

Tragom jednog zadatka

ALIJA MUMINAGIĆ¹ I JENS CARSTENSEN²

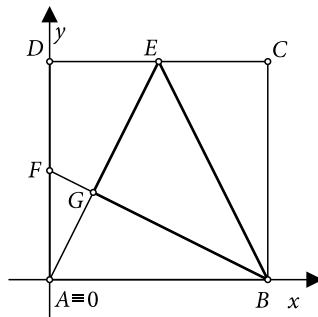
U ovom ćemo članku riješiti sljedeći geometrijski zadatak

Zadatak 1. Točke E i F polovišta su stranica \overline{CD} i \overline{AD} kvadrata $ABCD$, a točka G presječna je točka pravaca AE i BF . Treba dokazati da je trokut BGE pravokutan, za čije stranice vrijedi:

$$|GE| : |GB| : |BE| = 3 : 4 : 5.$$

Rješenje. U ovom ćemo rješenju primijeniti analitičku geometriju. Smjestimo kvadrat $ABCD$ u pravokutni koordinatni sustav kao što je prikazano na Slici 1.

Neka je $|AB| = |BC| = |CD| = |DA| = a$ i $A \equiv O(0,0)$, $B(a,0)$, $AB \equiv Ox$, $C(a,a)$, $D(0,a)$, $AD \equiv Oy$, $E\left(\frac{a}{2}, a\right)$ i $F\left(0, \frac{a}{2}\right)$.



Slika 1.

Za jednadžbe pravaca AE i BF redom vrijedi da je

$$AE \quad \dots \quad y = \frac{a}{\frac{a}{2}} \cdot x \Leftrightarrow y = 2x,$$

$$BF \quad \dots \quad y = \frac{\frac{a}{2}}{-a} \cdot (x - a) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{a}{2}.$$

¹Alija Muminagić, Danska

²Jens Carstensen, Danska

Koeficijent smjera pravca AE je $k_{AE} = 2$, a pravca BF je $k_{BF} = -\frac{1}{2}$, to jest $k_{AE} = -\frac{1}{k_{BF}}$, pa slijedi da je $AE \perp BF$. Dakle, trokut BGE je pravokutan (gdje je $\{G\} = AE \cap BF$).

Koordinate točke G dobivamo rješavanjem sustava jednadžbi

$$y = 2x$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{a}{2}$$

pa dobivamo $G\left(\frac{a}{5}, \frac{2a}{5}\right)$.

Dalje imamo da je

$$|GB| = \sqrt{\left(a - \frac{a}{5}\right)^2 + \left(0 - \frac{2a}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{16a^2}{25} + \frac{4a^2}{25}} = \sqrt{\frac{4a^2}{5}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5},$$

$$|GE| = \sqrt{\left(\frac{a}{2} - \frac{a}{5}\right)^2 + \left(a - \frac{2a}{5}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{3a}{10}\right)^2 + \left(\frac{3a}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{45a^2}{100}} = \frac{3a\sqrt{5}}{10}$$

i odavde

$$|BE| = \sqrt{|GE|^2 + |GB|^2} = \sqrt{\frac{45a^2}{100} + \frac{20a^2}{25}} = \sqrt{\frac{5a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

Konačno, slijedi da je

$$|GE| : |GB| : |BE| = \frac{3a\sqrt{5}}{10} : \frac{2a\sqrt{5}}{5} : \frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{3a\sqrt{5}}{10} : \frac{4a\sqrt{5}}{10} : \frac{5a\sqrt{5}}{10} = 3 : 4 : 5,$$

čime je dokazana tvrdnja zadatka.

Čitateljima preporučujemo da zadatak dodatno riješe planimetrijski i/ili trigonometrijski. Mi smo u rješenju primijenili analitičku geometriju jer nam to rješenje daje ideju da do rješenja možemo doći i na drugi način. Ovo drugo rješenje dajemo u „komprimiranom” obliku.

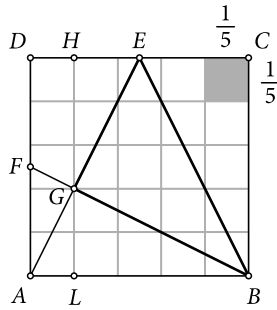
Trokut BGE smjestimo u kvadratnu mrežu kao što je prikazano na Slici 2. Promatramo pravokutne trokute GHE , BLG i BCE .

Pitagorin poučak primijenjen na te trokute daje

$$|GE|^2 = |GH|^2 + |HE|^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{10}\right)^2 = \frac{45}{100} = \frac{9}{20},$$

$$|GB|^2 = |GL|^2 + |LB|^2 = \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{4}{5},$$

$$|BE|^2 = |BC|^2 + |CE|^2 = \left(\frac{5}{5}\right)^2 + \left(\frac{5}{10}\right)^2 = \frac{5}{4}.$$



Slika 2.

Zbog $|GE|^2 + |GB|^2 = \frac{9}{20} + \frac{4}{5} = \frac{5}{4} = |BE|^2$ sada, iz drugog smjera, odnosno Pitagorina poučka slijedi da je trokut BGE pravokutan pa dodatno vrijedi:

$$|GE| : |GB| : |BE| = \frac{3}{2\sqrt{5}} : \frac{2}{\sqrt{5}} : \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{3\sqrt{5}}{10} : \frac{4\sqrt{5}}{10} : \frac{5\sqrt{5}}{10} = 3 : 4 : 5.$$

Napomena 1. Pravokutni trokut čije su duljine stranica u omjeru 3 : 4 : 5 naziva se „egipatski trokut”.

Napomena 2. Stari Egipćani poznavali su Pitagorin poučak. Za geodetske poslove Egipćani su se oslanjali na čovjeka kojeg su nazivali *harpedonopta* (u doslovnom prijevodu znači „onaj koji razvlači konopac”). Njemu su pomagala tri roba. Primjericice, konopac proizvoljne duljine razdijele na 12 jednakih dijelova, a zatim naprave trokut čije stranice imaju redom duljine od 3, 4 i 5 dijelova. Kako je $3^2 + 4^2 = 5^2$, ovaj je trokut prema Pitagorinu poučku pravokutan, uz pravi kut razapet između kateta duljina 3 i 4 (hipotenuza dolazi od grčke riječi *τείνειν*: u značenju *napinjati*). Međutim, u staroindijskim knjigama pod nazivom *Shulva Sutras* (ili *Śulbasūtras*) objašnjava se pravilo konstrukcije pravoga kuta. Da je $3^2 + 4^2 = 5^2$ znalo se i u Babilonu (a bile su tada poznate i neke druge Pitagorine trojke, pa ostaje nejasno zašto se takav trokut naziva „egipatski trokut”).

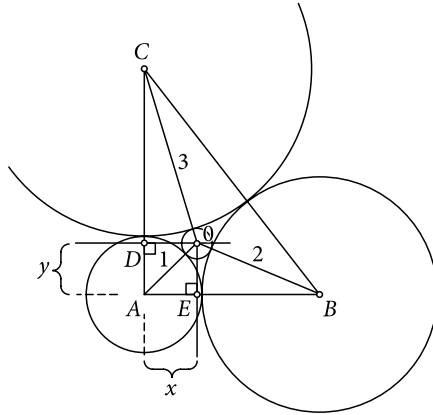
U literaturi možemo naći mnogo lijepih zadataka o egipatskom trokutu, a mi ćemo riješiti sljedeći zadatak.

Zadatak 2. Tri kružnice čiji su polumjeri redom 1, 2 i 3 dodiruju se izvana (u parovima). Treba odrediti polumjer manje kružnice koja dodiruje te tri kružnice.

Rješenje. Neka su A, B, C redom središta kružnica. Primijetimo da je trokut ABC „egipatski”, to jest 3-4-5 trokut. Neka je O središte, a r polumjer manje kružnice koja dodiruje sve tri kružnice. Nadalje, neka su točke E i D projekcije točke O na pravce AB i AC na kojima leže katete.

Stavimo da je

$$|AE| = x \quad \text{i} \quad |AD| = y.$$



Slika 3.

Tada je (vidi Sliku 3.)

$$|OA| = r+1, \quad |OB| = r+2, \quad |OC| = r+3.$$

Pitagorin Poučak primijenjen na trokute AOD i COD daje

$$x^2 = (r+1)^2 - y^2 \quad \text{i} \quad x^2 = (r+3)^2 - (4-y)^2 \quad (1),$$

to jest

$$(r+1)^2 - y^2 = (r+3)^2 - (4-y)^2 \Leftrightarrow y = 1 - \frac{r}{2}. \quad (2)$$

Uvrštavanjem (2) u (1) dobivamo

$$x^2 = (r+1)^2 - \left(1 - \frac{r}{2}\right)^2 = \frac{3r^2}{4} + 3r \quad (3).$$

U trokutima BOE i AOD je

$$y^2 = (r+2)^2 - (3-x)^2 \quad \text{i} \quad y^2 = (r+1)^2 - x^2,$$

to jest

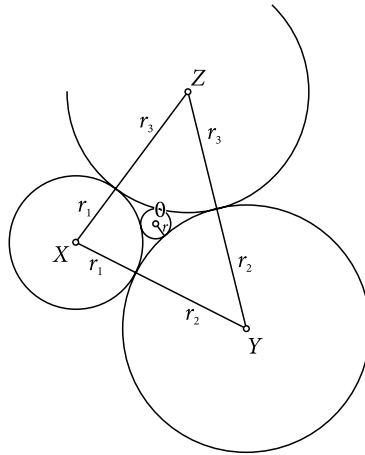
$$(r+2)^2 - (3-x)^2 = (r+1)^2 - x^2 \Leftrightarrow x = 1 - \frac{r}{3} \quad (4).$$

Uvrštavanjem (4) u (3) dobivamo da je

$$\left(1 - \frac{r}{3}\right)^2 = \frac{3r^2}{4} + 3r \Leftrightarrow 23r^2 + 132r - 36 = 0.$$

Pozitivno rješenje ove kvadratne jednadžbe je $r = \frac{6}{23}$.

U nastavku razmatramo pitanje koje se prirodno nameće. Što ako trokut ABC nije pravokutan? U tom slučaju imamo konfiguraciju kao na Slici 4. To je japanski *Sangaku problem* (svakako pronađite i pročitajte članak [5]).



Slika 4.

Rješenje je:

$$r = \frac{r_1 \cdot r_2 \cdot r_3}{r_1 \cdot r_2 + r_2 \cdot r_3 + r_3 \cdot r_1 + 2\sqrt{r_1 r_2 r_3 (r_1 + r_2 + r_3)}}. \quad (5)$$

Dokaz pokušajte izvesti sami, a ako ne uspijete, pogledajte dokaze u [6] i [7].

U Zadatku 2. imali smo $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, $r_3 = 3$, pa je

$$r = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 + 2\sqrt{1 \cdot 2 \cdot 3(1 + 2 + 3)}} = \frac{6}{23}.$$

Sada je vrijeme reći zašto smo odlučili početi članak rješavanjem Zadatka 1. Cilj nam je bio čitatelje zainteresirati da dodatno istraže literaturu o „egipatskom trokutu” i matematici u starim civilizacijama te japanskom *Sangaku*, i, konačno, o *tangencijalnim kružnicama*.

Nije moguće nacrtati više od četiri kružnice u ravnini tako da svaka od njih dodiruje sve ostale i da su sve dodirne točke različite. Postoje dvije takve mogućnosti: prva kao na Slici 4., a druga je kad se tri kružnice nalaze u unutrašnjosti velike kružnice (nacrtajte sliku). Takve kružnice nazivamo tangencijalnim.

Jasno je da iz relacije (5) možemo izračunati polumjer jedne od četiri tangencijalne kružnice kad su poznati polumjeri ostale tri. Ovom problemom bavili su se (svaki u svoje vrijeme) René Descartes³, Seki Takakazu Kōwa⁴ i Frederick Soddy⁵.

Soddy je relaciju između polumjera četiriju tangencijalnih kružnica objavio u časopisu *Nature* (Vo. 137, 1936., str. 1021) na jedan vrlo neobičan način, u stihovima poeme *The Kiss Precise*. Dokazao je sljedeću tvrdnju.

³René Descartes (1596. – 1650.), francuski filozof, tvorac analitičke geometrije

⁴Seki Takakazu Kōwa (1642. – 1708.), jedan od najcjenjenijih japanskih matematičara

⁵Frederick Soddy (1877. – 1956.), britanski kemičar i fizičar, dobitnik Nobelove nagrade

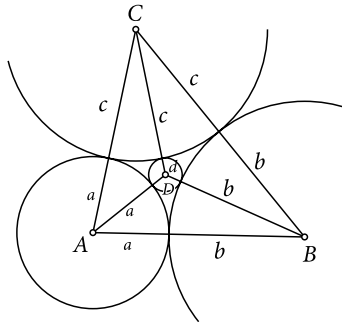
Tri kružnice sa središtima A , B i C i polumjerima a , b i c dodiruju se izvana. Mala kružnica sa središtem D i polumjerom d dodiruje sve tri kružnice izvana. Ako je $p = \frac{1}{a}$, $q = \frac{1}{b}$, $r = \frac{1}{c}$, $s = \frac{1}{d}$, onda je

$$2(p^2 + q^2 + r^2 + s^2) = (p + q + r + s)^2.$$

Dokaz. Podsjetimo se, u trokutu ABC čije su stranice a , b i c i unutarnji kutovi α , β i γ vrijedi da je

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{s(s-a)}{bc} \quad \text{i} \quad \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{(s-b)(s-c)}{bc}, \quad (6)$$

gdje je s poluopseg trokuta ABC , kao i odgovarajuće formule za kutove β i γ .



Slika 5.

Promatramo sada trokut BCD na Slici 5. U tom je trokutu $|BC| = b + c$, $|BD| = b + d$, $|CD| = c + d$, pa je $s = b + c + d$. Primjenom formule (6) u trokutu BCD dobivamo

$$\cos \left(\frac{1}{2} |\angle BDC| \right) = \frac{(b+c+d)(b+c+d-b-c)}{(b+d)(c+d)} = \frac{d(b+c+d)}{(b+d)(c+d)}, \quad (7)$$

$$\sin^2 \left(\frac{1}{2} |\angle BDC| \right) = \frac{(b+c+d-c-d)(b+c+d-b-d)}{(c+d)(b+d)} = \frac{bc}{(b+d)(c+d)}, \quad (8)$$

i na isti način

$$\sin^2 \left(\frac{1}{2} |\angle ADB| \right) = \frac{ab}{(b+d)(a+d)} \quad (9),$$

$$\sin^2 \left(\frac{1}{2} |\angle ADC| \right) = \frac{ac}{(c+d)(a+d)} \quad (10).$$

Kosinusni i sinusni poučak primijenjeni na trokut ABC daju

$$\begin{aligned} 2bc \cos \alpha &= b^2 + c^2 - a^2 \Leftrightarrow 2 \cdot 2R \sin \beta \cdot 2R \sin \gamma \cdot \cos \alpha = 4R^2 (\sin^2 \beta + \sin^2 \gamma - \sin^2 \alpha) \\ &\Leftrightarrow \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta - \sin^2 \gamma + 2 \sin \beta \sin \gamma \cos \alpha = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Kako je suma mjera kutova $\frac{1}{2}|\angle BDC| + \frac{1}{2}|\angle ADC| + \frac{1}{2}|\angle ADB|$ jednaka 180° , uvrštavanjem (7), (8), (9) i (10) u (11) dobivamo

$$\begin{aligned} & \frac{bc}{(b+d)(c+d)} - \frac{ac}{(c+d)(a+d)} - \frac{ab}{(b+d)(a+d)} + \\ & + 2\sqrt{\frac{ac}{(c+d)(a+d)}} \cdot \sqrt{\frac{ab}{(b+d)(a+d)}} \cdot \sqrt{\frac{d(b+c+d)}{(b+d)(c+d)}} = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{bc}{(b+d)(c+d)} - \frac{ac}{(c+d)(a+d)} - \frac{ab}{(b+d)(a+d)} + \frac{2a\sqrt{bcd(b+c+d)}}{(a+d)(b+d)(c+d)} = 0 \\ \Leftrightarrow & bc(a+d) - ac(b+d) - ab(c+d) + 2a\sqrt{bcd(b+c+d)} = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{a+d}{a} - \frac{b+d}{b} - \frac{c+d}{c} + 2\sqrt{\frac{d(b+c+d)}{bc}} = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{d}{a} - \frac{d}{b} - 1 - \frac{d}{c} + 2\sqrt{\frac{d(b+c+d)}{bc}} = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{d} - \frac{1}{c} + 2\sqrt{\frac{b+c+d}{bcd}} = 0 \\ \Leftrightarrow & 2\sqrt{\frac{1}{cd} + \frac{1}{bd} + \frac{1}{bc}} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} - \frac{1}{a} \\ \Leftrightarrow & 2\sqrt{rs+qs+qr} = q+r+s-p \\ \Leftrightarrow & (q+r+s-p)^2 = 4(rs+qs+qr) \\ \Leftrightarrow & q^2+r^2+s^2+p^2+2qr+2qs-2pq+2rs-2rp-2ps = 4rs+4qs+4qr \\ \Leftrightarrow & p^2+q^2+r^2+s^2 = 2qr+2qs+2pq+2rs+2rp+2ps \\ \Leftrightarrow & 2(p^2+q^2+r^2+s^2) = p^2+q^2+r^2+s^2+2qr+2qs+2pq+2rs+2rp+2ps \\ \Leftrightarrow & 2(p^2+q^2+r^2+s^2) = (p+q+r+s)^2, \end{aligned}$$

čime je dokazana tvrdnja.

Nakon objavljivanja ovog Soddyjevog dokaza, pronađeno je da je ova formula bila poznata i Descartesu, pa se stoga ponekad u literaturi naziva Descartes-Soddyjeva formula.

Čitateljima prepuštamo slučaj kad se tri kružnice nalaze unutar velike kružnice, te da u literaturi pronađu koji je problem rješavao Seki Tekakazu Kōwa, i vezu sa Descartes-Soddyjevom formulom.

Za kraj, pokušajte riješiti ove zadatke.

1. U pravokutnom trokutu ABC ($\gamma > \beta > \alpha$) označimo s O središte opisane kružnice i s U središte upisane kružnice. Pokažite da je trokut BUD pravokutan ako i samo ako vrijedi $|BC|:|CA|:|AB| = 3:4:5$.

(Ovaj je zadatak iz Poučka br. 5 (travanj 2001.), str. 66., autorica Jadranke Delač-Klepac i Jelene Gusić koje su dale jedno lijepo trigonometrijsko rješenje. Pokušajte naći planimetrijsko rješenje).

2. U pravokutnom trokutu ABC ($\gamma > \beta > \alpha$) točke E i D leže redom na kateti \overline{AC} i hipotenuzi \overline{AB} tako da je $|CE| = |CB|$ i $|BD| = |BC|$. Pokažite da je trokut CED pravokutan ako i samo ako je trokut ABC „egipatski”.

3. Odredite sve trokute čije su duljine stranica cijeli brojevi i polumjer upisane kružnice jednak 1.

Literatura:

1. Arslanagić, Š. (2017.). *Matematička čitanka 9*. Grafički promet d. o. o. Sarajevo
2. H. S. M. Coxeter (1961.). *Introduction to Geometry*. John Wiley and Sons, New York – London
3. G. Isaković Gleizer (2003.). *Povijest matematike za školu*. Školske novine i HMD, Zagreb
4. Hidetoshi Fukagawa, Dan Pedoe (1989.). *Japanese Temple Geometry Problems San Gaku*. Charles Babbage Research Centre, Winnipeg, Canada
5. Kabić, M. (2012.). Sangaku problemi – geometrijski problemi u japanskim hramovima, 1. dio, *Matematika i škola* 13 (64)
6. Prithwijit De (2009.). Radii of Touching Circles: A Trigonometric Solution. *Mathematical Spectrum* 41(2)
7. Hanjš, Ž., Jurić, N. (2010.). Geometrijsko rješenje jednadžbe. *Matematičko-fizički list* 61 (242) (str. 83 – 86)