

Svojstva ciklometrijskih (arkus) funkcija (1. dio)

GORAN KOVAČEVIĆ¹

Sažetak

U nastavi na tehničkim fakultetima često se nedovoljno rade ili potpuno izbjegavaju zadatci s ovim funkcijama jer zahtijevaju izvrsno poznavanje svojstava trigonometrijskih funkcija. Cilj rada je da se prosječni student tehničkog fakulteta bolje upozna s arkusima i tako oslobodi straha od osnovnih računskih operacija s tim funkcijama. Stoga se u radu navode i jednostavnim metodama dokazuju njihova osnovna svojstva, kao što su (ne)parnost, simetrija i veze između različitih funkcija, te se izvode formule za zbroj i razliku istih ciklometrijskih funkcija.

Ključne riječi: ciklometrijske funkcije, arkus funkcije, trigonometrijski identiteti, zbroj i razlika arkus funkcija, nastava matematike na tehničkim fakultetima

1. Uvod

Teško je zamisliti današnju matematiku, inženjerstvo i prirodne znanosti bez trigonometrijskih funkcija. Njihova primjena je neizbježna pri opisivanju periodičnih pojava kao što su valovi i oscilacije, a koriste se i u rješavanju složenih geometrijskih problema i matematičkih jednadžbi. Često nam nije potrebna sama vrijednost trigonometrijske funkcije, već je potrebno pronaći argument trigonometrijske funkcije koji odgovara zadanoj numeričkoj vrijednosti. Iz tog su razloga uvedene ciklometrijske (ili arkus) funkcije: arkus sinus ($\arcsin x$), arkus kosinus ($\arccos x$), arkus tangens ($\arctan x$) i arkus kotangens ($\operatorname{arccot} x$). To su inverzne funkcije restrikcija odgovarajućih trigonometrijskih funkcija na intervale na kojima su trigonometrijske funkcije strogo monotone (a time i injektivne). Odabir takvih intervala osigurava strogu monotonost arkus funkcija.

Strogo rastuća surjekcija

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right], \quad y = \arcsin x$$

¹Goran Kovačević, Pomorski fakultet u Splitu, Split

je inverzna funkcija strogo rastuće surjektivnosti $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$, $x = \sin y$.

Strogo padajuća surjektivnost

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi], \quad y = \arccos x$$

je inverzna funkcija strogo padajuće surjektivnosti $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$, $x = \cos y$.

Strogo rastuća surjektivnost

$$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle, \quad y = \arctan x$$

je inverzna funkcija strogo rastuće surjektivnosti $\tan : \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $x = \tan y$.

Strogo padajuća surjektivnost

$$\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \rightarrow \langle 0, \pi \rangle, \quad y = \operatorname{arccot} x$$

je inverzna funkcija strogo padajuće surjektivnosti $\cot : \langle 0, \pi \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $x = \cot y$.

Stoga vrijede sljedeće relacije:

$$y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y, \quad x \in [-1, 1], \quad y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y, \quad x \in [-1, 1], \quad y \in [0, \pi]$$

$$y = \arctan x \Leftrightarrow x = \tan y, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$$

$$y = \operatorname{arccot} x \Leftrightarrow x = \cot y, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \langle 0, \pi \rangle.$$

Osim što omogućuju rješavanje trigonometrijskih jednadžbi, ciklotometrijske funkcije se često koriste u analitičkoj geometriji, pri rješavanju integrala i diferencijalnih jednadžbi, u teoriji signala te u računalnoj grafici i navigacijskim sustavima. U nastavi na tehničkim fakultetima se često nedovoljno rade ili potpuno izbjegavaju zadatci s ovim funkcijama jer zahtijevaju izvrsno poznavanje svojstava trigonometrijskih funkcija. Cilj rada je da se prosječni student tehničkog fakulteta bolje upozna s arkusima i tako oslobodi straha od osnovnih računskih operacija s tim funkcijama. Stoga se u radu navode i jednostavnim metodama dokazuju njihova svojstva, kao što su (ne)parnost, simetrija i veze između različitih funkcija te se izvode formule za zbroj i razliku istih ciklotometrijskih funkcija.

2. Svojstva arkus funkcija

U ovom poglavlju navodimo i odmah dokazujemo osnovna svojstva arkus funkcija. Nizove dobivenih jednakosti u svakom dokazu zapisujemo s komentarima u

zagradama. Dakle, onako kako bismo ih na ploči zapisali studentima tako da budu pregledni i omogućće lakše praćenje logičkog slijeda dokaza.

2.1. Svojstva funkcije arkus sinus

1a) $\arcsin x = -\arcsin(-x), \forall x \in [-1,1]$

Dokaz:

$$\begin{aligned} \arcsin x &= y \\ x &= \sin y \text{ (definicija)} \\ -x &= -\sin y \text{ (množenje s -1)} \\ -x &= \sin(-y), \quad -y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ (neparnost funkcije sinus)} \\ \arcsin(-x) &= -y \text{ (definicija)} \\ -\arcsin(-x) &= y \text{ (množenje s -1)} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \arcsin x = -\arcsin(-x), \forall x \in [-1,1].$

1b) $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x, \forall x \in [-1,1]$

Dokaz:

$$\begin{aligned} \arcsin x &= y \\ x &= \sin y \text{ (definicija)} \\ x &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right), \quad \frac{\pi}{2} - y \in [0, \pi] \text{ (trig. formula)} \\ \arccos x &= \frac{\pi}{2} - y \text{ (definicija funkcije arkus kosinus)} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x, \forall x \in [-1,1].$

1c) $\arcsin x = \operatorname{sgn} x \arccos \sqrt{1-x^2}, \forall x \in [-1,1]$

Dokaz:

$\arcsin x = y$

(*) Za $x \in [-1,0)$: (tada je $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right)$):

$x = \sin y \text{ (definicija)}$

$$\cos y = \sqrt{1-x^2}, \quad y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad (\text{trig. formula})$$

$$y = \arccos \sqrt{1-x^2} \quad (\text{definicija funkcije arkus kosinus})$$

$$\Rightarrow \arcsin x = \arccos \sqrt{1-x^2}$$

(**) Za $x \in [-1, 0]$:

$$\stackrel{1a)}{\arcsin x} = -\arcsin(-x) \stackrel{(*)}{=} -\arccos \sqrt{1-(-x)^2} = -\arccos \sqrt{1-x^2}$$

$$(*) \text{ i } (**) \Rightarrow \arcsin x = \operatorname{sgn} x \arccos \sqrt{1-x^2}, \quad \forall x \in [-1, 1]$$

1d) $\arcsin x = \arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \forall x \in \langle -1, 1 \rangle$

Dokaz:

$$\arcsin x = y$$

Napomena: Za $x \in \langle -1, 1 \rangle$ je $y \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$.

$$x = \sin y \quad (\text{definicija})$$

$$\tan y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad y \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle \quad (\text{trig. formula})$$

$$y = \arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\text{definicija funkcije arkus tangens})$$

$$\Rightarrow \arcsin x = \arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \forall x \in \langle -1, 1 \rangle$$

1e) $\arcsin x = \operatorname{sgn} x \operatorname{arccot} \frac{\sqrt{1-x^2}}{|x|}, \quad \forall x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$

Dokaz:

$$\arcsin x = y$$

(*) Za $x \in \langle 0, 1 \rangle$ (tada je $y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$):

$$x = \sin y \quad (\text{definicija})$$

$$\cot y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \quad y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad (\text{trig. formula})$$

$$y = \operatorname{arccot} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \text{ (definicija funkcije arkus kotangens)}$$

$$\Rightarrow \arcsin x = \operatorname{arccot} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

(**) Za $x \in [-1, 0)$:

$$\stackrel{1a)}{\arcsin x} = -\arcsin(-x) \stackrel{(*)}{=} -\operatorname{arccot} \frac{\sqrt{1-(-x)^2}}{-x} = -\operatorname{arccot} \frac{\sqrt{1-x^2}}{-x}$$

$$(*) \text{ i } (**)\Rightarrow \arcsin x = \operatorname{sgn} x \operatorname{arccot} \frac{\sqrt{1-x^2}}{|x|}, \quad \forall x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$$

2.2. Svojstva funkcije arkus kosinus

2a) $\arccos x = \pi - \arccos(-x), \quad \forall x \in [-1, 1]$

Dokaz:

$$\arccos x = y$$

$$x = \cos y \text{ (definicija)}$$

$$-x = -\cos y \text{ (množenje s -1)}$$

$$-x = \cos(\pi - y), \quad \pi - y \in [0, \pi] \text{ (trig. formula)}$$

$$\arccos(-x) = \pi - y \text{ (definicija)}$$

$$\Rightarrow \arccos x = \pi - \arccos(-x), \quad \forall x \in [-1, 1]$$

2b) $\arccos x = \frac{1 - \operatorname{sgn} x}{2} \pi + \operatorname{sgn} x \arcsin \sqrt{1-x^2}, \quad \forall x \in [-1, 1]$

Dokaz:

$$\arccos x = y$$

(*) Za $x \in [0, 1]$ (tada je $y \in [0, \frac{\pi}{2}]$):

$$x = \cos y \text{ (definicija)}$$

$$\sin y = \sqrt{1-x^2}, \quad y \in [0, \frac{\pi}{2}] \text{ (trig. formula)}$$

$$y = \arcsin \sqrt{1-x^2} \text{ (definicija funkcije arkus sinus)}$$

$$\Rightarrow \arccos x = \arcsin \sqrt{1-x^2}$$

(**) Za $x \in [-1, 0]$:

$$\stackrel{2a)}{\arccos x} = \pi - \arccos(-x) \stackrel{(*)}{=} \pi - \arcsin \sqrt{1 - (-x)^2} = \pi - \arcsin \sqrt{1 - x^2}$$

(*) i (**) $\Rightarrow \arccos x = \frac{1 - \operatorname{sgn} x}{2} \pi + \operatorname{sgn} x \arcsin \sqrt{1 - x^2}, \forall x \in [-1, 1]$

2c) $\arccos x = \frac{1 - \operatorname{sgn} x}{2} \pi + \operatorname{sgn} x \arctan \frac{\sqrt{1 - x^2}}{|x|}, \forall x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$

Dokaz:

$$\arccos x = y$$

(*) Za $x \in \langle 0, 1 \rangle$ (tada je $y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$):

$$x = \cos y \text{ (definicija)}$$

$$\tan y = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}, \quad y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ (trig. formula)}$$

$$y = \arctan \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x} \text{ (definicija funkcije arkus tangens)}$$

$$\Rightarrow \arccos x = \arctan \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$$

(**) Za $x \in [-1, 0]$:

$$\stackrel{2a)}{\arccos x} = \pi - \arccos(-x) \stackrel{(*)}{=} \pi - \arctan \frac{\sqrt{1 - (-x)^2}}{-x} = \pi - \arctan \frac{\sqrt{1 - x^2}}{-x}$$

(*) i (**) $\Rightarrow \arccos x = \frac{1 - \operatorname{sgn} x}{2} \pi + \operatorname{sgn} x \arctan \frac{\sqrt{1 - x^2}}{|x|}, \forall x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$

2d) $\arccos x = \operatorname{arccot} \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}, \forall x \in \langle -1, 1 \rangle$

Dokaz:

$$\arccos x = y$$

Napomena: Za $x \in \langle -1, 1 \rangle$ je $y \in \langle 0, \pi \rangle$.

$$x = \cos y \text{ (definicija)}$$

$$\cot y = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad y \in \langle 0, \pi \rangle \text{ (trig. formula)}$$

$$y = \operatorname{arccot} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \text{ (definicija funkcije arkus kotangens)}$$

$$\Rightarrow \arccos x = \operatorname{arccot} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \forall x \in \langle -1, 1 \rangle$$

2.3. Svojstva funkcije arkus tangens

3a) $\arctan x = -\arctan(-x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Dokaz:

$$\arctan x = y$$

$$x = \tan y \text{ (definicija)}$$

$$-x = -\tan y \text{ (množenje s -1)}$$

$$-x = \tan(-y), \quad -y \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle \text{ (neparnost funkcije tangens)}$$

$$\arctan(-x) = -y \text{ (definicija)}$$

$$-\arctan(-x) = y \text{ (množenje s -1)}$$

$$\Rightarrow \arctan x = -\arctan(-x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

3b) $\arctan x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccot} x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Dokaz:

$$\arctan x = y$$

$$x = \tan y \text{ (definicija)}$$

$$x = \cot\left(\frac{\pi}{2} - y\right), \quad \frac{\pi}{2} - y \in \langle 0, \pi \rangle \text{ (trig. formula)}$$

$$\operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} - y \text{ (definicija funkcije arkus kotangens)}$$

$$\Rightarrow \arctan x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccot} x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

3c) $\arctan x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Dokaz:

$$\arctan x = y$$

$$x = \tan y \text{ (definicija)}$$

$$\sin y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad y \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle \text{ (trig. formula)}$$

$$y = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \text{ (definicija funkcije arkus sinus)}$$

$$\Rightarrow \arctan x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$3d) \quad \arctan x = \operatorname{sgn} x \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Dokaz:

$$\arctan x = y$$

$$(*) \quad \text{Za } x \geq 0 \text{ (tada je } y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]):$$

$$x = \tan y \text{ (definicija)}$$

$$\cos y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ (trig. formula)}$$

$$y = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \text{ (definicija funkcije arkus kosinus)}$$

$$\Rightarrow \arctan x = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$(**) \quad \text{Za } x \leq 0:$$

$$\arctan x \stackrel{3a)}{=} -\arctan(-x) \stackrel{(*)}{=} -\arccos \frac{1}{\sqrt{1+(-x)^2}} = -\arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$(*) \text{ i } (**) \Rightarrow \arctan x = \operatorname{sgn} x \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$3e) \quad \arctan x = \operatorname{sgn} x \operatorname{arccot} \frac{1}{|x|}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Dokaz:

$$\arctan x = y$$

$$(*) \quad \text{Za } x > 0 \text{ (tada je } y \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle):$$

$$x = \tan y \text{ (definicija)}$$

$$\cot y = \frac{1}{x}, \quad y \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle \text{ (trig. formula)}$$

$$y = \operatorname{arccot} \frac{1}{x} \text{ (definicija funkcije arkus kotangens)}$$

$$\Rightarrow \arctan x = \operatorname{arccot} \frac{1}{x}$$

(**) Za $x < 0$:

$$\stackrel{3a)}{\arctan x} = -\arctan(-x) \stackrel{(*)}{=} -\operatorname{arccot} \frac{1}{-x}$$

$$(*) \text{ i } (**) \Rightarrow \arctan x = \operatorname{sgn} x \operatorname{arccot} \frac{1}{|x|}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

2.4. Svojstva funkcije arkus kotangens

4a) $\operatorname{arccot} x = \pi - \operatorname{arccot}(-x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Dokaz:

$$\operatorname{arccot} x = y$$

$$x = \cot y \text{ (definicija)}$$

$$-x = -\cot y \text{ (množenje s -1)}$$

$$-x = \cot(\pi - y), \quad \pi - y \in \left\langle 0, \pi \right\rangle \text{ (trig. formula)}$$

$$\operatorname{arccot}(-x) = \pi - y \text{ (definicija funkcije arkus kotangens)}$$

$$\Rightarrow \operatorname{arccot} x = \pi - \operatorname{arccot}(-x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

4b) $\operatorname{arccot} x = \frac{1 - \operatorname{sgn} x}{2} \pi + \operatorname{sgn} x \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Dokaz:

$$\operatorname{arccot} x = y$$

(*) Za $x \geq 0$ (tada je $y \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$):

$$x = \cot y \text{ (definicija)}$$

$$\sin y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad y \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle \text{ (trig. formula)}$$

$$y = \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \text{ (definicija funkcije arkus sinus)}$$

$$\Rightarrow \operatorname{arccot} x = \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

(**) Za $x \leq 0$:

$$\stackrel{4a)}{\operatorname{arccot} x} = \pi - \operatorname{arccot}(-x) \stackrel{(*)}{=} \pi - \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+(-x)^2}} = \pi - \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

(*) i (**) $\Rightarrow \operatorname{arccot} x = \frac{1-\operatorname{sgn} x}{2} \pi + \operatorname{sgn} x \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

4c) $\operatorname{arccot} x = \arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Dokaz:

$$\operatorname{arccot} x = y$$

$$x = \cot y \text{ (definicija)}$$

$$\cos y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad y \in \langle 0, \pi \rangle \text{ (trig. formula)}$$

$$y = \arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \text{ (definicija funkcije arkus kosinus)}$$

$$\Rightarrow \operatorname{arccot} x = \arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

4d) $\operatorname{arccot} x = \frac{1-\operatorname{sgn} x}{2} \pi + \arctan \frac{1}{x}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Dokaz:

$$\operatorname{arccot} x = y$$

(*) Za $x > 0$ (tada je $y \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$):

$$x = \cot y \text{ (definicija)}$$

$$\tan y = \frac{1}{x}, \quad y \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \text{ (trig. formula)}$$

$$y = \arctan \frac{1}{x} \text{ (definicija funkcije arkus tangens)}$$

$$\Rightarrow \operatorname{arccot} x = \arctan \frac{1}{x}$$

(**) Za $x < 0$:

$$\stackrel{4a)}{\operatorname{arccot} x} = \pi - \operatorname{arccot}(-x) \stackrel{(*)}{=} \pi - \arctan \frac{1}{-x} \stackrel{3a)}{=} \pi + \arctan \frac{1}{x}$$

(*) i (**) $\Rightarrow \operatorname{arccot} x = \frac{1-\operatorname{sgn} x}{2} \pi + \arctan \frac{1}{x}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

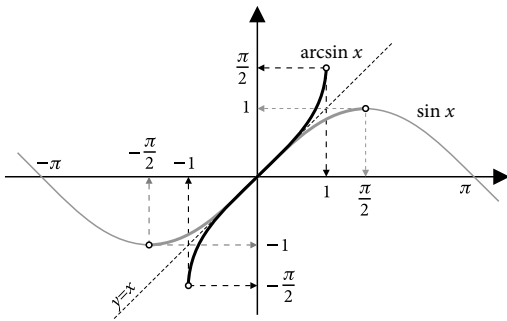
Napomena. Primjenom formula 1b) i 3b) može se izvesti još formula. Npr.

$$\arccos x = \frac{1b) \pi}{2} - \arcsin x = \frac{1d) \pi}{2} - \arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \forall x \in \langle -1, 1 \rangle,$$

$$\operatorname{arccot} x = \frac{3b) \pi}{2} - \arctan x = \frac{3c) \pi}{2} - \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

U nastavku članka donosimo formule za zbrojeve, odnosno razlike pojedinih trigonometrijskih funkcija, te jedno zanimljivo svojstvo funkcije arkus kosinus.

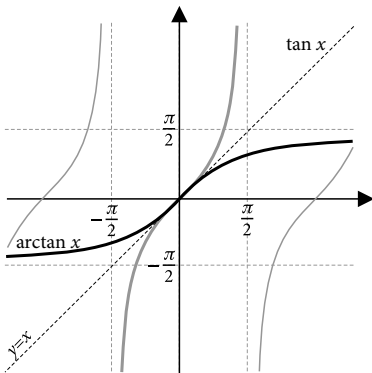
Dodatak. Grafovi arkus funkcija



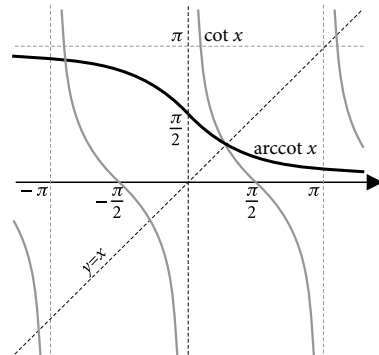
Slika 1. Graf funkcije arcsin x



Slika 2. Graf funkcije arccos x



Slika 3. Graf funkcije arctan x



Slika 4. Graf funkcije arccot x

Literatura:

1. B. Pavković, D. Veljan (1995.): *Elementarna matematika II*, Školska knjiga, Zagreb.
2. I. N Bronštejn, K. A. Semendjajev (1991.): *Matematički priručnik za inženjere i studente*, Tehnička knjiga, Zagreb.