

# Svojstva ciklometrijskih (arkus) funkcija (2. dio)<sup>1</sup>

GORAN KOVAČEVIĆ<sup>2</sup>

## Sažetak

U nastavi na tehničkim fakultetima često se nedovoljno rade ili potpuno izbjegavaju zadatci s ovim funkcijama jer zahtijevaju izvrsno poznavanje svojstava trigonometrijskih funkcija. Cilj rada je da se prosječni student tehničkog fakulteta bolje upozna s arkusima i tako oslobodi straha od osnovnih računskih operacija s tim funkcijama. U prvom dijelu rada ([1]) navedena su i jednostavnim metodama dokazana njihova osnovna svojstva, kao što su (ne)parnost, simetrija i veze između različitih funkcija. U drugom dijelu rada izvode se formule za zbroj i razliku istih ciklometrijskih funkcija.

**Ključne riječi:** ciklometrijske funkcije, arkus funkcije, trigonometrijski identiteti, zbroj i razlika arkus funkcija, nastava matematike na tehničkim fakultetima

## 1. Zbroj i razlika arkus sinusa

Trigonometrijska formula

$$\sin(u + v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v \quad (1)$$

vrijedi za sve  $u, v \in \mathbb{R}$ .

Za sve  $x, y \in [-1, 1]$  postoje jedinstveni  $u, v \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  takvi da je  $u = \arcsin x$ ,

$v = \arcsin y$ , odnosno  $\sin u = x$  i  $\sin v = y$ . Tada je  $\cos u = \sqrt{1-x^2}$  i  $\cos v = \sqrt{1-y^2}$ .

Stoga, po (1), za sve  $x, y \in [-1, 1]$  vrijedi

$$\sin(\arcsin x + \arcsin y) = x\sqrt{1-y^2} + \sqrt{1-x^2}y. \quad (2)$$

Primijetimo da je  $\arcsin x + \arcsin y \in [-\pi, \pi]$ .

<sup>1</sup>Prvi dio članka objavljen je u Poučku broj 103

<sup>2</sup>Goran Kovačević, Pomorski fakultet, Split

(\*) Ako je  $\arcsin x + \arcsin y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ , onda je po (2)

$$\arcsin x + \arcsin y = \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + \sqrt{1-x^2}y\right).$$

Ispitajmo koji  $x, y \in [-1, 1]$  zadovoljavaju uvjete

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x + \arcsin y \leq \frac{\pi}{2},$$

odnosno uvjete

$$-\frac{\pi}{2} - \arcsin x \leq \arcsin y \leq \frac{\pi}{2} - \arcsin x.$$

Za  $x \geq 0$  je

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin y \leq \frac{\pi}{2} - \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$$

pa se dobivaju sljedeće ekvivalentne nejednakosti:

$$\sin(\arcsin y) \leq \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)$$

$$y \leq \cos(\arcsin x)$$

$$y \leq \cos(\arccos \sqrt{1-x^2})$$

$$y \leq \sqrt{1-x^2}.$$

Za  $x < 0$  je

$$\frac{\pi}{2} \geq \arcsin y \geq -\frac{\pi}{2} - \arcsin x > -\frac{\pi}{2}$$

pa se dobivaju sljedeće ekvivalentne nejednakosti:

$$\sin(\arcsin y) \geq \sin\left(-\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)$$

$$y \geq -\cos(\arcsin x)$$

$$y \geq -\cos(-\arccos \sqrt{1-x^2})$$

$$-y \leq \cos(-\arccos \sqrt{1-x^2})$$

$$-y \leq \cos(\arccos \sqrt{1-x^2})$$

$$-y \leq \sqrt{1-x^2}$$

$$y \geq \sqrt{1-x^2}.$$

Prema tome, uvjete

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x + \arcsin y \leq \frac{\pi}{2}$$

zadovoljavaju samo  $x, y \in [-1, 1]$  za koje vrijedi:

$$xy \leq 0 \quad \text{ili} \quad x^2 + y^2 \leq 1.$$

(\*\*) Ako je  $\arcsin x + \arcsin y > \frac{\pi}{2}$ , onda postoji jedinstveni  $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$  takav da je

$$\arcsin x + \arcsin y = \pi + \alpha \quad (3)$$

pa, prema (2), imamo

$$\sin(\pi + \alpha) = x\sqrt{1-y^2} + \sqrt{1-x^2}y$$

$$\sin \alpha = -\left(x\sqrt{1-y^2} + \sqrt{1-x^2}y\right)$$

$$\alpha = \arcsin\left(-x\sqrt{1-y^2} - \sqrt{1-x^2}y\right) \stackrel{1a)}{=} -\arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + \sqrt{1-x^2}y\right),$$

pri čemu smo koristili neparnost funkcije arkus sinus (tvrdnja 1a) u [1]).

Dakle, u tom slučaju je po (3)

$$\arcsin x + \arcsin y = \pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + \sqrt{1-x^2}y\right).$$

Ispitajmo sada koji  $x, y \in [-1, 1]$  zadovoljavaju uvjet

$$\arcsin x + \arcsin y > \frac{\pi}{2}.$$

Taj uvjet je moguće zadovoljiti samo ako je  $\arcsin x > 0$ , odnosno ako je  $x > 0$ , jer iz  $\arcsin x \leq 0$  i  $\arcsin x + \arcsin y > \frac{\pi}{2}$  slijedi  $\arcsin y > \frac{\pi}{2}$  što je nemoguće.

Imamo

$$\frac{\pi}{2} \geq \arcsin y > \frac{\pi}{2} - \arcsin x \geq 0$$

pa se dobiva niz ekvivalentnih nejednakosti

$$\sin(\arcsin y) > \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)$$

$$y > \cos(\arcsin x)$$

$$y > \cos\left(\arccos\sqrt{1-x^2}\right)$$

$$y > \sqrt{1-x^2}.$$

Uvjet

$$\arcsin x + \arcsin y > \frac{\pi}{2}$$

zadovoljavaju samo  $x, y \in [-1, 1]$  za koje vrijedi  $x > 0$  i  $y > \sqrt{1-x^2}$ , odnosno  $x > 0$ ,  $y > 0$  i  $x^2 + y^2 > 1$ .

(\*\*\*) Ako je  $\arcsin x + \arcsin y < -\frac{\pi}{2}$ , onda postoji jedinstveni  $\beta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$  takav da je

$$\arcsin x + \arcsin y = -\pi + \beta \quad (4)$$

pa, iz (2), slijedi

$$\sin(-\pi + \beta) = x\sqrt{1-y^2} + \sqrt{1-x^2}y$$

$$\sin \beta = -\left(x\sqrt{1-y^2} + \sqrt{1-x^2}y\right)$$

$$\beta = \arcsin\left(-x\sqrt{1-y^2} - \sqrt{1-x^2}y\right) \stackrel{\text{1a)}}{=} -\arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + \sqrt{1-x^2}y\right),$$

pri čemu smo ponovno koristili neparnost funkcije arkus sinus.

Dakle, u tom slučaju je po (4)

$$\arcsin x + \arcsin y = -\pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + \sqrt{1-x^2}y\right).$$

Nađimo za koje  $x, y \in [-1, 1]$  vrijedi

$$\arcsin x + \arcsin y < -\frac{\pi}{2}.$$

Taj uvjet moguće je zadovoljiti samo ako je  $\arcsin x < 0$ , odnosno ako je  $x < 0$ , jer iz

$\arcsin x \geq 0$  i  $\arcsin x + \arcsin y < -\frac{\pi}{2}$  slijedi  $\arcsin y < -\frac{\pi}{2}$ , što je nemoguće.

Imamo

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin y < -\frac{\pi}{2} - \arcsin x \leq 0$$

pa se dobiva niz ekvivalentnih nejednakosti:

$$\sin(\arcsin y) < \sin\left(-\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)$$

$$y < -\cos(\arcsin x)$$

$$y < -\cos\left(-\arccos\sqrt{1-x^2}\right)$$

$$y < -\cos\left(\arccos\sqrt{1-x^2}\right)$$

$$y < -\sqrt{1-x^2}.$$

Uvjet

$$\arcsin x + \arcsin y < -\frac{\pi}{2}$$

zadovoljavaju samo  $x, y \in [-1, 1]$  za koje vrijedi  $x < 0$  i  $y < -\sqrt{1-x^2}$ , odnosno

$$x < 0, \quad y < 0 \quad \text{i} \quad x^2 + y^2 > 1.$$

(•) Konačno, za sve  $x, y \in [-1, 1]$  vrijedi

$$\arcsin x + \arcsin y = \begin{cases} \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + \sqrt{1-x^2}y\right) & \text{ako je } xy \leq 0 \text{ ili } x^2 + y^2 \leq 1 \\ \pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + \sqrt{1-x^2}y\right) & \text{ako je } x > 0, y > 0 \text{ i } x^2 + y^2 > 1 \\ -\pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + \sqrt{1-x^2}y\right) & \text{ako je } x < 0, y < 0 \text{ i } x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + \sqrt{1-x^2}y\right) & \text{ako je } xy \leq 0 \text{ ili } x^2 + y^2 \leq 1 \\ \pi \operatorname{sgn} x - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + \sqrt{1-x^2}y\right) & \text{ako je } xy > 0 \text{ i } x^2 + y^2 > 1. \end{cases}$$

Uvjet  $xy > 0$  i  $x^2 + y^2 > 1$  možemo zadati pomoću nejednakosti  $A > 0$ , gdje je

$$A = [1 + \operatorname{sgn}(xy)](x^2 + y^2 - 1).$$

Onda sve slučajeve možemo objediniti pomoću sljedeće formule:

$$\arcsin x + \arcsin y = \pi \cdot \delta_{\operatorname{sgn} A, 1} \cdot \operatorname{sgn} x + (-1)^{\delta_{\operatorname{sgn} A, 1}} \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + \sqrt{1-x^2}y\right),$$

gdje je

$$\delta_{r,s} = \begin{cases} 1 & \text{kad je } r = s \\ 0 & \text{kad je } r \neq s \end{cases}$$

Kroneckerova delta funkcija.

Da bismo odredili formulu za računanje razlike arkus sinusa, koristimo svojstvo 1a) iz [1] (tj. neparnost funkcije arkus sinus) prema kojemu za svaki  $x, y \in [-1, 1]$  vrijedi

$$\arcsin x - \arcsin y = \arcsin x + \arcsin(-y).$$

Sada treba samo u formuli za zbroj arkus sinusa svaki  $y$  zamijeniti s  $-y$ .

Tako dobivamo

$$\arcsin x - \arcsin y = \begin{cases} \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} - \sqrt{1-x^2}y\right) & \text{ako je } xy \geq 0 \text{ ili } x^2 + y^2 \leq 1 \\ \pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} - \sqrt{1-x^2}y\right) & \text{ako je } x > 0, y < 0 \text{ i } x^2 + y^2 > 1 \\ -\pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} - \sqrt{1-x^2}y\right) & \text{ako je } x < 0, y > 0 \text{ i } x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} - \sqrt{1-x^2}y\right) & \text{ako je } xy \geq 0 \text{ ili } x^2 + y^2 \leq 1 \\ \pi \operatorname{sgn} x - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} - \sqrt{1-x^2}y\right) & \text{ako je } xy < 0 \text{ i } x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$$

$$= \pi \cdot \delta_{\operatorname{sgn} B, 1} \cdot \operatorname{sgn} x + (-1)^{\delta_{\operatorname{sgn} B, 1}} \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} - \sqrt{1-x^2}y\right),$$

gdje je

$$B = [1 - \operatorname{sgn}(xy)](x^2 + y^2 - 1).$$

## 2. Zbroj i razlika arkus kosinusa

Trigonometrijska formula

$$\cos(u+v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v \quad (5)$$

vrijedi za sve  $u, v \in \mathbb{R}$ .

Za sve  $x, y \in [-1, 1]$  postoje jedinstveni  $u, v \in [0, \pi]$  takvi da je  $u = \arccos x$ ,  $v = \arccos y$ , odnosno  $\cos u = x$  i  $\cos v = y$ . Tada je  $\sin u = \sqrt{1-x^2}$  i  $\sin v = \sqrt{1-y^2}$ .

Stoga, po (5), za sve  $x, y \in [-1, 1]$  vrijedi

$$\cos(\arccos x + \arccos y) = xy - \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2}. \quad (6)$$

Primijetimo da je  $\arccos x + \arccos y \in [0, 2\pi]$ .

(\*) Ako je  $\arccos x + \arccos y \in [0, \pi]$ , onda je po (6)

$$\arccos x + \arccos y = \arccos(xy - \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2}).$$

Uočimo da  $\arccos x + \arccos y \in [0, \pi]$  vrijedi samo ako je

$$0 \leq \arccos y \leq \pi - \arccos x \leq \pi$$

pa vrijedi sljedeći niz ekvivalentnih nejednakosti:

$$\cos(\arccos y) \geq \cos(\pi - \arccos x)$$

$$y \geq -\cos(\arccos x)$$

$$y \geq -x.$$

(\*\*) Ako je  $\arccos x + \arccos y > \pi$ , onda postoji jedinstveni  $\alpha \in \langle 0, \pi \rangle$  takav da je

$$\arccos x + \arccos y = \alpha + \pi \quad (7)$$

pa, iz (6), slijedi

$$\cos(\alpha + \pi) = xy - \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2} - xy$$

$$\alpha = \arccos(\sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2} - xy).$$

Dakle, u tom slučaju je po (7)

$$\begin{aligned} \arccos x + \arccos y &= \arccos(\sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2} - xy) + \pi = \\ &= 2\pi - \arccos(xy - \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2}), \end{aligned}$$

pri čemu smo koristili tvrdnju 2a) iz [1].

Uočimo da  $\arccos x + \arccos y > \pi$  vrijedi samo ako je

$$\pi \geq \arccos y > \pi - \arccos x \geq 0,$$

pa vrijedi sljedeći niz ekvivalentnih nejednakosti:

$$\cos(\arccos y) < \cos(\pi - \arccos x)$$

$$y < -\cos(\arccos x)$$

$$y < -x.$$

(•) Konačno, za sve  $x, y \in [-1, 1]$

$$\begin{aligned} \arccos x + \arccos y &= \begin{cases} \arccos(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}) & \text{ako je } y \geq -x \\ 2\pi - \arccos(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}) & \text{ako je } y < -x \end{cases} \\ &= \begin{cases} \arccos(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}) & \text{ako je } y > -x \\ \pi & \text{ako je } y = -x \\ 2\pi - \arccos(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}) & \text{ako je } y < -x \end{cases} \\ &= [1 - \operatorname{sgn}(x+y)]\pi + \operatorname{sgn}(x+y)\arccos(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}). \end{aligned}$$

Da bismo odredili formulu za računanje razlike arkus kosinusa, koristimo svojstvo 2a) iz [1] prema kojemu za sve  $x, y \in [-1, 1]$  vrijedi

$$\arccos x - \arccos y = \arccos x + \arccos(-y) - \pi.$$

Tako dobivamo

$$\begin{aligned} \arccos x - \arccos y &= \begin{cases} \arccos(-xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}) - \pi & \text{ako je } y \leq x \\ \pi - \arccos(-xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}) & \text{ako je } y > x \end{cases} \\ &= \begin{cases} -\arccos(xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}) & \text{ako je } y < x \\ 0 & \text{ako je } y = x \\ \arccos(xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}) & \text{ako je } y > x \end{cases} \\ &= \operatorname{sgn}(y-x)\arccos(xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}). \end{aligned}$$

### 3. Zbroj i razlika arkus tangensa

Za  $xy = 1$  vrijedi:

$$\arctan x + \arctan y = \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \{3a, 3e\} = \operatorname{sgn} x \arctan|x| + \operatorname{sgn} x \operatorname{arccot}|x|$$

$$= \operatorname{sgn} x (\arctan |x| + \operatorname{arccot} |x|) \stackrel{3b)}{=} \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} x,$$

pri čemu smo koristili tvrdnje 3a), 3b) i 3e) dokazane u [1].

Trigonometrijska formula

$$\tan(u+v) = \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v} \quad (8)$$

vrijedi za sve  $u, v \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$  takve da je  $\tan u \tan v \neq 1$ .

Za svaki  $x \in \mathbb{R}$  postoji  $u \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$  takav da je  $u = \arctan x$ . Tada je  $\tan u = x$ .

Isto tako, za svaki  $y \in \mathbb{R}$  postoji  $v \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$  takav da je  $v = \arctan y$ . Tada je  $\tan v = y$ .

Stoga, po (8), za sve  $x, y \in \mathbb{R}$  za koje je  $xy \neq 1$ , vrijedi

$$\tan(\arctan x + \arctan y) = \frac{x+y}{1-xy}. \quad (9)$$

Primijetimo da je  $\arctan x + \arctan y \in \langle -\pi, \pi \rangle$ .

(\*) Ako je  $\arctan x + \arctan y \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ , onda iz (9) slijedi

$$\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy}.$$

Ispitajmo koji  $x, y \in \mathbb{R}$  zadovoljavaju uvjete

$$-\frac{\pi}{2} < \arctan x + \arctan y < \frac{\pi}{2},$$

odnosno uvjete

$$-\frac{\pi}{2} - \arctan x < \arctan y < \frac{\pi}{2} - \arctan x.$$

Za  $x = 0$  (odnosno  $y = 0$ ) očito svaki  $y \in \mathbb{R}$  (odnosno  $x \in \mathbb{R}$ ) zadovoljava taj uvjet.

Za  $x > 0$  je

$$-\frac{\pi}{2} < \arctan y < \frac{\pi}{2} - \arctan x < \frac{\pi}{2}$$

pa se dobivaju sljedeće ekvivalentne nejednakosti:

$$\begin{aligned} \tan(\arctan y) &< \tan\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right) \\ y &< \cot(\arctan x) \\ y &< \cot\left(\operatorname{arccot} \frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

$$y < \frac{1}{x}$$

$$xy < 1.$$

Za  $x < 0$  je

$$\frac{\pi}{2} > \arctan y > -\frac{\pi}{2} - \arctan x > -\frac{\pi}{2}$$

pa se dobivaju sljedeće ekvivalentne nejednakosti:

$$\tan(\arctan y) > \tan\left(-\frac{\pi}{2} - \arctan x\right)$$

$$y > \cot(\arctan x)$$

$$y > \cot\left(-\operatorname{arccot} \frac{1}{-x}\right)$$

$$y > -\cot\left(\operatorname{arccot} \frac{1}{-x}\right)$$

$$y > -\frac{1}{-x}$$

$$y > \frac{1}{x}$$

$$xy < 1.$$

Prema tome, uvjete

$$-\frac{\pi}{2} < \arctan x + \arctan y < \frac{\pi}{2}$$

zadovoljavaju isključivo  $x, y \in \mathbb{R}$  za koje vrijedi  $xy < 1$ .

(\*\*) Ako je  $\arctan x + \arctan y < -\frac{\pi}{2}$ , onda postoji jedinstveni  $\alpha \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$  takav da je

$$\arctan x + \arctan y = \alpha - \pi \tag{10}$$

pa, iz (9), dobivamo

$$\tan(\alpha - \pi) = \frac{x + y}{1 - xy}$$

$$\tan \alpha = \frac{x + y}{1 - xy}$$

$$\alpha = \arctan \frac{x + y}{1 - xy}.$$

Dakle, u tom slučaju je po (10)

$$\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy} - \pi.$$

Nađimo za koje  $x, y \in \mathbb{R}$  je ispunjen uvjet

$$\arctan x + \arctan y < -\frac{\pi}{2}.$$

Taj je uvjet moguć samo ako je  $\arctan x < 0$  (odnosno ako je  $x < 0$ ) jer iz  $\arctan x \geq 0$

i  $\arctan x + \arctan y < -\frac{\pi}{2}$  slijedi  $\arctan y < -\frac{\pi}{2}$  što je nemoguće.

Imamo

$$-\frac{\pi}{2} < \arctan y < -\frac{\pi}{2} - \arctan x < 0$$

pa se dobiva niz ekvivalentnih nejednakosti:

$$\tan(\arctan y) < \tan\left(-\frac{\pi}{2} - \arctan x\right)$$

$$y < \cot(\arctan x)$$

$$y < \cot\left(-\operatorname{arccot} \frac{1}{-x}\right)$$

$$y < -\cot\left(\operatorname{arccot} \frac{1}{-x}\right)$$

$$y < -\frac{1}{-x}$$

$$y < \frac{1}{x}$$

$$xy > 1.$$

Prema tome, uvjet

$$\arctan x + \arctan y < -\frac{\pi}{2}$$

zadovoljavaju samo  $x, y \in \mathbb{R}$  za koje vrijedi  $x < 0$  i  $xy > 1$ .

(\*\*\*) Ako je  $\arctan x + \arctan y > \frac{\pi}{2}$ , onda postoji jedinstveni  $\beta \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, 0 \right\rangle$  takav da je

$$\arctan x + \arctan y = \beta + \pi \quad (11)$$

pa, iz (9), dobivamo

$$\tan(\beta + \pi) = \frac{x+y}{1-xy}$$

$$\tan \beta = \frac{x+y}{1-xy}$$

$$\beta = \arctan \frac{x+y}{1-xy}.$$

Iz (11) onda slijedi

$$\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy} + \pi.$$

Preostaje ispitati koji  $x, y \in \mathbb{R}$  zadovoljavaju uvjet

$$\arctan x + \arctan y > \frac{\pi}{2}.$$

Taj je uvjet moguć samo ako je  $\arctan x > 0$  (odnosno ako je  $x > 0$ ) jer iz  $\arctan x \leq 0$  i  $\arctan x + \arctan y > \frac{\pi}{2}$  slijedi  $\arctan y > \frac{\pi}{2}$  što je nemoguće.

Imamo

$$\frac{\pi}{2} > \arctan y > \frac{\pi}{2} - \arctan x > 0$$

pa se dobiva niz ekvivalentnih nejednakosti:

$$\tan(\arctan y) > \tan\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right)$$

$$y > \cot(\arctan x)$$

$$y > \cot\left(\operatorname{arccot} \frac{1}{x}\right)$$

$$y > \frac{1}{x}$$

$$xy > 1.$$

Prema tome,

$$\arctan x + \arctan y > \frac{\pi}{2}$$

samo ako je  $x > 0$  i  $xy > 1$ .

(•) Konačna formula je

$$\arctan x + \arctan y = \begin{cases} \arctan \frac{x+y}{1-xy} + \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} x \cdot [1 - \operatorname{sgn}(1-xy)] & \text{ako je } xy \neq 1 \\ \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} x & \text{ako je } xy = 1. \end{cases}$$

Oba slučaja moguće je obuhvatiti samo jednom formulom:

$$\arctan x + \arctan y = (1 - \delta_{xy,1}) \arctan \frac{x+y}{1-xy+\delta_{xy,1}} + \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} x \cdot [1 - \operatorname{sgn}(1-xy)].$$

Da bismo odredili formulu za računanje razlike arkus tangensa, koristimo svojstvo neparnosti funkcije arkus tangens 3a) iz [1] prema kojemu za svaki  $x, y \in \mathbb{R}$  vrijedi

$$\arctan x - \arctan y = \arctan x + \arctan(-y).$$

Sada treba samo u formuli za zbroj arkus tangensa svaki  $y$  zamijeniti s  $-y$ . Tako dobivamo

$$\arctan x - \arctan y = \begin{cases} \arctan \frac{x-y}{1+xy} + \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} x \cdot [1 - \operatorname{sgn}(1+xy)] & \text{ako je } xy \neq -1 \\ \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} x & \text{ako je } xy = -1 \end{cases}$$

ili kraće

$$\arctan x - \arctan y = (1 - \delta_{xy,-1}) \arctan \frac{x-y}{1+xy+\delta_{xy,-1}} + \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} x \cdot [1 - \operatorname{sgn}(1+xy)].$$

## 4. Zbroj i razlika arkus kotangensa

Trigonometrijska formula

$$\cot(u+v) = \frac{\cot u \cot v - 1}{\cot v + \cot u} \quad (12)$$

vrijedi za sve  $u, v \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$  takve da je  $\cot v + \cot u \neq 0$ .

Za svaki  $x \in \mathbb{R}$  postoji  $u \in \langle 0, \pi \rangle$  takav da je  $u = \operatorname{arccot} x$ . Tada je  $\cot u = x$ .

Isto tako, za svaki  $y \in \mathbb{R}$  postoji  $v \in \langle 0, \pi \rangle$  takav da je  $v = \operatorname{arccot} y$ . Tada je  $\cot v = y$ .

Stoga za sve  $x, y \in \mathbb{R}$  za koje je  $y+x \neq 0$ , prema (12), vrijedi

$$\cot(\operatorname{arccot} x + \operatorname{arccot} y) = \frac{xy-1}{y+x}. \quad (13)$$

Primijetimo da je  $\operatorname{arccot} x + \operatorname{arccot} y \in \langle 0, 2\pi \rangle$ .

Ako je  $y = -x$ , onda je

$\operatorname{arccot} x + \operatorname{arccot} y = \operatorname{arccot} x + \operatorname{arccot}(-x) \stackrel{4a)}{=} \pi - \cancel{\operatorname{arccot}(-x)} + \cancel{\operatorname{arccot}(-x)} = \pi$ ,  
pri čemu smo koristili tvrdnju 4a) dokazanu u [1].

Neka je  $y \neq -x$ .

(\*) Ako je  $\operatorname{arccot} x + \operatorname{arccot} y \in \langle 0, \pi \rangle$ , onda je po (13)

$$\operatorname{arccot} x + \operatorname{arccot} y = \operatorname{arccot} \frac{xy-1}{y+x}.$$

Uočimo da  $\operatorname{arccot} x + \operatorname{arccot} y \in \langle 0, \pi \rangle$  vrijedi samo ako je

$$0 < \operatorname{arccot} y < \pi - \operatorname{arccot} x < \pi$$

pa vrijedi sljedeći niz ekvivalentnih nejednakosti:

$$\cot(\operatorname{arccot} y) > \cot(\pi - \operatorname{arccot} x)$$

$$y > -\cot(\operatorname{arccot} x)$$

$$y > -x.$$

(\*\*) Ako je  $\operatorname{arccot} x + \operatorname{arccot} y > \pi$ , onda postoji jedinstveni  $\alpha \in \langle 0, \pi \rangle$  takav da je

$$\operatorname{arccot} x + \operatorname{arccot} y = \alpha + \pi \tag{14}$$

pa, iz (13), slijedi

$$\cot(\alpha + \pi) = \frac{xy - 1}{y + x}$$

$$\cot \alpha = \frac{xy - 1}{y + x}$$

$$\alpha = \operatorname{arccot} \frac{xy - 1}{y + x}.$$

Uvrštavanjem  $\alpha$  u (14), slijedi

$$\operatorname{arccot} x + \operatorname{arccot} y = \operatorname{arccot} \frac{xy - 1}{y + x} + \pi.$$

Uočimo da  $\operatorname{arccot} x + \operatorname{arccot} y > \pi$  vrijedi samo ako je

$$0 < \pi - \operatorname{arccot} y < \operatorname{arccot} x < \pi$$

pa vrijedi sljedeći niz ekvivalentnih nejednakosti

$$\cot(\pi - \operatorname{arccot} y) > \cot(\operatorname{arccot} x)$$

$$-\cot(\operatorname{arccot} y) > x$$

$$-y > x$$

$$y < -x.$$

(•) Konačno,

$$\operatorname{arccot} x + \operatorname{arccot} y = \begin{cases} \operatorname{arccot} \frac{xy - 1}{y + x} & \text{ako je } y > -x \\ \pi & \text{ako je } y = -x \\ \operatorname{arccot} \frac{xy - 1}{y + x} + \pi & \text{ako je } y < -x \end{cases}$$

$$= (1 - \delta_{y, -x}) \operatorname{arccot} \frac{xy - 1}{y + x + \delta_{y, -x}} + \frac{\pi}{2} [\delta_{y, -x} - \operatorname{sgn}(y + x) + 1].$$

Da bismo odredili formulu za računanje razlike arkus kotangensa, koristimo svojstvo 4a) iz [1] prema kojemu za sve  $x, y \in \mathbb{R}$  vrijedi

$$\text{arccot } x - \text{arccot } y \stackrel{4a)}{=} \text{arccot } x + \text{arccot}(-y) - \pi.$$

Tako dobivamo

$$\text{arccot } x - \text{arccot } y = \begin{cases} \text{arccot } \frac{xy+1}{y-x} - \pi & \text{ako je } y < x \\ 0 & \text{ako je } y = x \\ \text{arccot } \frac{xy+1}{y-x} & \text{ako je } y > x \end{cases}$$

$$= (1 - \delta_{y,x}) \left\{ \text{arccot } \frac{xy+1}{y-x + \delta_{y,x}} + \frac{\pi}{2} [\text{sgn}(y-x) - 1] \right\}.$$

## 5. Jedno posebno svojstvo arkus kosinusa

Dokažimo još jedno zanimljivo svojstvo funkcije arkus kosinus.

**Tvrđnja:**

Za svaki  $n \in \mathbb{N}_0$

$$f_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

je restrikcija polinoma  $P_n$  stupnja  $n$  na interval  $[-1, 1]$ .

**Dokaz:**

Ako je  $x \in [-1, 1]$ , imamo

$$f_0(x) = \cos 0 = 1 = P_0(x)$$

i

$$f_1(x) = \cos(\arccos x) = x = P_1(x)$$

Za isti  $x$  i  $n \in \mathbb{N}$  vrijedi

$$\begin{aligned} f_{n-1}(x) &= \cos[(n-1)\arccos x] = \cos(n \arccos x - \arccos x) \\ &= \cos(n \arccos x) \cos(\arccos x) + \sin(n \arccos x) \sin(\arccos x) \\ &= x f_n(x) + \sin(n \arccos x) \sin(\arccos x) \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= \cos[(n+1)\arccos x] = \cos(n \arccos x + \arccos x) \\ &= \cos(n \arccos x) \cos(\arccos x) - \sin(n \arccos x) \sin(\arccos x) \\ &= x f_n(x) - \sin(n \arccos x) \sin(\arccos x) \end{aligned}$$

pa zbrajanjem dobivamo

$$f_{n+1}(x) + f_{n-1}(x) = 2x f_n(x),$$

odnosno

$$f_{n+1}(x) = 2xf_n(x) - f_{n-1}(x).$$

Tvrđnja sada lako slijedi primjenom principa matematičke indukcije.

Naime, ako je  $f_{n-1}(x) = P_{n-1}(x)$  i  $f_n(x) = P_n(x)$ , onda je

$$f_{n+1}(x) = 2xf_n(x) - f_{n-1}(x) = 2xP_n(x) - P_{n-1}(x) = P_{n+1}(x).$$

Uočimo da je sa

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_{n+1}(x) = 2xP_n(x) - P_{n-1}(x), n \in \mathbb{N}$$

definiran niz polinoma na  $\mathbb{R}$ .

Pretpostavimo da se polinom  $P_n$  može napisati u obliku:

$$P_n(x) = \alpha[f_1(x)]^n + \beta[f_2(x)]^n.$$

Tada je

$$P_{n+1}(x) = \alpha f_1(x)[f_1(x)]^n + \beta f_2(x)[f_2(x)]^n$$

i

$$P_{n-1}(x) = \alpha \frac{[f_1(x)]^n}{f_1(x)} + \beta \frac{[f_2(x)]^n}{f_2(x)}$$

pa je

$$P_{n+1}(x) + P_{n-1}(x) = \alpha \left[ f_1(x) + \frac{1}{f_1(x)} \right] [f_1(x)]^n + \beta \left[ f_2(x) + \frac{1}{f_2(x)} \right] [f_2(x)]^n.$$

Ako su funkcije  $f_1(x)$  i  $f_2(x)$  rješenja kvadratne funkcijske jednadžbe

$$f(x) + \frac{1}{f(x)} = 2x,$$

onda za funkciju  $P_n(x) = \alpha[f_1(x)]^n + \beta[f_2(x)]^n$  vrijedi jednakost

$$P_{n+1}(x) + P_{n-1}(x) = 2xP_n(x)$$

na skupu  $D_{f_1} \cap D_{f_2}$  za bilo koji izbor konstanti  $\alpha$  i  $\beta$ .

Rješavanjem jednadžbe

$$[f(x)]^2 - 2xf(x) + 1 = 0,$$

koja je ekvivalentna jednadžbi

$$f(x) + \frac{1}{f(x)} = 2x,$$

dobivamo

$$f_{1,2}(x) = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 - 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 - 1}.$$

Dakle,

$$P_n(x) = \alpha \left( x + \sqrt{x^2 - 1} \right)^n + \beta \left( x - \sqrt{x^2 - 1} \right)^n.$$

Pokušajmo još odrediti konstante  $\alpha$  i  $\beta$  tako da za funkciju

$$P_n(x) = \alpha \left( x + \sqrt{x^2 - 1} \right)^n + \beta \left( x - \sqrt{x^2 - 1} \right)^n$$

vrijedi

$$P_0(x) = 1 \quad \text{i} \quad P_1(x) = x.$$

Ako takve konstante postoje, onda je za svaki  $n \in \mathbb{N}_0$  formulom

$$P_n(x) = \alpha \left( x + \sqrt{x^2 - 1} \right)^n + \beta \left( x - \sqrt{x^2 - 1} \right)^n$$

definiran polinom stupnja  $n$ .

Kako je  $P_0(x) = \alpha + \beta$  i  $P_1(x) = (\alpha + \beta)x + (\alpha - \beta)\sqrt{x^2 - 1}$ , dobivamo sustav

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha - \beta = 0 \end{cases}$$

s jedinstvenim rješenjem  $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ .

Prema tome, funkcija

$$P_n(x) = \frac{\left( x + \sqrt{x^2 - 1} \right)^n + \left( x - \sqrt{x^2 - 1} \right)^n}{2}$$

je za svaki  $n \in \mathbb{N}_0$  polinom stupnja  $n$ .

Konačno zaključujemo:

Ako je  $P_0(x) = 1$ ,  $P_1(x) = x$  i za svaki  $n \in \mathbb{N}$  vrijedi

$$P_{n+1}(x) = 2xP_n(x) - P_{n-1}(x),$$

onda je za svaki  $n \in \mathbb{N}_0$   $P_n(x)$  polinom stupnja  $n$  definiran formulom

$$P_n(x) = \frac{\left( x + \sqrt{x^2 - 1} \right)^n + \left( x - \sqrt{x^2 - 1} \right)^n}{2}.$$

Ako je  $|x| \leq 1$ , onda je

$$P_n(x) = \cos(n \arccos x),$$

tj. vrijedi

$$\cos(n \arccos x) = \frac{\left( x + \sqrt{x^2 - 1} \right)^n + \left( x - \sqrt{x^2 - 1} \right)^n}{2},$$

odnosno

$$\cos(n \arccos x) = \frac{(x + i\sqrt{1-x^2})^n + (x - i\sqrt{1-x^2})^n}{2} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} x^{n-2k} (x^2-1)^k.$$

Domenu funkcije arkus kosinus možemo proširiti na cijeli  $\mathbb{R}$  pomoću formule

$$\arccos x = -i \ln(x + \sqrt{x^2-1}).$$

Tu formulu možemo dobiti iz poznate formule

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$

ako postavimo dodatni zahtjev da je

$$\cos(\arccos x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

a ne samo za  $x \in [-1, 1]$ .

Naime, uvrštavanjem  $z = \arccos x$  u formulu

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

dobivamo:

$$x = \frac{e^{i \arccos x} + e^{-i \arccos x}}{2} = \frac{(e^{i \arccos x})^2 + 1}{2e^{i \arccos x}}$$

$$(e^{i \arccos x})^2 - 2xe^{i \arccos x} + 1 = 0$$

$$e^{i \arccos x} = \frac{2x + \sqrt{4x^2 - 4}}{2} = x + \sqrt{x^2 - 1}$$

$$i \arccos x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

$$\arccos x = -i \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

**Napomena:**

Rješenje

$$\arccos x = -i \ln(x - \sqrt{x^2 - 1})$$

nam ne odgovara jer je za  $x = \frac{1}{2}$

$$-i \ln \left[ \frac{1}{2} - \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1} \right] = -i \ln \left( \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -i \ln e^{i \frac{5\pi}{3}} = \frac{5\pi}{3} \neq \frac{\pi}{3} = \arccos \frac{1}{2}.$$

Za  $|x| > 1$  je

$$\cos(n \arccos x) = \frac{e^{in[-i \ln(x + \sqrt{x^2-1})]} + e^{-in[-i \ln(x + \sqrt{x^2-1})]}}{2}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^{n \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})} + e^{-n \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})}}{2} = \frac{e^{\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})^n} + e^{\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})^{-n}}}{2} \\
&= \frac{\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^n + \left(\frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}}\right)^n}{2} = \frac{\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^n + \left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)^n}{2}.
\end{aligned}$$

Tako smo pokazali da formula

$$\cos(n \arccos x) = \frac{\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^n + \left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)^n}{2}$$

vrijedi za svaki  $n \in \mathbb{N}_0$  i svaki  $x \in \mathbb{R}$ . Ta formula vrijedi za svaki  $x \in \mathbb{R}$  čak i ako je  $n$  bilo koji realan broj. Polinomi  $P_n$  se nazivaju Čebiševljevim polinomima prve vrste te imaju razne primjene u numeričkoj analizi i inženjerstvu.

## 6. Zaključak

Ciklometrijske funkcije omogućuju određivanje argumenata ako su poznate vrijednosti trigonometrijskih funkcija pa su stoga neizostavan alat u matematici i tehničkim znanostima.

U ovom radu analizirana su njihova najvažnija svojstva – međusobna povezanost preko osnovnih ciklometrijskih identiteta, formule za zbroj i razliku istih arkus funkcija te, na kraju, jedno zanimljivo svojstvo kojim je dana veza između kosinusne funkcije, arkus kosinusa i polinoma.

Tako je, između ostalog, dokazano da su arkus sinus i arkus tangens neparne funkcije. Funkcije arkus kosinus i arkus kotangens nisu ni parne ni neparne pa se iz toga može zaključiti da niti jedna ciklometrijska funkcija nije parna. Pokazano je da su funkcije arkus sinus i arkus kosinus, isto kao i funkcije arkus tangens i arkus kotangens, komplementarne jer je njihov zbroj jednak  $\frac{\pi}{2}$ .

Formulama za zbroj i razliku arkus funkcija povećana je primjena tih funkcija u rješavanju složenijih trigonometrijskih jednadžbi i problema u geometriji. Uvođenjem ovih funkcija i proučavanjem njihovih svojstava prošireno je znanje o trigonometriji što je doprinijelo postizanju velikih rezultata u raznim područjima, posebice u rješavanju problema analitičke geometrije i kompleksne analize te u rješavanju diferencijalnih jednadžbi. Neki budući radovi na sličnu temu bi se mogli baviti svojstvima ili primjenama area funkcija. To su inverzne funkcije (restrikcija) hiperboličkih funkcija, a koriste se u fizici i inženjerstvu.

### Literatura:

1. G. Kovačević (2025.): Svojstva ciklometrijskih (arkus) funkcija (1. dio), Poučak **26**(103), 53 - 64
2. B. Pavković, D. Veljan (1995.): *Elementarna matematika II*, Školska knjiga, Zagreb.
3. I. N Bronštejn, K. A. Semendjajev (1991.): *Matematički priručnik za inženjere i studente*, Tehnička knjiga, Zagreb.