Rješavanje sustava linearnih diofantskih jednadžbi pomoću metode eliminacije

Petar Svirčević[1]

Odmah na početku recimo što se podrazumijeva pod sustavom linearnih diofantskih jednadžbi? To je slučaj kada sustav ima manje linearnih jednadžbi nego što taj sustav ima nepoznanica. Svi koeficijenti uz nepoznanice i slobodni članovi su cijeli brojevi. Dobro je poznato, da rang matrice sustava mora biti jednak rangu proširene matrice, kao nužan i dovoljan uvjet da sustav ima rješenje. Svi ovi nabrojeni uvjeti još nisu dovoljni da navedeni sustav ima cjelobrojno rješenje, kako ćemo to i pokazati na jednom primjeru. Recimo još, da se u [5] može pogledati način rješavanja opće linearne diofantske jednadžbe, dakle jedne jenadžbe s proizvoljnim brojem nepoznanica.

Definicija. Dan je sustav diofantskih jednadžbi

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \ldots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \ldots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & \vdots & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \ldots & + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right\}, \qquad ((a))$$

gdje je $n \geq 3$, $n > m \geq 2$. Pri tome je $\forall a_{ij} \in \mathbb{Z}$. Nadalje rang matrice danog sustava je m, dakle

$$\mathcal{R}\begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} = m. \qquad ((b))$$

Nadalje, postoji bar jedna determinanta reda $m \times m$, izdvojena iz elemenata ove matrice, čija je vrijednost različita od 0. Zato ćemo ovu metodu zvati *metodom eliminacije*. Najprije ćemo riješiti dva konkretna zadatka.

Zadatak 1. Riješimo sustav diofantskih jednadžbi:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & 2y & + & 5z & = & 1 \\ x & + & y & - & z & = & 2 \end{array}\right\}. \qquad (1)$$

Rješenje. Jasno je da, ovaj sustav zadovoljava nužan i dovoljan uvjet o egzistenciji rješenja i komponente rješenja će ovisiti o jednom parametru, npr. $t \in \mathbb{Z}$. Ako drugu jednadžbu pomnožimo s 5 i dodamo je prvoj, dobivamo jednadžbu

$$8x + 3y = 11. \qquad (2)$$

Rješenja ove jednadžbe, kada primijenimo *Euklidov algoritam*, su

$$\left.\begin{array}{rcl} x & = & 1 - 3t \\ y & = & 1 + 8t \end{array}\right\}. \qquad (3)$$

Ako relacije (3) uvrstimo u bilo koju jednadžbu sustava (1), dobivamo $z = 5t$. Dakle rješenje sustava (1) je dano beskonačnim skupom uređenih trojki oblika

$$(1 - 3t,\ 1 + 8t,\ 5t)\ \forall t \in \mathbb{Z}. \qquad (4)$$

[1] Autor je profesor u miru na Tehničkoj školi Zagreb, Zagreb; e-pošta: petar.svircevic@zg.t-com.hr

Zadatak 2. Riješimo sustav diofantskih jednadžbi

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcl} 3x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & = & 7 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & - & 5x_3 & - & 3x_4 & = & 2 \end{array}\right\}. \tag{5}$$

Rješenje. Lako provjerimo postojanje rješenja. Ako prvu jednadžbu pomnožimo s 3, a drugu s 2, te ih zbrojimo, tada dobivamo

$$13x_1 + 14x_2 - x_3 = 25. \tag{6}$$

Komponente rješenja od (6) su $x_1 = t_1$, $x_2 = t_2$, $x_3 = 13t_1 + 14t_2 - 25$, a ako njih uvrstimo u bilo koju od jednadžbi (5) dobivamo $x_4 = -21t_1 - 22t_2 + 41$. Prema tome rješenje sustava (5) je

$$(t_1,\ t_2,\ 13t_1 + 14t_2 - 25,\ -21t_1 - 22t_2 + 41)\ \ \forall t_1,\ t_2 \in \mathbb{Z}, \tag{7}$$

što lako provjerimo. Ako se komponente uređene četvorke (7) uvrste u zadane jednadžbe, vidimo da ih zadovoljavaju.

Riješimo pomoću iznesene metode nekoliko zadataka.

Zadatak 3. Pomoću metode eliminacije riješimo sustav diofantskih jednadžbi:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 3 \end{array}\right\}. \tag{8}$$

Rješenje. Eliminacijom nepoznanice x_4 iz sustava (8) dobijemo novi sustav:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} 5x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & = & 4 \\ 7x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & = & 8 \end{array}\right\}, \tag{9}$$

a iz njega eliminacijom nepoznanice x_3 dobijemo diofantsku jednadžbu s dvije nepoznanice

$$8x_1 + 6x_2 = 7. \tag{10}$$

No (10) nema rješenja jer $M(8,6) = 2 \not| 7$, pa slijedi da i sustav (8) nema rješenja. Jasno je, da smo mogli uzimati i druge eliminacije, tj.nepoznanice eliminirati drugim redom i opet bi došli do zaključka da sustav nema rješenja. Naime, ako se eliminira nepoznanica x_1 iz (8) dobije se sustav:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} x_2 & + & 8x_3 & + & 3x_4 & = & 3 \\ 5x_2 & + & 8x_3 & + & 7x_4 & = & 3 \end{array}\right\}.$$

Ako eliminiramo nepoznanicu x_2 dobijemo jednadžbu $8x_3 + 2x_4 = 3$, a i ta jednadžba nema rješenja, jer $M(8,2) = 2 \not| 3$.

Zadatak 4. Pomoću metode eliminacije riješimo sustav diofantskih jednadžbi

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & - & x_4 & + & 2x_5 & = & 1 \\ 3x_1 & + & 5x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & - & 3x_5 & = & 4 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & - & 5x_5 & = & 3 \end{array}\right\}. \tag{11}$$

Rješenje. Iz (11) dobijemo sustav:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcl} 12x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 11 \\ -12x_1 & - & 19x_2 & + & 19x_3 & + & x_4 & = & -11 \end{array}\right\}, \tag{12}$$

gdje je $(12)_1 \equiv 3\cdot(11)_1 + 2\cdot(11)_2$, a $(12)_2 \equiv (-5)\cdot(11)_2 + 3\cdot(11)_3$. Iz (12) slijedi $-18x_2 + 18x_3 = 0$, ili

$$x_2 = x_3 = t_2. \tag{13}$$

Ako uvrstimo (13) u $(12)_1$ ili $(12)_2$ dobivamo

$$x_4 = -11 + 12t_1. \tag{14}$$

Uvrstimo (13) i (14) u bilo koju od jednadžbi (11) slijedi

$$x_5 = -5 + 5t_1 + t_2, \tag{15}$$

dakle rješenje sustava (11) ovisi o dva parametra i rješenje je uređena petorka

$$(t_1,\ t_2,\ t_2,\ -11 + 12t_1,\ -5 + 5t_1 + t_2)\quad \forall t_1,\ t_2 \in \mathbb{Z}. \tag{16}$$

Zadatak 5. Pomoću metode eliminacije riješimo sustav diofantskih jednadžbi:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & - & z & = & 1 \\ x & + & 2y & + & 3z & = & 14 \end{array}\right\}. \tag{17}$$

Rješenje. Eliminacijom z iz (17) dobijemo jednadžbu

$$7x + 5y = 17. \tag{18}$$

Njezino rješenje je

$$\left.\begin{array}{rcl} x & = & 6 - 5t \\ y & = & -5 + 7t \end{array}\right\}. \tag{19}$$

Uvrstimo li (19) u bilo koju od jednadžbi (17) dobivamo $z = 6 - 3t$ i rješenje od (17) je

$$(6 - 5t,\ -5 + 7t,\ 6 - 3t)\quad \forall t \in \mathbb{Z}. \tag{20}$$

Zadatak 6. Pomoću metode eliminacije riješimo sustav diofantskih jednadžbi

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 3x_1 & + & x_2 & + & 7x_3 & + & 3x_4 & - & 4x_5 & = & 16 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 6x_3 & + & 3x_4 & - & 2x_5 & = & 9 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & 3x_4 & + & 2x_5 & = & 4 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & - & 3x_5 & = & 9 \end{array}\right\}. \tag{21}$$

Rezultat.

$$(t,\ t-2,\ -3t+3,\ 3t-1,\ -2t)\quad \forall t \in \mathbb{Z}. \tag{22}$$

Napomena. Ako bi u (22) izvršili specijalizaciju za $t = 0$, dobili bi partikularno rješenje $(0, -2, 3, -1, 0)$. Lako se pokaže da ta uređena petorka zadovoljava sve jednadžbe u sustavu (21).

Literatura

[1] F. Ayres, Jr., *Matrices*, Shaum's Outline Series, McGraw-Hill 1962.

[2] Danilo Blanuša, *Viša matematika* I dio, Prvi svezak, Zagreb 1970.

[3] Andrej Dujella, *Uvod u teoriju brojeva*, PMF, Matematički odsjek, Zagreb.

[4] Dragoslav S. Mitrinović, *Matrice i determinante*, NK, Beograd 1972.

[5] Petar Svirčević, *Eksplicitno rješenje opće linearne diofantske jednadžbe na jedan drugačiji način*, Matematičko-fizički list, 75 3/299, Zagreb, 2024./25.