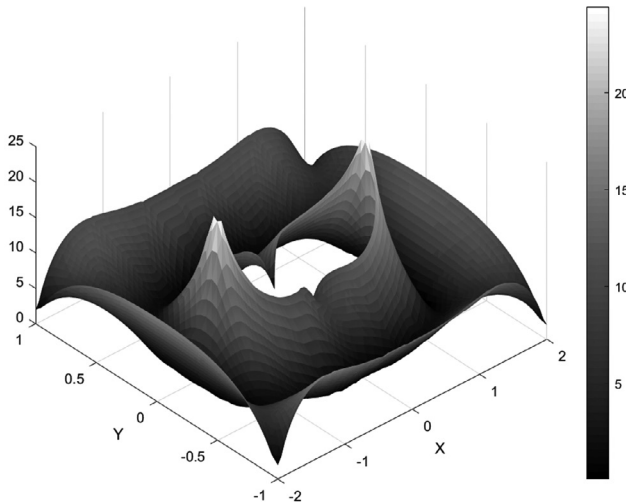
dok uvjeti problema određuju početnu temperaturu na rubovima ploče. Ne ulazeći u način izvođenja metode konačnih elemenata za numeričko rješavanje problema na mreži trokuta iz triangulacije, u prvom koraku odredit ćemo Delaunayovu triangulaciju koja opisuje geometrijski oblik na kojemu se rješava zadana parcijalna diferencijalna jednačba. Na Slici 7. prikazana je Delaunayova triangulacija metalne ploče za zadani oblik koja je dobivena postupnim profinjenjem mreže za zadani oblik ploče dok nije dostignuta numerička točnost izračunatog rješenja na tri decimalna mjesta. Na slici se uočavaju područja s različitim brojem i veličinom trokuta, što je posljedica gustoće mreže na tim mjestima za postizanje tražene numeričke točnosti.



Slika 7. Delaunayova triangulacija metalne ploče

⁴konvekcija (kasnolat. convection: prijenos), u fizici, prijenos topline strujanjem fluida. Hrvatska enciklopedija, mrežno izdanje. Leksikografski zavod Miroslav Krleža, 2013. – 2025. <https://enciklopedija.hr/clanak/konvekcija> (4. 6. 2025.)

Sustav linearnih algebarskih jednadžbi koji slijedi iz eliptičke parcijalne diferencijalne jednadžbe nakon primjene metode konačnih elemenata tipično se rješava primjenom iterativnih metoda linearne algebre te se dobivene numeričke vrijednosti prikazuju grafički nad zadanim geometrijskim likom. Rezultat numeričkog izračuna za gustoću toplinskog toka na metalnoj ploči vidimo na Slici 8., gdje treća dimenzija u prikazu predstavlja apsolutni iznos gustoće toplinskog toka na različitim pozicijama na ploči.



Slika 8. Gustoća toplinskog toka metalne ploče

Iz slike uočavamo kako je gustoća toplinskog toka veća na rubovima ploče (brže se zagrijava) te unutrašnjosti ploče u okolini izrezanog dijela (brže se hladi), dok je relativno niža u područjima između (sporije se zagrijava i hladi).

Komentar

U ovom članku sažeto je prikazana temeljna ideja Delaunayove triangulacije te je prikazan njezin opći pregled kao i primjeri primjene na geometrijskim modelima u ravnini. Delaunayova triangulacija predstavlja očit primjer primjene jednostavnog matematičkog kriterija koji rezultira velikom praktičnom primjenom. Može se slobodno reći kako Delaunayova triangulacija predstavlja temeljni algoritam u primjeni metode konačnih elemenata u računalom potpomognutom inženjerstvu. Kompletan prikaz upotrebe i proširenja Delaunayove triangulacije na višedimenzijske geometrijske konstrukcije premašuje okvire ovog članka, ali se zainteresiranom čitatelju preporuča potražiti dodatne informacije i objašnjenja u citiranoj literaturi te međumrežju o ovoj zaista izvanrednoj strukturi.

Literatura:

1. J. O. Tinsley, *Historical comments on finite elements*, Proceedings of the ACM conference on history of scientific and numeric computation, 1987., str. 125-130.
2. <https://www.geom.at/terrain-triangulation/> (4. 6. 2025).
3. M. de Berg, O. Cheong, M. van Kreveld, M. Overmars, „*Computational Geometry – Algorithms and Applications*,” 3ed, Springer, 2008.
4. B. N. Delaunay, *Sur la Sphere Vide*, Izvestia Akademia Nauk SSSR, VII Seria, Otdelenie Matematicheskikh i Estestvennyh Nauk, 1934, 6:793-800.
5. C. L. Lawson, *Software for C1 surface interpolation*, Mathematical Software III, J.R. Rice ed., Academic Press, 1977, str. 161-194.
6. S. W. Cheng, T.K. Dey, J.R. Shewchuk, „*Delaunay Mesh Generation*,” CRC Press, 2013.
7. Daniel S. H. Lo, „*Finite Element Mesh Generation*,” CRC Press, 2015.
8. Mohamad N.Z. Abidin, Md Yushalify Misro, *Numerical Simulation of Heat Transfer using Finite Element Method*, Journal of Advanced Research in Fluid Mechanics and Thermal Sciences, Issue 2 (2022.), str. 104-115.
9. P. Nithiarasu, R. W. Lewis, and K. N. Seetharamu, *Fundamentals of the Finite Element Method for Heat and Mass Transfer*, 2nd Edition, Wiley, 2016.
10. P. L. George, H. Borouchaki, *Delaunay Triangulation and Meshing: Application to Finite Elements*, Hermes, 1998.