Koje je boje Sunce i zašto nema zelenih zvijezda?

Petar Žugec[1], *Filip Grgečić*[2]

Koje je boje Sunce?

Kada pitamo *koje je boje Sunce*, vrlo vjerojatno prvo pomislimo: *žute*. No to je odgovor na sasvim drugo pitanje: *kako nam izgleda Sunce dok ga gledamo s površine Zemlje usred bijela dana*? Ovo se pitanje od početnoga razlikuje čak u četiri stavke, koje zajednički dovode do odgovora *žuto*: (A) izgleda, (B) nama, (C) s površine Zemlje, (D) usred bijela dana. Na kraju krajeva, žutim nam se ne čini samo Sunce, već prividni vijenac blještavila koji ga okružuje dok ga pokušavamo gledati postrance. Da pokušamo izravno gledati u svoju zvijezdu, odmah bismo se našli zaslijepljenima. Osim toga, na žutu boju Sunca možemo računati samo usred bijela dana jer svi znamo da je u rano jutro i u kasnu večer prividna boja Sunca bliža crvenoj. Taj *privid* boje Sunca, od žute do crvene, nastaje iz istih razloga zbog kojih nam se dnevno nebo čini plavim. Među osnovnim razlozima, pored samog spektra Sunčeva zračenja, nalaze se mehanizmi apsorpcije i raspršenja svjetlosti u atmosferi (Rayleighovo raspršenje [1]) i spektralna osjetljivost ljudskog oka [2] (razlike u osjetljivosti oka na različite boje). U te mehanizme nećemo dalje ulaziti. Izvrsnu razradu ove teme čitatelj može naći u domaćoj zbirci [3].

Sljedeći odgovor koji nam vjerojatno pada na pamet jest da je Sunce bijele boje. Iako načelno točan, ovaj odgovor mogao bi nam se učiniti ispraznim jer bijela nije *čista* boja: ne postoji valna duljina bijele boje. Naprotiv, bijelom doživljavamo više ili manje jednoliku *mješavinu* čistih boja. Stoga se (barem ispočetka) čini da takvim odgovorom možemo biti opravdano nezadovoljni. Mnogi će pomisliti nešto poput "znaš dobro što te pitam", misleći pod time: ako Sunce već ne sjaji isključivo jednom bojom, kojom onda sjaji *najviše*? Koja je boja u njegovu spektru najzastupljenija? Upravo ćemo se tim pitanjem ovdje pozabaviti.

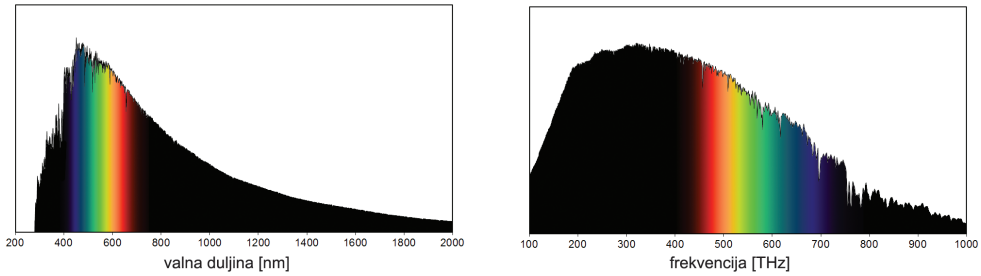
Za razmišljanje: spektar vidljive svjetlosti (spektar duginih boja) pokriva svu vidljivu svjetlost, tj. obuhvaća valne duljine sve svjetlosti raspoznatljive ljudskome oku. No možete li u njemu naći boje poput smeđe, ružičaste, maslinaste (...)? Kako to da onda takve boje raspoznajemo?

Internetskom pretragom pojma "Sunčev spektar" ili "spektar Sunčeva zračenja" vrlo brzo nalazimo slike koje u većini slučajeva odgovaraju lijevome grafu sa slike 1. On prikazuje spektar Sunčeva zračenja u ovisnosti o *valnoj duljini* (vertikalna os namjerno je izostavljena jer još ne znamo koju fizičku veličinu taj spektar predstavlja). Uz malo upornosti tu i tamo naći ćemo i spektar s desnoga grafa, koji prikazuje ovisnost Sunčeva zračenja o njegovoj *frekvenciji*. Lijevi graf jasno nam sugerira da je maksimum Sunčeva zračenja oko plave boje. (Hmm, plave? Od svih boja, plava je vjerojatno među zadnjima na koju bismo pomislili.) No desni graf prikazuje nam nešto sasvim drugo: da bi maksimum

[1] Autor je s Fizičkog odsjeka Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu; e-pošta: pzugec@phy.hr

[2] Autor je sveučilišni magistar judaistike i sveučilišni magistar ukrajinistike, diplomirao na Odsjeku za hungarologiju, turkologiju i židovske studije te Odsjeku za istočnoslavenske jezike i književnosti Filozofskog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu; e-pošta: filipgrg.dart@gmail.com

zračenja trebao biti duboko unutar infracrvenog dijela spektra. O čemu se tu radi? Je li to neka greška? Ne, nije. Oba grafa su ispravna i prikazuju "jednu te istu stvar"!



Slika 1.

Da bismo razumjeli odnos između ovih dvaju spektara – kako mogu biti toliko različiti, a opet prikazivati "istu" stvar – krenimo od osnova. Vidljiva svjetlost koju Sunce odašilje dio je njegova spektra *toplinskoga zračenja* [4]. Sve tvari na temperaturi iznad apsolutne nule emitiraju toplinsko zračenje, pri čemu svojstva njihovih spektara (količina i raspodjela zračenja po frekvencijama ili valnim duljinama) ponajviše ovise o temperaturi tijela. Opće je poznato da tijela na sobnoj ili njoj bliskoj temperaturi (poput ljudskoga tijela) najviše zrače u infracrvenom dijelu spektra. Spektralni detalji toga zračenja u određenoj mjeri mogu ovisiti i o svojstvima samog materijala ili tvari koja zrači. Tijelo koje zrači "najbolje što može", tj. tijelo čiju emisiju toplinskoga zračenja ne potiskuju sekundarni učinci, nazivamo savršenim *crnim tijelom* [5, 6]. Površina Sunca do na visoku razinu aproksimacije ponaša se poput savršenog crnog tijela. Budući da nas zanimaju samo grubi detalji njegova zračenja, u ovome članku dalje ćemo ga smatrati savršenim crnim tijelom, površinske temperature $T = 5800$ K.

Naziv *crno tijelo* dolazi zbog toga što ono, pored "maksimalnog" emitiranja toplinskog zračenja, apsorbira *sve* zračenje koje na njega upada. Vezu između te emisije i apsorpcije čini Kirchhoff zakon zračenja [7] prema kojem su emitivnost ε i apsorptivnost α danoga tijela (u termodinamičkoj ravnoteži) jednake: $\varepsilon = \alpha$. Bez ulaženja u njihove definicije, recimo samo da veličine ε i α poprimaju vrijednosti između 0 i 1, tj. 0 % i 100 %. One mjere koliko "dobro" tijelo emitira ili apsorbira zračenje: nimalo pri vrijednosti 0, a "maksimalno dobro" pri vrijednosti 1. Apsorptivnost savršenog crnog tijela *po definiciji je* $\alpha = 1$, odakle posredstvom Kirchhoffa zakona zračenja slijedi maksimalna učinkovitost emisije toplinskog zračenja: $\varepsilon = 1$.

Prisjetimo se što sve tijelo može učiniti s *upadnim* zračenjem. Može ga upiti (apsorbirati), odraziti (reflektirati) ili propustiti (transmitirati). Koliko je koji proces učinkovit mjere već spomenuti koeficijent apsorptivnosti α te koeficijenti reflektivnosti ρ i transmitivnosti τ. Kako svi odgovaraju *udjelima* zračenja koje tijelo apsrobira, reflektira ili transmitira, svi poprimaju vrijednosti između 0 i 1 te zadovoljavaju:

$$\alpha + \rho + \tau = 1. \qquad (*)$$

Kad bismo mogli "isključiti" toplinsko zračenje tijela, savršeno crno tijelo ne bi reflektiralo nikoju količinu upadnoga zračenja (jer ga sveg apsorbira) pa bi nam izgledalo crno. "Uključimo" li ponovno toplinsko zračenje, uz pretpostavku da je na dovoljno visokoj temperaturi da nezanemarivo zrači unutar vidljivog spektra, takvo

tijelo izgledalo bi nam usijano, odnosno *svijetlo*. Budući da jedno te isto tijelo može biti i crno i svijetlo, ta dva pojma pripadaju različitim kategorijama te ih ne treba miješati niti koristiti kao oprečne. Pojam suprotstavljen *svijetlome* je *tamno*. Pojam suprotstavljen *crnome* bilo koja je boja koja nije crna. Većinu objekata kojima smo okruženi, uključujući i ljudsko tijelo, *u smislu toplinskoga zračenja na danoj temperaturi* približno možemo smatrati crnim tijelima. No i dalje ih možemo vidjeti u različitim bojama zato što "šarenu" svjetlost koja dolazi s nesavršenog crnog tijela čini *svjetlost iz okoline koja se reflektira s tog tijela*, a ne toplinsko zračenje samoga tijela.

Formalnu razliku između crnog i tamnog tijela (ne u smislu svakodnevne upotrebe, već ozbiljne upotrebe u fizici) možemo odrediti temeljem relacije $(*)$. Budući da tamnim tijelom smatramo ono koje "nije svijetlo", ono ne smije ni na koji način odašiljati svjetlost putom koje bismo ga vidjeli. To znači da kad je obasjano okolnom svjetlošću, tamno tijelo ne smije je reflektirati. Stoga mu reflektivnost iščezava: $\rho = 0$. S druge strane, čak i kad je vrlo zagrijano, tamno tijelo ne smije isijavati, što znači da mu i emisivnost iščezava: $\varepsilon = 0$. Posredstvom Kirchhoffa zakona zračenja iščezava mu i apsorptivnost: $\alpha = 0$, što u kombinaciji s $\rho = 0$ prema relaciji $(*)$ povlači: $\tau = 1$. Savršeno tamno tijelo savršeno je transmitivno, tj. *prozirno* za elektromagnetsko zračenje! Dakle, u smislu formalne upotrebe u fizici, savršeno crno tijelo definirano je potpunom apsorptivnošću $(\alpha = 1)$, a savršeno tamno tijelo potpunom transmitivnošću $(\tau = 1)$. Upravo je to u pozadini imena *tamne tvari* [9] – predviđene vrste tvari koja bi trebala ispunjavati svemir, a koju još nismo uspjeli detektirati baš zato jer ne međudjeluje s elektromagnetskim zračenjem. Tamna tvar potpuno je prozirna za svjetlost koja bez i najmanje zadrške prolazi kroz nju.

Za razmišljanje: zamislite da ostavimo sjajan (uglačan) novčić na suncu. Kako to da će se bitno zagrijati ako mu je refleksivnost visoka, a prema tome apsorptivnost niska? Uzmite u obzir da koeficijenti α, ρ, τ ovise o frekvenciji zračenja, a metali su tipično sve reflektivniji prema infracrvenome području.

Najjednostavniji zakon vezan uz toplinsko zračenje – koji nam je zasigurno poznat iz škole – Stefan-Boltzmannov je zakon [8]. Zakon tvrdi da *ukupan intenzitet* I toplinskoga zračenja savršenog crnog tijela ovisi o četvrtoj potenciji njegove apsolutne temperature T, i to samo o njoj

$$I = \sigma T^4. \tag{1}$$

Faktor proporcionalnosti σ poznat je kao Stefan-Boltzmannova konstanta, iznosa $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{W^{-2}K^{-4}}$. Prije nego što razjasnimo značenje "ukupnoga", riješimo prvo pojam intenziteta. U svakodnevnom je govoru "intenzitet" jedna od najčešće zlorabljenih riječi. Koristimo je za čitav spektar značenja: kao mjeru kakve jačine, brzine, ubrzanja, sile, snage (...), čak i same energije ili količine čega. U fizici je pojam intenziteta jasno definiran i odgovara snazi (prenesenoj, emitiranoj, apsorbiranoj, propuštenoj, reflektiranoj) po jedinici površine, odnosno – posredstvom snage – energiji po jedinici površine u jedinici vremena:

$$I \equiv \frac{\mathrm{d}^2 P}{\mathrm{d}^2 A} = \frac{\mathrm{d}^3 E}{\mathrm{d}^2 A\, \mathrm{d}t}. \tag{2}$$

Ovdje P predstavlja snagu, a E energiju; A površinu, a t vrijeme. Čitatelj koji nije upoznat s pojmom miješanih derivacija ne treba se zamarati detaljima ovog izraza jer ih nećemo dalje koristiti. No moramo ga navesti radi jasnoće i potpunosti. Pod intenzitetom toplinskoga zračenja, naravno, govorimo o energiji zračenja emitiranoj u jedinici vremena

s danog elementa površine tijela. Konačno, pod pojmom "ukupnoga" intenziteta podrazumijevamo intenzitet zračenja *svih frekvencija* ili valnih duljina.

Frekvencija zračenja bitniji je pojam od njegove valne duljine. Iz škole svi znamo da pri prijelazu između materijala različitih indeksa loma svjetlost (općenito, elektromagnetsko zračenje) mijenja svoju valnu duljinu. Ali frekvenciju ne mijenja; ona ostaje ista. U laičkoj se upotrebi prednost daje valnoj duljini jer je pojam duljine intuitivniji od pojma vremena: duljinu možemo vidjeti ili barem vizualno zamisliti, dok vrijeme doživljavamo unutarnjim osjećajem koji je nedostupan osnovnim osjetilima. Frekvencija je svojstvo izvora, dok na valnu duljinu dodatno utječu i svojstva materijala. No na obje veličine također utječu i promatračeve okolnosti: za promatrača u relativnome gibanju spram izvora zračenja, ili čak u gravitacijskome polju različitom od onoga u kojemu se nalazi izvor, zbog Einsteinove relativnosti dolazi do stvarne promjene i frekvencije i valne duljine zračenja.

Za razmišljanje: pri prijelazu iz gušćeg u rjeđe optičko sredstvo dolazi do sabijanja valne duljine svjetlosti. Razlika između indeksa loma vode i zraka dovoljno je velika da to skraćivanje bude primjetno. Stoga, ako netko iz zraka obasjava bazen vode crvenom svjetlošću, hoće li ronilac u bazenu tu svjetlost vidjeti kao crvenu ili kao zelenu?

I dok nam Stefan-Boltzmannov zakon (1) govori o ukupnome zračenome intenzitetu svih frekvencija, za očekivati je da će tijelo na danoj temperaturi odašiljati različitu količinu zračenja na različitim frekvencijama. To znači da možemo uvesti pojam *gustoće intenziteta* i_ν po jedinici frekvencije ν, koju definiramo kao

$$i_\nu(\nu) \equiv \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\nu}. \tag{3}$$

Ova gustoća – koju nazivamo i *spektrom* intenziteta ili *spektralnom gustoćom* intenziteta – određena je poznatim Planckovim zakonom zračenja [10]

$$i_\nu(\nu) = \frac{2\pi h}{c^2}\frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT}-1}, \tag{4}$$

gdje je h Planckova konstanta, c brzina svjetlosti u vakuumu, k Boltzmannova kontanta, a T apsolutna temperatura tijela. Gustoća kakvu mi koristimo normirana je tako da nam integral po svim frekvencijama daje ukupan zračeni intenzitet, odnosno reproducira Stefan-Boltzmannov zakon[3]

$$\int_0^\infty i_\nu(\nu)\mathrm{d}\nu = \frac{2\pi^5 k^4}{15h^3c^2}T^4 = \sigma T^4. \tag{5}$$

Planckov spektar (4) vrlo dobro aproksimira stvarni frekvencijski spektar Sunčeva zračenja s desnoga grafa slike 1. Stoga ćemo ga dalje koristiti kao matematički model Sunčeva spektra.

⋆ ⋆ ⋆

[3] Stefan-Boltzmannov zakon eksperimentalno je bio poznat prije Planckova zakona u njegovoj pozadini. Štoviše, Planckovo otkriće spektra (4) – kao razrješenje proslavljenog povijesnog problema *ultraljubičaste katastrofe* – jedna je od najuzbudljivih priča u razvoju fizike, koja je dovela do ubrzanog razvoja kvantne mehanike. U svakom slučaju, Planckov zakon posredstvom (5) jasno razotkriva pozadinsku strukturu Stefan-Bolzmannove konstante

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15h^3c^2},$$

koja je prije Planckova otkrića bila poznata iz mjerenja, ali je se nije moglo objasniti dubljim zakonima.

Sada napokon možemo objasniti zašto se Sunčev spektar s lijevoga grafa slike 1 – ovisan o valnoj duljini zračenja – toliko razlikuje od desnog, frekvencijskog spektra da im se maksimumi ne slažu po pitanju boje zračenja. Sasvim analogno definiciji (3) gustoće intenziteta po jedinici frekvencije, gustoću intenziteta i_λ *po jedinici valne duljine* λ definiramo kao

$$i_\lambda(\lambda) \equiv \left| \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\lambda} \right|. \tag{6}$$

Modul se pojavljuje samo zato što želimo da ta gustoća bude pozitivna, dok će se tijekom sljedećeg računa pojaviti za naše potrebe nebitan minus kojeg se ovakvom definicijom "ručno" rješavamo. Kako bismo frekvencije zračenja preračunali u valne duljine, koristimo poznatu valnu relaciju $\nu\lambda = c$, prema kojoj su frekvencija ν i valna duljina λ jednostavnih putujućih valova vezane brzinom njihova rasprostiranja – u našem slučaju brzinom svjetlosti c. Kako se definicije (3) i (6) razlikuju po veličini kojom deriviramo intenzitet, potrebna nam je veza između diferencijala $\mathrm{d}\nu$ i $\mathrm{d}\lambda$ koji čine tu razliku. Lako je nalazimo deriviranjem ovisnosti koja slijedi iz $\nu\lambda = c$:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} \implies \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\lambda} = -\frac{c}{\lambda^2} \implies \mathrm{d}\lambda = -\frac{\lambda^2}{c}\mathrm{d}\nu. \tag{7}$$

Uvrštavanjem takvog $\mathrm{d}\lambda$ u (6) nalazimo

$$i_\lambda(\lambda) = \left| -\frac{c}{\lambda^2}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\nu} \right| = \frac{c}{\lambda^2}\, i_\nu(\nu = c/\lambda). \tag{8}$$

Odavde vidimo da gustoću i_λ ne dobivamo *samo* izražavanjem frekvencije preko valne duljine unutar izraza za i_ν. Naprotiv, zbog promjene veličine po kojoj gustoću razmatramo – zbog prijelaza s gustoće *po jedinici frekvencije* na gustoću *po jedinici valne duljine* – dolazi do dodatnog "izobličenja" spektra i_λ članom λ^{-2}, stoga iz (4) i (8) imamo

$$i_\lambda(\lambda) = 2\pi hc^2 \frac{\lambda^{-5}}{e^{hc/\lambda kT} - 1}. \tag{9}$$

Uzrok ovome *nelinearna je veza* između ν i λ zbog koje se intervali jednake širine $\mathrm{d}\nu$ pri različitim frekvencijama ne preslikavaju u intervale $\mathrm{d}\lambda$ ujednačene širine. Ta netrivijalna ovisnost između širina intervala dviju veličina u nelinearnoj vezi odražava se njihovom derivacijom iz (7), ovisnom o λ. Upravo se po tome razlikuju dva spektra sa slike 1. Upravo zbog tog dodatnog "izobličenja" članom λ^{-2} odgovornim za *transformaciju širina intervala iz različitih definicija gustoće* dolazi do pomaka spektralnih maksimuma pri prijelazu s jedne veličine na drugu. Koliko treba biti oprezan pri korištenju i tumačenju pojma gustoće (nasuprot ukupnoj nakupljenoj veličini čiju gustoću razmatramo) najbolje odražava sljedeća šala:

Koliko Vatikan ima Papa po kvadratnome kilometru?

Odgovor: 2.04, zato jer je površina Vatikana 0.49 km^2.

⋆ ⋆ ⋆

Sada ćemo odrediti položaje maksimuma spektralnih gustoća i_ν i i_λ iz (4) i (9). U oba slučaja koristit ćemo pokratu

$$x \equiv \frac{h\nu}{kT} = \frac{hc}{\lambda kT} \tag{10}$$

kao zamjensku veličinu za frekvenciju $(\nu = xkT/h)$ i valnu duljinu $(\lambda = hc/xkT)$ jer će nam to olakšati bitne dijelove računa. Izražen preko x, spektar i_ν poprima oblik

$$i_\nu(\nu = xkT/h) = \frac{2\pi k^3T^3}{h^2c^2}\frac{x^3}{e^x - 1}. \tag{11}$$

Položaj njegova maksimuma – koji ćemo označiti s x_3 jer se x u brojniku pojavljuje pod trećom potencijom – nalazimo uobičajenim postupkom. Kako je tangenta na spektar u

njegovu maksimumu horizontalna (koeficijent njezina nagiba je 0), taj postupak svodi se na određivanje nultočke x_3 derivacije spektra:

$$\left.\frac{\mathrm{d}i_\nu}{\mathrm{d}x}\right|_{x_3} \propto \left.\frac{x^2[e^x(3-x)-3]}{(e^x-1)^2}\right|_{x_3} = 0 \implies e^{x_3}(3-x_3)-3=0. \tag{12}$$

Razlomački predfaktor pun konstanti iz (11) ne utječe na postupak traženja nultočke, stoga ga nismo prepisivali, već smo zadržali samo bitnu ovisnost o x. Rješenje posljednje jednadžbe iz (12) ne može se izraziti u zatvorenoj formi elementarnih funkcija. Ali lako ga određujemo numerički: $x_3 \approx 2.82144$. Za Sunce, površinske temperature $T = 5800$ K, frekvencija ν_i pri kojoj spektar i_ν postiže maksimum prema tome je:

$$\nu_i = \frac{x_3 kT}{h} = 341\,\mathrm{THz} \implies \lambda(\nu_i) = 880\,\mathrm{nm}. \tag{13}$$

Oznakom ν_i naznačili smo da ova frekvencija maksimira spektar *energijskog intenziteta* i_ν. Uskoro ćemo razmatrati alternativnu vrstu spektra pa će izbor ovakve oznake postati jasniji. Valna duljina $\lambda(\nu_i)$ ne maksimira spektar i_λ (nju tek moramo odrediti); to je naprosto valna duljina koja odgovara frekvenciji ν_i, izračunata relacijom $\lambda(\nu_i) = c/\nu_i$. Ona nam samo pomaže u prepoznavanju "boje" pri kojoj i_ν postiže maksimum jer o bojama obično razmišljamo u kontekstu valnih duljina, umjesto frekvencija: svi znamo da se spektar vidljive svjetlosti (u vakuumu) proteže ugrubo između 400 i 700 nm. Već iz te opće spoznaje možemo zaključiti da je maskimum spektralne gustoće i_ν u infracrvenom dijelu spektra, što jasno odgovara desnome grafu sa slike 1. Glatki Planckov spektar i_ν – kao najosnovniji model stvarnoga spektra sa slike 1 – prikazuje gornji desni graf s kasnije slike 2.

Ponovimo postupak maksimizacije sa spektralnom gustoćom i_λ. I nju prvo izrazimo korištenjem pokrate iz (10)

$$i_\lambda(\lambda = hc/xkT) = \frac{2\pi k^5 T^5}{h^4 c^3}\frac{x^5}{e^x-1}. \tag{14}$$

Daljnji postupak potpuno je alanogan onome s i_ν:

$$\left.\frac{\mathrm{d}i_\lambda}{\mathrm{d}x}\right|_{x_5} \propto \left.\frac{x^4[e^x(5-x)-5]}{(e^x-1)^2}\right|_{x_5} = 0 \implies e^{x_5}(5-x_5)-5=0. \tag{15}$$

Ovaj put traženu nultočku derivacije označili smo s x_5 jer se x u brojniku iz (14) pojavljuje pod petom potencijom. Jednadžba čiju nultočku ovaj put tražimo istog je oblika kao i ranije, samo s preinačenim brojevima. Stoga njezino rješenje ponovno moramo tražiti numerički: $x_5 \approx 4.96511$. Odavde za valnu duljinu λ_i koja maksimira spektar energijskog intenziteta i_λ slijedi:

$$\lambda_i = \frac{hc}{x_5 kT} = 500\,\mathrm{nm} \implies \nu(\lambda_i) = 600\,\mathrm{THz}, \tag{16}$$

gdje smo radi potpunosti izračunali i odgovarajuću frekvenciju $\nu(\lambda_i) = c/\lambda_i$. S intervala valnih duljina pojedinih boja iz kasnije tablice II možemo iščitati da se λ_i nalazi na prijelazu zelene i plave boje, što dobro odgovara lijevome grafu sa slike 1. Glatki spektar i_λ koji smo maksimirali prikazuje gornji lijevi graf[4] s kasnije slike 2.

⋆ ⋆ ⋆

[4] Raspon boja na slici 2, gdje crvena oštro završava na 700 nm, naočigled se ne slaže s onim iz kasnije tablice II u kojoj crvena završava na 740 nm. To je zato što dogovorni raspon boja iz tablice II nije nužno sasvim usklađen s paletom boja koju smo imali na raspolaganju pa smo granice vidljivoga spektra na slici 2 ručno namjestili kako bismo najbolje reproducirali položaj boja u spektru.

Budući da je valna duljina samo specifična transformacija frekvencije ($\lambda \propto \nu^{-1}$), spektralna gustoća i_λ nije ništa drugo doli gustoća intenziteta *po jedinici recipročne frekvencije*. Stoga bismo sasvim valjano mogli tražiti maksimum gustoće po jedinici *bilo koje funkcijske pretvorbe* frekvencije ili valne duljine; na primjer, gustoće $\mathrm{d}I/\mathrm{d}(\nu^2)$ po jedinici kvadrata frekvencije, ili gustoće $\mathrm{d}I/\mathrm{d}(\ln\lambda)$ po jedinici logaritma valne duljine, ili štogod drugo. I svaki put dobili bismo drukčiji i sasvim ispravan odgovor za položaj maksimuma tako definirane gustoće zračenja. A slobodnim izborom transformacije po čijoj jedinici promjene definiramo gustoću mogli bismo dobiti koji god odgovor želimo! No takvi su proizvoljni izbori bez jasne fizičke pozadine "jeftini" i nisu osobito zanimljivi. Stoga ćemo razmotriti dva dodatna kandidata za gustoću zračenja koji su vrlo dobro motivirani fizičkim razlozima.

Gustoće i_ν i i_λ koje smo do sad promatrali najizravnije se odnose na *energiju* zračenja, što se vidi iz (2). No umjesto energije zračene na danoj frekvenciji ili valnoj duljini, mogli bismo promatrati *količinu fotona* i njihovu spektralnu gustoću. Dobro je poznato da svaki foton frekvencije ν nosi nedjeljiv obrok energije $h\nu$. Ako pri frekvenciji ν imamo ukupno N fotona, tada svi zajedno nose ukupnu enegiju $Nh\nu$. Sada koristimo obrat tog pristupa: ako unutar beskonačno uskog intervala $\mathrm{d}\nu$ oko frekvencije ν očekujemo ukupnu energiju zračenja $\mathrm{d}E$ – a nose je fotoni energije $h\nu$ – tada tolikoj energiji odgovara statistički očekivan broj fotona $\mathrm{d}N$ određen s[5]

$$\mathrm{d}E = h\nu\,\mathrm{d}N = \frac{hc}{\lambda}\mathrm{d}N. \tag{17}$$

Izražavanjem $\mathrm{d}N$ preko $\mathrm{d}E$ lako nalazimo *gustoću broja fotona* bilo po jedinici frekvencije bilo po jedinici valne duljine:

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}\nu} = \frac{1}{h\nu}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\nu} \quad \text{i} \quad \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\lambda}{hc}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\lambda}. \tag{18}$$

Kako bismo uspostavili vezu s ranijim gustoćama intenziteta, gustoće broja emitiranih fotona možemo promatrati i po jedinici površine tijela s koje su emitirani i po jedinici vremena, čime dolazimo do veličina:

$$n_\nu(\nu) \equiv \frac{\mathrm{d}^4N}{\mathrm{d}^2A\mathrm{d}t\mathrm{d}\nu} = \frac{1}{h\nu}\frac{\mathrm{d}^4E}{\mathrm{d}^2A\mathrm{d}t\mathrm{d}\nu} = \frac{1}{h\nu}i_\nu(\nu), \tag{19}$$

$$n_\lambda(\lambda) \equiv \frac{\mathrm{d}^4N}{\mathrm{d}^2A\mathrm{d}t\mathrm{d}\lambda} = \frac{\lambda}{hc}\frac{\mathrm{d}^4E}{\mathrm{d}^2A\mathrm{d}t\mathrm{d}\lambda} = \frac{\lambda}{hc}i_\lambda(\lambda), \tag{20}$$

koje su u izravnoj vezi s i_ν i i_λ. Radi jednostavnosti veličine n_ν i n_λ zvat ćemo *spektralnim intenzitetima broja fotona*. Uvrštavanjem (4) i (9) u prethodne izraze nalazimo eksplicitan raspis:

$$n_\nu(\nu) = \frac{2\pi}{c^2}\frac{\nu^2}{e^{h\nu/kT}-1}, \tag{21}$$

$$n_\lambda(\lambda) = 2\pi c\frac{\lambda^{-4}}{e^{hc/\lambda kT}-1}. \tag{22}$$

Integracija bilo kojeg od prethodnih dvaju izraza:

$$\int_0^\infty n_\nu(\nu)\mathrm{d}\nu = \int_0^\infty n_\lambda(\lambda)\mathrm{d}\lambda = \frac{4\pi k^3\zeta(3)}{h^3c^2}T^3 = \sigma' T^3 \tag{23}$$

[5] Korištenjem diferencijala $\mathrm{d}N$ dozvoljavamo si očekivani broj fotona unutar intervala $\mathrm{d}\nu$ matematički tretirati kao da je necjelobrojan. To je valjan statistički pristup, gdje $\mathrm{d}N$ očito predstavlja *prosječan* broj fotona koji očekujemo unutar intervala $\mathrm{d}\nu$ (prosjeci cjelobrojnih veličina ne moraju biti cjelobrojni). Primjena takvog pristupa u stvarnoj se situaciji svodi na to da unutar *dovoljno širokog intervala frekvencija* očekujemo pojavu cijeloga broja fotona.

daje nam analogiju Stefan-Botzmannova zakona za "intenzitet broja fotona". Pri tome $\zeta(\cdot)$ predstavlja Riemannovu zeta-funkciju [11] čija je vrijednost ovdje: $\zeta(3) \approx 1.20206$. Odavde slijedi "alternativna" Stefan-Boltzmannova konstanta $\sigma' = 1.52 \cdot 10^{15}\ \mathrm{s}^{-1}\ \mathrm{m}^{-2}\ \mathrm{K}^{-4}$.

Kako vrijedi $\mathrm{d}(\nu^2) = \nu \mathrm{d}\nu$ i $\mathrm{d}(\ln\lambda) = \mathrm{d}\lambda/\lambda$, vidimo da gustoće broja fotona iz (18) možemo zapisati kao:

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}\nu} = \frac{1}{h}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}(\nu^2)} \quad \text{i} \quad \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{1}{hc}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}(\ln\lambda)},$$

što znači da one (do na multiplikativnu konstantu) odgovaraju gustoći energije po jedinici *kvardata frekvencije* ili *logaritma valne duljine*. Kako izrazi (19) i (20) nasljeđuju tu podudarnost, slijedi da n_ν i n_λ nisu ništa drugo doli spektralne gustoće "običnog" energijskog intenziteta po tako preinačenim jedinicama:

$$n_\nu = \frac{1}{h}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}(\nu^2)} \quad \text{i} \quad n_\lambda = \frac{1}{hc}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}(\ln\lambda)}.$$

Dakle, od svih mogućih transformacija frekvencije i valne duljine po kojima smo mogli promatrati spektralnu gustoću intenziteta I, priča o fotonima navela nas je na dvije istaknute među svima njima: ν^2 i $\ln\lambda$.

Maksimume spektralnih intenziteta n_ν i n_λ nalazimo istim postupkom kao i ranije. Prelaskom s frekvencije na zamjensku varijablu x iz (10) imamo:

$$n_\nu(\nu = xkT/h) = \frac{2\pi k^2 T^2}{h^2 c^2}\frac{x^2}{e^x - 1}, \tag{24}$$

nakon čega tražimo nultočku derivacije:

$$\left.\frac{\mathrm{d}n_\nu}{\mathrm{d}x}\right|_{x_2} \propto \left.\frac{x[e^x(2-x)-2]}{(e^x-1)^2}\right|_{x_2} = 0 \implies e^{x_2}(2-x_2) - 2 = 0, \tag{25}$$

koju smo ovaj put označili s x_2 jer se x u brojniku iz (24) pojavljuje pod drugom potencijom. Posljednju jednadžbu ponovno rješavamo numerički: $x_2 \approx 1.59362$. Korištenjem oznake ν_n za frekvenciju koja maksimira spektralni intenzitet n_ν sada imamo:

$$\nu_n = \frac{x_2 kT}{h} = 193\ \mathrm{THz} \implies \lambda(\nu_n) = 1558\ \mathrm{nm}. \tag{26}$$

Ponovno, $\lambda(\nu_n)$ je samo preračunata valna duljina koja odgovara toj frekvenciji, zahvaljujući kojoj lako prepoznajemo da ovaj spektar postiže maksimum u infracrvenom području. Glatki spektar n_ν i položaj njegova maksimuma s obzirom na vidljivi dio spektra prikazuje donji desni graf sa slike 2.

Još nam ostaje maksimirati n_λ. Dobro utabanim postupkom prvo prelazimo s λ na x:

$$n_\lambda(\lambda = hc/xkT) = \frac{2\pi k^4 T^4}{h^4 c^3}\frac{x^4}{e^x - 1}, \tag{27}$$

da bismo potom tražili nultočku derivacije:

$$\left.\frac{\mathrm{d}n_\lambda}{\mathrm{d}x}\right|_{x_4} = \frac{2\pi h^4 c^5}{k^4 T^4}\left.\frac{x^3[e^x(4-x)-4]}{(e^x-1)^2}\right|_{x_4} = 0 \implies e^{x_4}(4-x_4) - 4 = 0, \tag{28}$$

koju smo iz sada već očitoga razloga označili s x_4. Numeričkim rješavanjem posljednje jednadžbe ovaj put nalazimo: $x_4 \approx 3.92069$. Odavde za valnu duljinu λ_n koja maksimira

spektralni intenzitet n_λ slijedi:

$$\lambda_n = \frac{hc}{x_4 kT} = 633\,\text{nm} \implies \nu(\lambda_n) = 474\,\text{THz}. \tag{29}$$

Iz kasnije tablice II možemo iščitati da to odgovara nijansi crvene boje na prijelazu prema narančastoj. Spektar n_λ i boju koja odgovara njegovu maksimumu prikazuje donji lijevi graf sa slike 2.

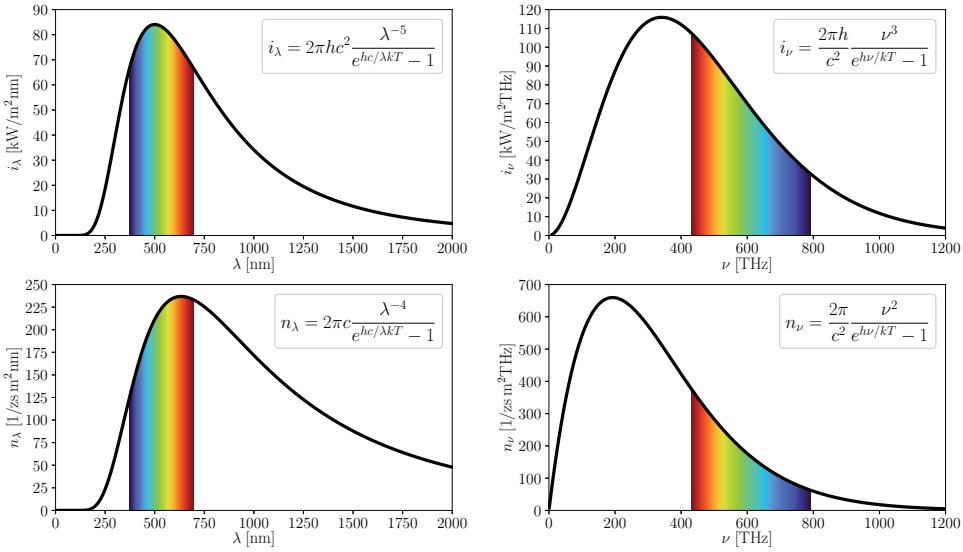
Maksimizacijski postupci iz (12), (15), (25) i (28) svi imaju isti oblik:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^p}{e^x-1}\right)\bigg|_{x_p} = \frac{x^{p-1}[e^x(p-x)-p]}{(e^x-1)^2}\bigg|_{x_p} = 0 \implies e^{x_p}(p-x_p)-p=0,$$

samo za različite početne potencije p. Iako se rješenje x_p posljednje jednadžbe ne može izraziti u zatvorenoj formi *elementarnih funkcija* – pa se može tražiti numerički – traženi x_p može se izraziti korištenjem *specijalne funkcije* $W_0(\cdot)$, tzv. glavne grane Lambertove W-funkcije [12]:

$$x_p = p + W_0\left(-pe^{-p}\right),$$

koja je dostupna u mnogim programskim paketima, gdje se ponekad vodi kao `ProductLog` funkcija.



Slika 2.

Slika 2 na koju smo se više puta pozivali pregledno prikazuje spektralne gustoće koje smo promatrali, njihov oblik i odnos položaja njihovih maksimuma s obzirom na vidljivi dio spektra. Raspon boja razapeli smo između 380 i 700 nm jer dostupna paleta boja na taj način dobro reproducira položaj boja u spektru. Među fizičkim jedinicima spektara n_ν i n_λ javlja se zanimljiva jedinica zeptosekunde: $1\,\text{zs} = 10^{-21}\,\text{s}$.

Tablica I nudi pregled rezultata iz (13), (16), (26) i (29). Pod $\lambda_{\max}$ i $\nu_{\max}$ navedeni su ili sami položaji maksimuma, poput ν_i, ili komplementarne veličine izračunate iz položaja maksimuma, poput $\lambda(\nu_i)$. Podebljani podaci upućuju na "prave" maksimizacijske vrijednosti: ν_n, ν_i, λ_n i λ_i.

Tablica I

veličina		x_n	$\lambda_{\max}$	$\nu_{\max}$	**boja**
$\boldsymbol{n}_\nu$	$\propto T^2$	$x_2 \approx 1.59362$	1558 nm	**193 THz**	infracrvena
$\boldsymbol{i}_\nu$	$\propto T^3$	$x_3 \approx 2.82144$	880 nm	**341 THz**	infracrvena
$\boldsymbol{n}_\lambda$	$\propto T^4$	$x_4 \approx 3.92069$	**633 nm**	474 THz	crvena
$\boldsymbol{i}_\lambda$	$\propto T^5$	$x_5 \approx 4.96511$	**500 nm**	600 THz	zelena/plava

Vidimo da odgovor na pitanje *koje je boje Sunce* kritično ovisi o tome koju spektralnu veličinu promatramo. Svi odgovori do kojih smo došli različiti su i svaki je ispravan! To je, naravno, zato što su sve to odgovori na *različita pitanja*. Inzistiramo li na jasnoj boji, prisiljeni smo zaključiti da je pitanje *koje je boje Sunce* sasvim bez značenja! Umjesto toga moramo postaviti jasnije pitanje: *pri kojoj boji ova ili ona spektralna gustoća postiže maksimum*? Zanima li nas i_ν, dobit ćemo jedan odgovor; u slučaju i_λ drugi odgovor, itd. I svaki je točan, ali svaki je odgovor na svoje, različito pitanje. Želimo li pak kakav "opći" odgovor na početno pitanje *koje je boje Sunce*, čini se da se na kraju ipak moramo zadovoljiti ovime: *bijele*.

Među prethodnim rezultatima skriva se još jedan zakon toplinskoga zračenja koji smo uspjeli rekonstruirati svojim računima. To je poznati Wienov zakon [13], koji kaže da je umnožak temperature T tijela i valne duljine λ_i pri kojoj gustoća intenziteta i_λ postiže maksimum konstantan

$$\lambda_i T = 2.898 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{K}.$$

Na Wienov zakon u tom obliku nabasali smo u sklopu relacije (16) koju samo treba preurediti tako da s jedne strane jednadžbe izoliramo umnožak $\lambda_i T$, za čime preostaje

$$\lambda_i T = \frac{hc}{x_5 k}.$$

Član s desne strane jednadžbe daje nam teorijsko opravdanje vrijednosti Wienove konstante. No sad primjećujemo da su relacije (13), (26) i (29) potpuno analogne (16) te da svaka od njih nudi jednakovaljanu inačicu Wienova zakona za umnožak $\lambda_n T$ i omjere ν_i/T i ν_n/T. Sljedeća tablica pregledno navodi takve inačice Wienova zakona.

	λ	ν
$\boldsymbol{i}$	$\lambda_i T = \dfrac{hc}{x_5 k} = 2.9 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{K}$	$\dfrac{\nu_i}{T} = \dfrac{x_3 k}{h} = 5.9 \cdot 10^{10}\,\mathrm{Hz/K}$
$\boldsymbol{n}$	$\lambda_n T = \dfrac{hc}{x_4 k} = 3.7 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{K}$	$\dfrac{\nu_n}{T} = \dfrac{x_2 k}{h} = 3.3 \cdot 10^{10}\,\mathrm{Hz/K}$

Glavni problem s dosadašnjim pitanjima – zbog kojeg nikako da dobijemo dosljedan odgovor o boji Sunca – bio je u tome što smo promatrali spektralne *gustoće*, pri čemu je bilo ključno *po jedinici koje veličine* definiramo gustoću. Promjena gustoće s promjenom jedinice po kojoj je definiramo – tj. promjena *raspodjele* kumulativne veličine s promjenom nezavisne varijable – ima brojne neočekivane i neintuitivne posljedice. U ovome članku prvenstveno nas je zanimao pomak maksimuma raspodjele. Primjer nekih drugih posljedica koje potencijalno bacaju novo svjetlo na raspodjelu inteligencije u društvu, čitatelj može naći u [14].

Da bismo zaobišli probleme s gustoćom, pitanje o boji Sunca mogli bismo postaviti tako da ne ovisi o njegovim spektralnim raspodjelama. Umjesto toga možemo promatrati kumulativne veličine unutar odgovarajućih intervala frekvencija ili valnih duljina. Da bismo mogli smisleno izabrati takve intervale, ograničit ćemo se samo na vidljivi dio spektra, pa makar "prava boja" Sunca (kao odgovor na neko bolje pitanje) bila izvan njega, npr. u infracrvenome području. U tu svrhu vidljivi spektar podijelit ćemo na šest osnovnih boja (tablica II). Kako se boje u vidljivom spektru kontinuirano izmjenjuju, valne su duljine koje ih razgraničavaju, naravno, stvar procjene i dogovora. Pri tome postoje različiti dogovori, među kojima (bez posebnog razloga) biramo podjelu prema CRC priručniku za kemiju i fiziku [15]. Unutar granica vidljivoga spektra između 380 nm i 740 nm neka se valne duljine k-te boje protežu od λ_{k-1} do λ_k. Promatrat ćemo ukupan udio $p_n^{(k)}$ svih fotona i ukupan udio $p_i^{(k)}$ sve energije zračene unutar intervala valnih duljina dane boje:

$$p_n^{(k)} = \frac{\int_{\lambda_{k-1}}^{\lambda_k} n_\lambda \,\mathrm{d}\lambda}{\int_{380\,\mathrm{nm}}^{740\,\mathrm{nm}} n_\lambda \,\mathrm{d}\lambda} \quad \text{i} \quad p_i^{(k)} = \frac{\int_{\lambda_{k-1}}^{\lambda_k} i_\lambda \,\mathrm{d}\lambda}{\int_{380\,\mathrm{nm}}^{740\,\mathrm{nm}} i_\lambda \,\mathrm{d}\lambda}. \tag{30}$$

Kako su ti udjeli kumulativne veličine, ne ovise o tome promatramo li intervale valne duljine, frekvencije ili kakve druge transformirane veličine. Ovdje koristimo valnu duljinu samo zato što o bojama volimo razmišljati u kontekstu valnih duljina (i to valnih duljina u vakuumu!). Tablica II prikazuje izračunate vrijednosti.

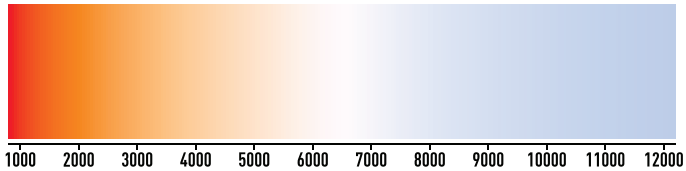
Tablica II

boja	λ **[nm]**	p_n	p_i
ljubičasta	380 – 450	14.6 %	19.5 %
plava	450 – 500	13.0 %	15.2 %
zelena	500 – 570	20.4 %	21.1 %
žuta	570 – 590	6.1 %	5.8 %
narančasta	590 – 620	9.3 %	8.5 %
crvena	620 – 740	36.6 %	29.9 %

Vidimo da crvena boja odlučno dominira i u zračenoj energiji i u broju fotona. To je velikim dijelom zato što crvena pokriva širi interval valnih duljina od ostalih boja. No eto, želimo li koliko-toliko "robustan" odgovor o dominantnoj boji Sunca unutar vidljivoga spektra, onda je taj odgovor: *crvena*.

Zašto nema zelenih zvijezda?

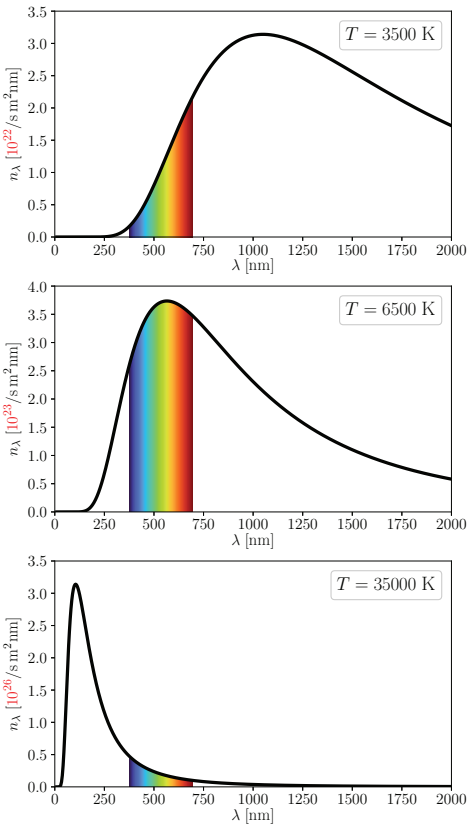
Tražeći "stvarnu" boju Sunca koristili smo spektar vidljive svjetlosti, odnosno spektar duginih boja. No u klasifikaciji zvijezda [16] – a i u nekim drugim upotrebama poput karakterizacije svjetlosti LED žarulja – često nalazimo temperaturni spektar sa slike 3, gdje brojevi na horizontalnoj osi predstavljaju temperaturu u kelvinima.



Slika 3.

Temperaturni spektar proteže se od "hladnog" do "vrućeg" dijela: od crvene, preko bijele, sve do plave boje [17]. Djelomično ga poznajemo i kao spektar užarenih metala. Tek užareni metal crveni se, a daljnjim zagrijavanjem dolazi do bijelog usijanja. Plavo usijane metale nemamo prilike vidjeti jer se na toliko visokim temperaturama svi metali rasplinu[6]. Raspodjela i klasifikacija zvjezdanih boja u skladu s temperaturnim spektrom znači da u svemiru zvijezde nalazimo u rasponu od crvenih, preko bijelih pa do plavih. Kako je sad to kompatibilno sa spektrom vidljive svjetlosti? *Kamo su nestale zelene zvijezde?*

Kako je uopće postojanje temperaturnog spektra kompatibilno sa spektrom vidljive svjetlosti? Za početak, zašto u njemu nema zelene boje? I što uopće bijela traži u njemu, s obzirom na to da ne postoji valna duljina bijele boje? Primjedba o prisutnosti bijele sugestivnija je od one o odsutstvu zelene. Bijela nam odmah daje do znanja da se temperaturni spektar ne sastoji od čistih boja dobro definiranih valnih duljina, već od *prividnih* boja kao odgovarajućih *mješavina* čistih boja. U tom kontekstu tvrdnja o crvenim, bijelim i plavim zvijezdama očito nam ne govori o "stvarnoj" boji zvijezda, već o njihovoj *prividnoj* boji, i to takvoj kakvom je raspoznaje *naš* osjetilni sustav.



Slika 4.

Kako onda razumjeti pojavu temperaturnoga spektra, krećući od spektra duginih boja kao osnove svih ostalih bojih percepcija? Jednom kad smo se upoznali sa spektrom toplinskoga zračenja, objašnjenje je vrlo jednostavno. Mi ćemo ga ilustrirati korištenjem spektralnog intenziteta n_λ broja fotona po jedinici valne duljine. Slika 4 prikazuje primjere spektralnih intenziteta za tri različite temperature. Odozgo prema dolje grafovi odgovaraju užarenim tijelima (u kontekstu naše priče zvijezdama danih površinskih temperatura) koja nam svojim toplinskim zračenjem izgledaju crveno, bijelo ili plavo[7]. *Unutar vidljivoga dijela spektra* "hladna" zvijezda najviše emitira crvenu svjetlost, a za zvjezdane standarde vruća zvijezda najviše emitira svjetlost u ljubičastome dijelu spektra. "Tople" zvijezde između tih dviju krajnosti *približno ujednačeno* emitiraju vidljivu svjetlost svih boja. Već smo time u najgrubljim crtama objasnili privid crvenih i bijelih zvijezda – bijele nam izgledaju bijelima, naravno, jer naš sustav oko-mozak ujednačenu mješavinu svih boja raspoznaje kao bijelu. Umjesto ljubičastima, najvruće zvijezde izgledaju nam plavima iz istog razloga zbog kojeg nam se dnevno nebo čini plavim: zbog različite osjetljivosti ljudskog oka na različite boje [2]. Kako osjetljivost vidnih

[6] Najviše vrelište ima volfram, oko 6000 K, koje ovisno o izvoru podataka varira unutar ± 200 K.

[7] Iako nije bitan dio objašnjenja, valja primijetiti razliku u redu veličine jedinica na vertikalnim osima grafova sa slike 4, što je odraz Stefan-Boltzmannova zakona (1) i njegove inačice za broj fotona iz (23), prema kojima energijski intenzitet zračenja i "intenzitet broja fotona" naglo rastu s porastom temperature.

stanica u našem oku naglo pada prema rubovima vidljivog spektra, opažanje ljubičaste potisnuto je u korist prve susjedne boje: plave. Osjetljivost oka, naravno, bitan je dio opažanja i ostalih boja temperaturnoga spektra. No u slučaju crvene i bijele boje ono ponajviše utječe na specifičnu nijansu sa slike 3 kakvu će naš sustav oko-mozak raspoznati.

Dakle, to što nema zelenih zvijezda ne znači da ne postoje zvijezde čiji bi maksimum zračenja bio u zelenoj svjetlosti (što god to značilo, s obzirom na to da je pojam maksimalnog zračenja otvoren slobodnom tumačenju; vidi bilješku 2 iz [14]). Naprotiv, to samo znači da nema zvijezda koje bi *nama izgledale* zelenima, tj. koje bi naš osjetilni sustav raspoznao kao zelene. Glavni uzrok tome širina je Planckova spektra zračenja: zvijezde koje intenzivno emitiraju zelenu svjetlost, *usporedivim* intenzitetom emitiraju i svu ostalu vidljivu svjetlost. A ujednačenu mješavinu svih boja naš osjetlini sustav raspoznaje kao bijelu svjetlost.

Literatura

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Rayleigh_scattering

[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Color_vision

[3] N. Poljak, F. Erhardt, M. Jerčić, *Zbirka konceptualnih zadataka iz fizike*, Školska knjiga, Zagreb, 2022.

[4] https://en.wikipedia.org/wiki/Thermal_radiation

[5] https://en.wikipedia.org/wiki/Black_body

[6] https://en.wikipedia.org/wiki/Black-body_radiation

[7] https://en.wikipedia.org/wiki/Kirchhoff's_law_of_thermal_radiation

[8] https://en.wikipedia.org/wiki/Stefan-Boltzmann_law

[9] https://en.wikipedia.org/wiki/Dark_matter

[10] https://en.wikipedia.org/wiki/Planck's_law

[11] https://en.wikipedia.org/wiki/Riemann_zeta_function

[12] https://en.wikipedia.org/wiki/Lambert_W_function

[13] https://en.wikipedia.org/wiki/Wien's_displacement_law

[14] Petar Žugec, *Provokativan članak o inteligenciji*, Osječki matematički list Vol. **24** No. **1** (2024), 25–36, https://hrcak.srce.hr/321670

[15] https://en.wikipedia.org/wiki/Spectral_color

[16] https://en.wikipedia.org/wiki/Stellar_classification

[17] https://en.wikipedia.org/wiki/Color_temperature