Normalna jednadžba parabole

Predrag Lončar[1]

Uvod

Krivulje drugog reda ili konike (elipsa, hiperbola, parabola ili par pravaca) bile su predmet izučavanja i klasificiranja. Ovdje ćemo se baviti slučajem necentralnih krivulja drugog reda, tzv. paraboličkih krivulja, najviše nedegeneriranim slučajem tj. *parabolom*, koju ćemo opisivati metodama analitičke geometrije u ravnini u pravokutnom (Kartezijevom) koordinatnom sustavu xOy. Neka je u koordinatnom sustavu xOy implicitno zadana konika *općom jednadžbom krivulje drugog reda*:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0, \tag{1}$$

gdje su a, b, c, d, e, f realni parametri takvi da je barem jedan od a, b, c različit od 0. Neka su S i δ definirani sa:

$$S = a + c \tag{2}$$

$$\delta = ac - b^2. \tag{3}$$

Uzmimo da u jednadžbi (1) vrijedi pretpostavka za paraboličke krivulje $\delta = 0$, tj.

$$ac - b^2 = 0. \tag{4}$$

Jednadžba (1) uz pretpostavke (4) je *opća jednadžba paraboličke krivulje* (*parabole ili para paralelnih pravaca*). Pretpostavka (4) povlači $S \neq 0$. Naime $\delta = 0$ povlači $S^2 = a^2 + 2ac + c^2 = a^2 + 2b^2 + c^2 \neq 0$, pa je $S \neq 0$. Veličine δ i S ne mijenjaju se pri translacijama i rotacijama koordinatnog sustava kod krivulje drugog reda, dakle i kod parabole. Krivulja (1) za koju vrijedi pretpostavka (4) i $S \neq 0$ je (nedegenerirana) parabola onda i samo onda ako je ($ae - bd \neq 0$ ili $cd - be \neq 0$). Ako za krivulju (1) za koju je $\delta = 0$ i $S \neq 0$, vrijedi $a \neq 0$, tada je ona parabola ako i samo ako je $ae - bd \neq 0$. U slučaju da je $a = 0$ i time zbog (4) $b = 0$, krivulja (1) je parabola tada i samo tada ako je $cd - be = cd \neq 0$.

Napišimo jednadžbu (1) nedegenerirane parabole u njenom normalnom obliku, kao normalnu jednadžbu parabole $Y^2 = 2pX$, $p \neq 0$. Kod te parabole pravac s jednadžbom $Y = 0$ bit će os X (os simetrije) parabole (1), a pravac $X = 0$ bit će os Y i ujedno tjemena tangenta t parabole (1). Okomite osi X i Y sijeku se pritom u tjemenu T parabole zadane s (1).

Opišimo u sustavu xOy *tjemenu jednadžbu parabole* $y^2 = 2px$. Pravac $y = 0$ (x os) je os (os simetrije) o parabole, točka $T(0,0)$, koja je presjek osi i parabole, je tjeme parabole, pravac $x = 0$ (y os) tjemena tangenta, točka $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ je fokus parabole, pravac r

[1] Autor je viši predavač u miru na Geotehničkom fakultetu u Varaždinu; e-pošta ploncar@gfv.hr

okomit na os o s jednadžbom $x = -\frac{p}{2}$ je ravnalica ili direktrisa parabole, a p je (žarišni) parametar (p je udaljenost F do r). Tjeme T parabole je jedina točka parabole u kojoj je tangenta t na parabolu okomita na os (os simetrije) o parabole. Tetiva parabole koja ide točkom F okomito na os o parabole zove se fokalna tetiva ili latus rectum. Njena duljina je $2|p|$ i ne mijenja se pri direktnim izometrijama ravnine. Neka je $R = o \cap r$. Tangente iz točke $R\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$ ravnalice r međusobno su okomite i svaka zatvara s osi o parabole kut od $45°$. One diraju parabolu u krajnjim točkama $\left(\frac{p}{2}, p\right)$ i $\left(\frac{p}{2}, -p\right)$ fokalne tetive – *latus rectuma*. Sve ovo vrijedi i u slučaju jednadžbe opće parabole (1). Definirajmo:

$$L(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f. \tag{5}$$

Jednadžbu parabole (1) pišemo pomoću (5) kao $L(x,y) = 0$. Neka je:

$$K(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 \tag{6}$$

kvadratni član jednadžbe (1). S $T(x_0, y_0)$ označavat ćemo tjeme parabole P, s $F(x_F, y_F)$ fokus (žarište) parabole P, a s r njenu ravnalicu. Okomica iz F na r je os o parabole. S R ćemo označiti nožište okomice iz F na ravnalicu r, tj. $R = o \cap r$. Točke F i R su simetrične s obzirom na tjeme T parabole P. Definicijsko svojstvo parabole P je

$$P = \{P \in E^2 : d(P,F) = d(P,r)\}. \tag{7}$$

Iz (7) izlazi da je parabola zadana fokusom F i ravnalicom r. K tome (7) omogućava crtanje parabole ravnalom i šestarom. Parabola je dvoznačno zadana i s 4 točke, od kojih nikoja ne leži u zatvorenom trokutu koji čine preostale tri točke. Uz uvjete (4) ili nijedan od koeficijenata a, b, c nije jednak nuli ili su točno dva od njih jednaki nuli. U slučaju da su dva od njih nula je $b = 0$, $a = 0$ i $c \neq 0$ ili je $b = 0$, $c = 0$ i $a \neq 0$. U daljnjem pretpostavljamo da je $a \neq 0$, jer npr. slučaj $b = 0$, $a = 0$ i $c \neq 0$ svodimo dijeljenjem jednadžbe (1) s c i potom samo translacijama osi x i y na oblik $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$, pa potom na oblik $Y^2 = 2pX$, $p \neq 0$. Zbog $S \neq 0$ pretpostavljeni uvjet $a \neq 0$ je ekvivalentan uvjetu $aS = a^2 + b^2 > 0$. U daljnjem pretpostavljamo da u jednadžbi (1) vrijede uvjeti:

$$a \neq 0, \quad ac - b^2 = 0, \quad S \neq 0, \quad ae - bd \neq 0, \tag{8}$$

tako da je jednadžbom (1) zadana parabola P. U analiziranju parabole P korisno je $L(x,y)$ iz (5) prvo pomnožiti s $\frac{1}{S} = \frac{1}{a+c} = \frac{a}{a^2+b^2} = \frac{c}{b^2+c^2}$ i parabolu (1) zapisati u obliku $\frac{L(x,y)}{S} = 0$, koji je nesređen normalni oblik jednadžbe (1) parabole. Zapis parabole time glasi

$$a_0x^2 + 2b_0xy + c_0y^2 + 2d_0x + 2e_0y + f_0 = 0, \tag{9}$$

pri čemu je

$$a_0 = \frac{a}{S}, \quad b_0 = \frac{b}{S}, \quad c_0 = \frac{c}{S}, \quad d_0 = \frac{d}{S}, \quad e_0 = \frac{e}{S} \quad \text{i} \quad f_0 = \frac{f}{S}. \tag{10}$$

U zapisu (9) vrijedi $a_0c_0 - b_0^2 = 0$ i $S_0 = a_0 + c_0 = 1$ i zato $0 \leq a_0 \leq 1$ i $0 \leq c_0 \leq 1$ i $a_0 + c_0 = 1$. U tom zapisu imamo $a_0^2 + b_0^2 = a_0S_0 = a_0$ i $b_0^2 + c_0^2 = c_0S_0 = c_0$. Sve to pojednostavnjuje izračune. Jednadžbu (9) parabole (1) za koju je $0 \leq a \leq 1$, $0 \leq c \leq 1$ i $a + c = 1$ zvat ćemo normaliziranom jednadžbom parabole (1).

Zbog pretpostavke (4) za kvadratni član $K(x,y)$ (6) vrijedi

$$\frac{K(x,y)}{S} = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}y\right)^2. \tag{11}$$

Jednadžbu parabole (1) možemo, nakon dijeljenja s $S = a + c$ i korištenja (4) i (11), pisati ovako

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}y\right)^2 + 2\frac{d}{S}x + 2\frac{e}{S}y + \frac{f}{S} = 0. \tag{12}$$

U zapisu (12) koristili smo $\frac{c}{S} = \frac{b^2}{aS} = \frac{b^2}{a^2+b^2}$ (vidi (4)). Jednadžbu (12) svest ćemo, prvo pomoću rotacije, pa onda translacije, na normalnu jednadžbu,

$$Y^2 = 2pX. \tag{13}$$

U zapisu (12) jednadžbe parabole (9) s oznakama (10) je $S = 1$ i $K(x,y)$ je kvadrat linearne funkcije. Pravac $ax + by = 0$ s koeficijentom smjera $-\frac{a}{b}$, paralelan je s osi o parabole, koja također ima koeficijent smjera $-\frac{a}{b}$. Neka je ϑ kut između osi o i x, $\vartheta = \sphericalangle(o,x)$. Tada je $\operatorname{tg}\vartheta = -\frac{a}{b}$. Po dogovoru uzimamo da $\sin\vartheta$ ima predznak suprotan predznaku od a. Odatle imamo

$$\sin\vartheta = -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad \cos\vartheta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \tag{14}$$

$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta} = -\frac{a}{b}$, $\sin^2\vartheta = \frac{a}{a+c} = a_0$ i $\cos^2\vartheta = \frac{c}{a+c} = c_0$ (vidi (10)).

Ovdje svodimo jednadžbu (1) parabole na normalnu jednadžbu $Y^2 = 2pX$ poštujući gornji dogovor. Pri tome je $Y = 0$ normalna jednadžba osi o parabole, a $X = 0$ je normalna jednadžba njene tjemene tangente t. Vrijedi $Y^2 - 2pX = \frac{L(x,y)}{S}$ (vidi (5) i (12)). Osim toga Y^2 je jedinstveno određen, kao i $2pX$.

Rotacija xOy sustava

Uzmimo da je desni sustav xOy zarotiran oko ishodišta $O(0,0)$ za kut ϑ određen formulama (14) u smjeru suprotnom kazaljke na satu. Neka je dana točka T koja ne mijenja svoj položaj u ravnini i koja ima koordinate $L(x,y)$ u sustavu xOy i $L'(x',y')$ u sustavu $x'Oy'$, $L' \equiv L$. Tada vrijede ove formule:

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\vartheta + y\sin\vartheta \\ y' &= -x\sin\vartheta + y\cos\vartheta \end{aligned} \tag{15}$$

i

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\vartheta - y'\sin\vartheta \\ y &= x'\sin\vartheta + y'\cos\vartheta. \end{aligned} \tag{16}$$

Primjer. Nađimo normalnu jednadžbu i nacrtajmo graf parabole P zadane jednadžbom:

$$x^2 + 4xy + 4y^2 - 30x - 10y - 25 = 0. \tag{17}$$

U ovom primjeru je $a = 1$, $b = 2$, $c = 4$, $d = -15$, $e = -5$, $f = -25$. Odatle $\delta = 0$, $S = a + c = 5 \neq 0$, $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5}$, $ae - bd = 25$, $ad + be = -25$. Kako je $a \neq 0$, $ac - b^2 = 0$, $S \neq 0$, $ae - bd \neq 0$, ispunjeni su uvjeti (8) i krivulja (17) je parabola. Imamo $\operatorname{tg}\vartheta = -\frac{a}{b} = -\frac{1}{2}$, $\sin\vartheta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ po dogovoru i $\cos\vartheta = \frac{2}{\sqrt{5}}$ (vidi (14)), pri čemu je $\vartheta = \sphericalangle(o, x)$. Formule rotacije (15) su:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{2}{\sqrt{5}}x - \frac{1}{\sqrt{5}}y \\ y' &= \frac{1}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}}y. \end{aligned} \tag{18}$$

Formule rotacije (16) su:

$$\begin{aligned} x &= \frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y' \\ y &= -\frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y'. \end{aligned} \tag{19}$$

Podijelimo sada jednadžbu parabole (17) sa $S = 5$:

$$\frac{1}{5}x^2 + \frac{4}{5}xy + \frac{4}{5}y^2 - 6x - 2y - 5 = 0. \tag{20}$$

Normaliziranu jednadžbu (20) možemo pisati (vidi (12))

$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}}y\right)^2 - 6x - 2y - 5 = 0. \tag{21}$$

U rotirani sustav $x'Oy'$ prelazimo tako da uvrstimo (19) u jednadžbu (21). Imamo

$$y'^2 - 6\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y'\right) - 2\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y'\right) - 5 = 0, \tag{22}$$

odnosno nakon sređivanja,

$$y'^2 - 2\sqrt{5}x' - 2\sqrt{5}y' - 5 = 0. \tag{23}$$

Metodom upotpunjenja jednadžbe (23) na kvadrat, imamo

$$\left(y' - \sqrt{5}\right)^2 = 2\sqrt{5}\left(x' - (-\sqrt{5})\right). \tag{24}$$

Time smo sveli jednadžbu parabole (17) na važan oblik

$$(y' - y'_0)^2 = 2p(x' - x'_0). \tag{25}$$

Iz formule (24) imamo $y_0' = \sqrt{5}$, $p = \sqrt{5}$ i $x_0' = -\sqrt{5}$. Stavimo li u (24):

$$X = x' + \sqrt{5} = \frac{2}{\sqrt{5}}x - \frac{1}{\sqrt{5}}y + \sqrt{5}$$
$$Y = y' - \sqrt{5} = \frac{1}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}}y - \sqrt{5} \tag{26}$$

(vidi (18)), imamo normalnu jednadžbu parabole iz primjera u sustavu XTY:

$$Y^2 = 2\sqrt{5}X. \tag{27}$$

Jednadžbu (27) dobili smo rotacijom sustava xOy u sustav $x'Oy'$, pa potom translacijom (26) sustava $x'Oy'$ u sustav XTY. Pritom parabola P ne mijenja svoj položaj u ravnini. Zapis parabole (17) u obliku (24) je veoma koristan, jer nam daje u sustavu $x'Oy'$: tjeme $T'(x_0', y_0')$, tjemenu tangentu $t' \ldots x' - x_0' = 0$, os parabole $o' \ldots y' - y_0' = 0$, parametar p, fokus $F'\left(x_0' + \frac{p}{2}, y_0'\right)$ i ravnalicu $r' \ldots x' - x_0' + \frac{p}{2} = 0$. Da bi te pravce i točke zapisali u sustavu xOy, koristimo formule (18) i (19). Tjeme parabole u sustavu $x'Oy'$ je točka $T'(x_0', y_0') = T'(-\sqrt{5}, \sqrt{5})$ i $T' \equiv T$. Za točku T imamo po (19):

$$x_0 = \frac{2}{\sqrt{5}}x_0' + \frac{1}{\sqrt{5}}y_0' = -1$$
$$y_0 = -\frac{1}{\sqrt{5}}x_0' + \frac{2}{\sqrt{5}}y_0' = 3. \tag{28}$$

pa je tjeme T parabole u xOy sustavu $T(-1,3)$. Jednadžba osi o parabole (17) je $Y = 0$, tj. $y' - \sqrt{5} = 0$, odnosno $x + 2y - 5 = 0$, a jednadžba tangente t parabole (17) je $X = 0$, tj. $x' + \sqrt{5} = 0$, odnosno $2x - y + 5 = 0$ (vidi (18)). Iz jednadžbe parabole (27) vidimo da za točke parabole vrijedi $pX \geq 0$, tj. $2x - y + 5 \geq 0$ (vidi (25) i (26)).

Napomena 1. Neka je $T'(x_0', y_0')$ tjeme T u sustavu $x'Oy'$ opće parabole dane jednadžbom (9), $T' \equiv T$. U primjeru smo imali $T'(x_0', y_0') = T'(-\sqrt{5}, \sqrt{5})$. Svedemo li parabolu P na oblik $Y^2 = 2pX$, tada, uz dogovor o predznaku od $\sin\vartheta$, vrijedi:

$$Y = y' - y_0' = -x\sin\vartheta + y\cos\vartheta - y_0'. \tag{29}$$

(vidi (14)). Pokazuje se da je $y_0' = -\frac{ad + be}{S\sqrt{a^2 + b^2}}$, u ovom primjeru $y_0' = \sqrt{5}$. Tu je $Y = 0$ normalna jednadžba osi o parabole. Jedna jednadžba osi o parabole (1) je

$$ax + by + \frac{ad + be}{a + c} = 0. \tag{30}$$

Vrijedi: $p = \frac{ae - bd}{S\sqrt{a^2 + b^2}}$, u primjeru $p = \sqrt{5}$. Nadalje je

$$X = x\cos\vartheta + y\sin\vartheta - x_0', \tag{31}$$

pri čemu je $X = 0$ normalna jednadžba tjemene tangente t parabole. Veličina x_0' u (31) iznosi: $x_0' = \frac{1}{2p}\left(\frac{f}{S} - y_0'^2\right)$. U ovom primjeru je $x_0' = -\sqrt{5}$.

Izračunajmo fokus F parabole. Iz jednadžbe (27) imamo $X_F = \frac{p}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ i $Y_F = 0$. Odakle je $x_F' = \frac{\sqrt{5}}{2} - \sqrt{5} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$ i $y_F' = 0 + \sqrt{5} = \sqrt{5}$, pa je fokus u sustavu $x'Oy'$

točka $F'\left(-\frac{\sqrt{5}}{2},\sqrt{5}\right)$, $F'\equiv F$. Formule (19) daju:

$$x_F=\frac{2}{\sqrt{5}}x'_F+\frac{1}{\sqrt{5}}y'_F=0$$
$$y_F=-\frac{1}{\sqrt{5}}x'_F+\frac{2}{\sqrt{5}}y'_F=\frac{5}{2}, \tag{32}$$

pa je fokus F parabole u xOy sustavu $F\left(0,\frac{5}{2}\right)$. Na isti način nađemo i točku R, $R=o\cap r$ koja je u sustavu XTY dana s: $X_R=-\frac{p}{2}=-\frac{\sqrt{5}}{2}$ i $Y_R=0$, u $x'Oy'$ sustavu je $R'\left(-\frac{3}{2}\sqrt{5},\sqrt{5}\right)$, a u xOy sustavu po formulama (19) izlazi $R\left(-2,\frac{7}{2}\right)$. Nađimo ravnalicu r parabole. Iz jednadžbe (27) je jednadžba ravnalice r dana s $X=-\frac{p}{2}=-\frac{\sqrt{5}}{2}$. Iz prve formule od (26) slijedi $r\ldots\ x'+\frac{3}{2}\sqrt{5}=0$. Po prvoj formuli u (18) imamo normalnu jednadžbu ravnalice $r\ldots\ \frac{2}{\sqrt{5}}x-\frac{1}{\sqrt{5}}y+\frac{15}{2\sqrt{5}}=0$.

Napomena 2. Može se dokazati da normalna jednadžba ravnalice r parabole (1) glasi

$$\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}x-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}y+\frac{d^2+e^2-Sf}{2pS^2}=0 \tag{33}$$

ili, ekvivalentno

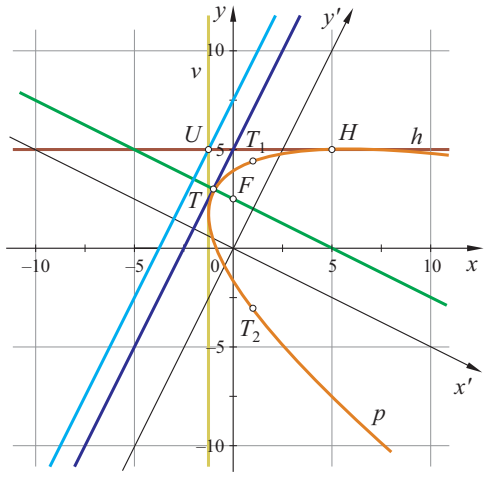
$$\frac{be-cd}{pS^2}x+\frac{bd-ae}{pS^2}y+\frac{d^2+e^2-Sf}{2pS^2}=0. \tag{34}$$

Neka je $T(x,y)$ točka ravnine, a d funkcija udaljenosti u ravnini. Provjeri se da je $d(T,F)^2-d(T,r)^2=\frac{T(x,y)}{S}$ (vidi (17) i (5)), pa je $d(T,F)^2=d(T,r)^2$ normirana jednadžba (20) parabole, u skladu sa (7). Napišimo sada jednadžbu (17) ovako

$$4y^2+2(2x-5)y+(x^2-30x-25)=0. \tag{35}$$

Diskriminanta jednadžbe (35) po y je $4(2x-5)^2-4\cdot4\cdot(x^2-30x-25)=100(4x+5)$. Točke parabole (17) postoje samo za $100(4x+5)\geq0$, tj. za $x\geq-\frac{5}{4}$. Pravac $x=-\frac{5}{4}$ je vertikalna tangenta v parabole (17). Uvrstimo li u jednadžbu (35) $x=-\frac{5}{4}$ i riješimo li je po y, dobijemo dvostruko realno rješenje $y_1=y_2=\frac{15}{8}$, pa pravac $x=-\frac{5}{4}$ dodiruje parabolu (17) u diralištu $V\left(-\frac{5}{4},\frac{15}{8}\right)$. Uvrštavajući u (35) neki $x\geq-\frac{5}{4}$ i rješavajući dobivenu kvadratnu jednadžbu po y, dobili bi dvije različite točke parabole (17) s istim x. Uzmemo li npr. $x=1$, dobijemo za (35) kvadratnu jednadžbu $4y^2-6y-54=0$, koja ima rješenja $y_1=\frac{9}{2}$ i $y_2=-3$. Time smo dobili dvije točke parabole (17): $T_1\left(1,\frac{9}{2}\right)$ i $T_2(1,-3)$. Tako možemo naći mnogo različitih točaka parabole (17).

Zapišemo li jednadžbu (17) kao kvadratni trinom u x, imamo $x^2 + 2(2y - 15)x + (4y^2 - 10y - 25) = 0$. Sada je njena diskriminanta (po x) jednaka $200(-y+5)$. Točke parabole (17) postoje samo za $200(-y + 5) \geq 0$, tj. za $y \leq 5$. Pravac $y = 5$ je horizontalna tangenta h parabole (17). Uvrstimo li u jednadžbu (17) $y = 5$ i riješimo li je po x, dobijemo dvostruko realno rješenje $x_1 = x_2 = 5$, pa pravac $y = 5$ dodiruje parabolu (17) u diralištu $H(5, 5)$. Stavimo li $y = -3$ u kvadratni trinom po x, imamo i ove točke parabole: $T_2(1, -3)$ i $T_3(41, -3)$. Pravci v i h su okomite tangente parabole i sijeku se u točki $U\left(-\frac{5}{4}, 5\right)$. Poznato je da ako je točka ravnine sjecište dviju okomitih tangenti parabole P, onda ona leži na ravnalici r parabole P. Dakle $U \in r$. Osim toga pravci h i v dijele ravninu u četiri "pomaknuta" kvadranta, a sama parabola nalazi se u četvrtom takvom kvadrantu, u kojem vrijedi $x \geq -\frac{5}{4}$ i $y \leq 5$. Na slici dolje nacrtan je graf parabole iz ovog primjera pomoću računalne grafike.



Na gornjoj slici nacrtane su i tangente t (ljubičasto), v, h (smeđe) i pravci o (zeleno) i r (plavo), a također i osi x', y' sustava $x'Oy'$ i osi X i Y sustava XTY, pri čemu je $X = o$, $X \parallel x'$, $Y = t$, $Y \parallel y'$. Nađeni pravci i točke T, V, H, T_1, T_2 pa i fokus F, omogućavaju da se na papiru nacrta približni graf parabole (17).