ZADATCI I RJEŠENJA

Redakcija, iz tehničkih razloga, daje ovo upozorenje:

Krajnji rok za primanje rješenja iz ovog broja je 31. prosinca 2026. Rješenja (i imena rješavatelja) bit će objavljena u br. 3/307.

Ujedno molimo da pripazite na upute rješavateljima koje su na str. 72.

A) Zadatci iz matematike

4099. Postoje li realni brojevi u, v, w, x, y, z takvi da je

$$u^2+v^2+w^2+3(x^2+y^2+z^2)=6$$
$$ux+vy+wz=2.$$

4100. Dokaži da za svake pozitivne realne brojeve a, b, c vrijedi nejednakost

$$\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{c+a}+\frac{a^2+b^2}{a+b}\geq a+b+c.$$

4101. Umjesto da se kreće duž dvije susjedne stranice pravokutne livade, dječak je krenuo po dijagonali i skratio put za polovicu dulje stranice. Koliki je omjer kraće i dulje stranice pravokutne livade?

4102. Ako su a, b, c duljine stranica trokuta čija je površina S, dokaži

$$a^2+b^2+c^2-(a-b)^2-(b-c)^2-(c-a)^2\geq 4\sqrt{3}S.$$

4103. Odredi i skiciraj u kompleksnoj ravnini skup

$$S=\left\{z\in\mathbb{C}:\frac{1}{z}+\frac{1}{\overline{z}}\leq 2,\ ||z-1|-|z+1||\leq 1.\right\}$$

4104. Ako su M, N polovišta dijagonala $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ četverokuta $ABCD$, dokaži

$$|AC|^2+|BD|^2$$
$$=|AB|^2+|BC|^2+|CD|^2+|DA|^2-4|MN|^2.$$

Što se dobiva ako je $ABCD$ paralelogram?

4105. Ako je duljina veće baze jednakokračnog trapeza jednaka duljini dijagonale i duljina manje baze jednaka duljini visine, koliki je omjer duljina manje i veće baze?

4106. Unutar manjeg dijela kružnice kojeg određuje tetiva $\overline{AB}$ upisan je pravokutnik kojem jedna stranica leži na njoj. Kolika je njegova najveća površina, ako je udaljenost tetive od središta kružnice jednaka h, a polumjer kružnice je R?

4107. Dva pravokutna trokuta ABC i ABD imaju zajedničku hipotenuzu $\overline{AB}$. Pravci AC i BD sijeku se u točki E, a AD i BC u F. Dokaži jednakosti:

$$|AE|\cdot|EC|=|BE|\cdot|ED|,$$
$$|AF|\cdot|FD|=|BF|\cdot|FC|.$$

4108. Riješi sistem jednadžbi:

$$(y+1)^x=10\,000$$
$$(y^2-1)^{2x-2}=\frac{(y-1)^{2x}}{(y+1)^x}.$$

4109. U jednakostraničnom trokutu ABC, točke M i N su polovišta stranica $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$. Pravac MN siječe opisanu kružnicu trokuta ABC u točkama K i L, te pravci CK i CL sijeku pravac AB u P i Q. Dokaži

$$|PA|^2\cdot|QB|=|QA|^2\cdot|PB|.$$

4110. Neka su a i b relativno prosti cijeli brojevi veći od 1. Dokaži da ne postoji cijeli broj $n\geq 0$ za koji je $a^{2n}+b^{2n}$ djeljivo s $a+b$.

4111. Na koliko načina se može podijeliti špil od 52 karte na 13 igrača po 4 karte, tako da jedan od njih dobije sve četiri boje, a svaki od ostalih dobije sve četiri karte iste boje?

4112. Baza piramide je jednakokračan trokut s krakom a i kutom pri osnovici α ($\alpha>45^\circ$). Svi bočni bridovi nagnuti su prema ravnini baze pod kutom β. Odredi površinu poprečnog presjeka te piramide ravninom koja prolazi visinom piramide i vrhom jednog od kutova α.

B) Zadatci iz fizike

OŠ – 570. Komad se metala mase 2 kg zagrijavao 5 min grijačem snage 500 W pri čemu mu se temperatura povećala od 10 na 90 °C. Korisnost grijača je 80 %. Nakon toga je brzo uronjen u izoliranu posudu u kojoj je bila tekućina mase 1 kg i temperature 20 °C. Temperatura tekućine se povećala na 46.6 °C. Koja je to tekućina?

OŠ – 571. Na izvor napona 24 V spojeni su otpornici $R_1 = 8\ \Omega$, $R_2 = 12.6\ \Omega$ i $R_3 = 10\ \Omega$. Otpornici R_1 i R_2 su spojeni paralelno, a otpornik R_3 je spojen serijski na tu paralelu. Koliki dodatni otpor treba spojiti s otpornikom R_1 tako da struja kroz njega bude dvostruko manja od struje kroz R_3? Kolika će tada biti struja kroz taj dodani otpornik, a koliki napon na njegovim krajevima?

OŠ – 572. U školskom su laboratoriju učenici pronašli bakreni uteg za kojeg pretpostavljaju da je šupalj. Masa mu je 420 g. Uteg je prevelik da stane u njihove menzure pa su mu volumen odredili pomoću sile uzgona. Objesili su ga na dinamometar i uronili u vodu. Dinamometar je mjerio silu od 3.5 N. Koliki je volumen šupljine unutar utega? Gustoća bakra je 8900 $\mathrm{kg/m^3}$, a gustoća vode 1000 $\mathrm{kg/m^3}$.

OŠ – 573. Jakov je napravio kuglicu od plastelina. Masa joj je bila 60 g, a volumen 50 $\mathrm{cm^3}$. Puštao je kuglicu da pada kroz vodu u menzuri i mjerio koliko joj treba da dođe do dna. Nakon više mjerenja dobio je da prosječno vrijeme padanja iznosi 0.77 s. Visina stupca vode u njegovoj menzuri je iznosila 30 cm. Iz svojih je podataka izračunao prosječnu silu trenja koja je usporavala kuglicu dok je tonula. Kolika je ta sila? Gustoća vode iznosi 1000 $\mathrm{kg/m^3}$.

1903. Na ploči mase 1 kg učvršćena je vertikalna šipka. O njezin vrh privezana je nit duljine 0.5 m, na čijem je kraju ovješena kuglica mase 0.2 kg. Nit je kraća od šipke, a mase su im zanemarive. Nit je u početku horizontalno zategnuta, a zatim je kuglica puštena u slobodan pad iz mirovanja. Ako između ploče i podloge nema trenja, odredi brzinu kuglice u odnosu na podlogu i u odnosu na ploču, u trenutku kad je u najnižem položaju. Koristi $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$.

(Zadatak osmislio Ivan Jukić.)

1904. Promotri isti sustav sa šipkom na ploči i s kuglicom na niti kao u prethodnome zadatku, uz iste početne uvjete. Ako je sada koeficijent statičkoga trenja između ploče i podloge jednak 0.4, hoće li tijekom pada kuglice ploča proklizati po podlozi?

(Zadatak osmislio Ivan Jukić.)

1905. Nominalna snaga električnih žarulja (npr. 100 W navedenih na žarulji) odgovara snazi koju žarulja troši kad je priključena na standardizirani napon gradske mreže od 220 V. Ako dvije žarulje nominalnih snaga 75 W i 50 W spojimo u seriju i takve ih priključimo na napon gradske mreže, kolikom snagom će svijetliti svaka od njih? Usporedite ukupnu snagu koju obje žarulje troše u serijskom spoju s nominalnom snagom svake pojedinačne.

1906. Kad bi Sunce bilo planet čvrste površine (i podnošljive temperature), tako da na njega možemo postaviti čovjeka, bi li se on na Suncu mogao ustati iz ležećeg položaja? Masa Sunca je $1.99 \cdot 10^{30}$ kg, a polumjer $6.96 \cdot 10^5$ km.

1907. Električno polje u ravnom linearno polariziranom elektromagnetskom valu koji putuje u z-smjeru opisano je izrazom:

$$\vec{E}_0 = E_x\hat{x} + E_y\hat{y}.$$

Komponente su E_x, E_y vremenski ovisne, no u svakome trenutku zadovoljavaju $E_x/E_y = 3$. Takav val upada na polarizator koji propušta komponentu električnog polja usporednu s vektorom $\hat{x} + 2\hat{y}$. Odredi omjer prolaznog i upadnog intenziteta zračenja.

1908. Prirodni klor sastoji se od 76 % izotopa $^{35}\mathrm{Cl}$ i 24 % izotopa $^{37}\mathrm{Cl}$ (molarni udjeli). Izračunaj ukupan broj atoma u uzorku klora mase 1 g. Koliki bi bio broj atoma kad bi navedeni postoci bili maseni udjeli? Za dva izotopa klora koristi molarne mase $M_{35} = 35$ g/mol i $M_{37} = 37$ g/mol.

1909. Nestabilna mirujuća jezgra polonija $^{210}_{84}\mathrm{Po}$ energije vezanja 1645.2 MeV raspada se α-raspadom u jezgru olova $^{206}_{82}\mathrm{Pb}$ energije vezanja 1622.3 MeV. Izračunaj kinetičku energiju α-čestice iz raspada, energije vezanja 28.3 MeV. Masa protona je 938.3 $\mathrm{MeV/c^2}$, a neutrona 939.6 $\mathrm{MeV/c^2}$. Možeš koristiti nerelativistički račun.

C) Rješenja iz matematike

4071. *Nađi sva rješenja jednadžbe*

$$(x-7)^2 - |x-7| = 30.$$

Rješenje. Ako je $x \geqslant 7$:

$$(x-7)^2 - (x-7) = 30$$

$$x^2 - 15x + 26 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{15 \pm 11}{2}$$
$$x_1 = 13$$
$$x_2 = 2 \quad \text{(otpada zbog uvjeta)}.$$

Ako je $x < 7$:

$$(x-7)^2 - (-x+7) = 30$$
$$x^2 - 13x + 12 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{13 \pm 11}{2}$$
$$x_1 = 12 \quad \text{(otpada zbog uvjeta)}$$
$$x_2 = 1.$$

Znači, imamo dva realna rješenja

$$x_1 = 13 \quad \text{i} \quad x_2 = 1.$$

Ivan Jukić (1),
Gimnazija Vukovar, Vukovar

4072. *Za pozitivne brojeve a, b, c i prirodan broj n dokaži nejednakost*

$$a^n + b^n + c^n \geq \left(\frac{a+2b}{3}\right)^n + \left(\frac{b+2c}{3}\right)^n + \left(\frac{c+2a}{3}\right)^n.$$

Rješenje. Iz $x \geqslant 1$ i nejednadžbi za pozitivne brojeve x, y, z imamo

$$\frac{x^n+y^n+z^n}{3} \geqslant \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tada je:

$$\frac{a^n+b^n+b^n}{3} \geqslant \left(\frac{a+b+b}{3}\right)^n = \left(\frac{a+2b}{3}\right)^n$$
$$\frac{b^n+c^n+c^n}{3} \geqslant \left(\frac{b+c+c}{3}\right)^n = \left(\frac{b+2c}{3}\right)^n$$
$$\frac{c^n+a^n+a^n}{3} \geqslant \left(\frac{c+a+a}{3}\right)^n = \left(\frac{c+2a}{3}\right)^n$$

odakle dobivamo traženu nejednadžbu.

Momčilo Bogunović (4),
Gimnazija "Isidora Sekulić", Novi Sad

4073. *Dokaži da za pozitivne brojeve a, b, x, y vrijedi nejednakost*

$$\frac{a^4}{x} + \frac{b^4}{y} \geq \frac{(a+b)^4}{4(x+y)}.$$

Rješenje.

$$\frac{a^4}{x} + \frac{b^4}{y}$$
$$= \frac{a^4(x+y)}{x(x+y)} + \frac{b^4(x+y)}{y(x+y)}$$
$$= \frac{\frac{a^4(x+y)}{x}}{x+y} + \frac{\frac{b^4(x+y)}{y}}{x+y}$$
$$= \frac{a^4 + b^4 + \frac{a^4y}{x} + \frac{b^4x}{y}}{x+y}$$
$$\overset{\text{A-G}}{\geqslant} \frac{a^4 + b^4 + 2\sqrt{\frac{a^4y}{x} \cdot \frac{b^4x}{y}}}{x+y}$$
$$= \frac{a^4 + b^4 + 2a^2b^2}{x+y}$$
$$= \frac{(a^2+b^2)^2}{x+y} \quad \left(\text{jer je } a^2+b^2 \geqslant \frac{(a+b)^2}{2}\right)$$
$$\geqslant \frac{\frac{(a+b)^4}{4}}{x+y} = \frac{(a+b)^4}{4(x+y)}$$

što se i tražilo.

Ivan Jukić (1), Vukovar

4074. *Ako je $\lfloor x \rfloor$ najveće cijelo broja $x \in \mathbb{R}$, a $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ njegov razlomljeni dio, riješi sustav jednadžbi:*

$$x + \lfloor y \rfloor + \{z\} = 3.9$$
$$y + \lfloor z \rfloor + \{x\} = 3.5$$
$$z + \lfloor x \rfloor + \{y\} = 2.$$

Rješenje. Zbrajanjem svih triju jednadžbi imamo

$$x + y + z = 4.7.$$

Sada iz ove jednadžbe oduzmemo svaku iz sustava:

$$y + z - \lfloor y \rfloor - \{z\} = 0.8$$
$$z + x - \lfloor z \rfloor - \{x\} = 1.2$$
$$x + y - \lfloor x \rfloor - \{y\} = 2.7$$
$$\{y\} + \lfloor z \rfloor = 0.8$$
$$\{z\} + \lfloor x \rfloor = 1.2$$
$$\{x\} + \lfloor y \rfloor = 2.7$$
$$\lfloor z \rfloor = 0, \quad \{y\} = 0.8$$

$$\lfloor x \rfloor = 1, \quad \{z\} = 0.2$$
$$\lfloor y \rfloor = 2, \quad \{x\} = 0.7$$
$$x = \lfloor x \rfloor + \{x\} = 1.7$$
$$y = \lfloor y \rfloor + \{y\} = 2.8$$
$$z = \lfloor z \rfloor + \{z\} = 0.2.$$

Provjerom vidimo da je trojka $(1.7, 2.8, 0.2)$ rješenje sustava.

Ivan Jukić (1), Vukovar

4075. *Nađi sva realna rješenja sustava jednadžbi*

$$x + 2y - z = \frac{3}{8}$$
$$\log_x y + 5 \log_y x - 4z = 4$$
$$3 \log_x y - \log_y x + 4z = 6.$$

Rješenje. Zbrajanjem druge i treće jednadžbe sustava dobivamo

$$4 \log_x y + 4 \log_y x = 10.$$

Supstitucijom $t = \log_x y$ imamo:

$$4t + \frac{4}{t} = 10$$
$$2t^2 - 5t + 2 = 0$$
$$t_1 = 2, \quad t_2 = \frac{1}{2}.$$

1)
$$t = 2$$
$$\log_x y = 2$$
$$y = x^2$$

Iz druge jednadžbe je

$$2 + \frac{5}{2} - 4z = 4$$
$$z = \frac{1}{8}.$$

Iz prve jednadžbe je

$$2x^2 + x - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$
$$4x^2 + 2x - 1 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}.$$

Mora biti $x > 0$, pa je

$$x = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}, \quad y = \frac{3 - \sqrt{5}}{8}$$
$$\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{4}, \frac{3 - \sqrt{5}}{8}, \frac{1}{8} \right).$$

2)
$$t = \frac{1}{2}$$
$$\log_x y = \frac{1}{2}$$
$$y = \sqrt{x}$$

Iz druge jednadžbe je

$$\frac{1}{2} + 10 - 4z = 4$$
$$z = \frac{13}{8}.$$

Iz prve jednadžbe je

$$x + 2\sqrt{x} - \frac{13}{8} = \frac{3}{8}$$
$$x + 2\sqrt{x} - 2 = 0$$
$$(\sqrt{x})_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3}.$$

Mora biti $\sqrt{x} > 0$, pa je

$$\sqrt{x} = \sqrt{3} - 1$$
$$x = 4 - 2\sqrt{3}$$
$$\left(4 - 2\sqrt{3}, \sqrt{3} - 1, \frac{13}{8} \right).$$

Znači, imamo dva realna rješenja.

Ivan Jukić (1), Vukovar

4076. *Za $x \geq 1$ dokaži nejednakost*

$$x > \sqrt{x - 1} + \sqrt{x(\sqrt{x} - 1)}.$$

Rješenje. Uvest ćemo nepoznanicu $x = \dfrac{1}{\cos^2 \alpha}$, gdje je $\alpha \in \left[0, \dfrac{\pi}{2} \right)$.

Dana nejednakost je ekvivalentna s

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} > \operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\cos \alpha} \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{\cos \alpha}}$$

ili

$$1 > \sin \alpha \cos \alpha + \sqrt{\cos \alpha (1 - \cos \alpha)}. \quad (1)$$

Imamo:

$$(2 \cos \alpha - 1)^2 \geqslant 0$$
$$4 \cos^2 \alpha - 4 \cos \alpha + 1 \geqslant 0,$$

a odavde

$$\cos \alpha - \cos^2 \alpha \leqslant \frac{1}{4}$$

odnosno

$$\cos\alpha(1-\cos\alpha) \leqslant \frac{1}{4}$$
$$\sqrt{\cos\alpha(1-\cos\alpha)} \leqslant \frac{1}{2} \qquad (2)$$

te

$$\sin\alpha\cos\alpha \leqslant \frac{1}{2} \iff \sin 2\alpha \leqslant 1. \qquad (3)$$

Zbrajanjem nejednakosti (2) i (3) dobivamo

$$\sin\alpha\cos\alpha + \sqrt{\cos\alpha(1-\cos\alpha)} \leqslant 1,$$

gdje vrijedi jednakost ako je istovremeno

$$\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}$$

i

$$\sqrt{\cos\alpha(1-\cos\alpha)} = \frac{1}{2},$$

tj. ako je $\alpha = \frac{\pi}{4}$ i $\alpha = \frac{\pi}{3}$, što je nemoguće. Dakle, vrijedi nejednakost (1). Ovim je zadana nejednakost dokazana.

Momčilo Bogunović (4), Novi Sad

4077. *Ako su a, b, c duljine stranica trokuta i α kut nasuprot stranice a dokaži da je*

$$\begin{vmatrix} a^2 & b\sin\alpha & c\sin\alpha \\ b\sin\alpha & 1 & \cos\alpha \\ c\sin\alpha & \cos\alpha & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Rješenje. Razvojem po prvom retku je:

$$\begin{aligned} & a^2 \begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha \\ \cos\alpha & 1 \end{vmatrix} \\ & \quad - b\sin\alpha \begin{vmatrix} b\sin\alpha & \cos\alpha \\ c\sin\alpha & 1 \end{vmatrix} \\ & \quad + c\sin\alpha \begin{vmatrix} b\sin\alpha & 1 \\ c\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} \\ & = a^2(1-\cos^2\alpha) \\ & \quad - b\sin\alpha(b\sin\alpha - c\sin\alpha\cos\alpha) \\ & \quad + c\sin\alpha(b\sin\alpha\cos\alpha - c\sin\alpha) \\ & = a^2\sin^2\alpha - b^2\sin^2\alpha + bc\sin^2\alpha\cos\alpha \\ & \quad + bc\sin^2\alpha\cos\alpha - c^2\sin^2\alpha \\ & = (a^2 - b^2 + 2bc\cos\alpha - c^2)\sin^2\alpha \\ & = 0. \end{aligned}$$

Ivan Jukić (1), Vukovar

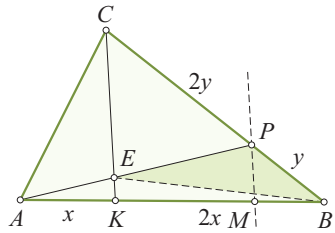
4078. *Na stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ trokuta ABC dane su točke K i P takve da je*

$$\frac{|AK|}{|BK|} = \frac{1}{2} \quad i \quad \frac{|CP|}{|BP|} = 2.$$

Pravci AP i CK sijeku se u točki E. Odredi površinu trokuta ABC ako je površina trokuta BEC jednaka 4 cm^2.

Rješenje. Neka je $PM \| CK$. Po Talesovu poučku je

$$\frac{|BM|}{|MK|} = \frac{|BP|}{|PC|} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{|BM|}{2x - |BM|} = \frac{1}{2} \implies |BM| = \frac{2x}{3}$$
$$|KM| = \frac{4x}{3}.$$



Iz $\triangle AKE \sim \triangle AMP$ je

$$\frac{|KE|}{|MP|} = \frac{|AK|}{|AM|} = \frac{x}{x + \frac{4x}{3}} = \frac{3}{7}$$
$$|KE| = \frac{3}{7}|MP|.$$

Iz $\frac{|MP|}{|KC|} = \frac{|BP|}{|BC|}$ je

$$|MP| = \frac{1}{3}|KC|,$$
$$|KE| = \frac{1}{7}|KC| \quad \text{i}$$
$$|EC| = \frac{6}{7}|KC|.$$

Trokuti BEC i BKC imaju zajedničku visinu (povučenu iz vrha B) pa je

$$\frac{P_{BKC}}{P_{BEC}} = \frac{|KC|}{|EC|} = \frac{7}{6}$$
$$P_{BKC} = \frac{7}{6}\cdot 4 = \frac{14}{3}\ \text{cm}^2.$$

Sada trokuti BKC i ABC imaju zajedničku visinu (iz vrha C) pa je

$$\frac{P_{ABC}}{P_{BKC}} = \frac{|AB|}{|BK|} = \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}$$
$$P_{ABC} = \frac{3}{2}P_{BKC} = \frac{3}{2}\cdot\frac{14}{3} = 7\ \text{cm}^2.$$

Ivan Jukić (1), Vukovar

4079. *U trokutu ABC su CD, DE, DF simetrale kutova $\sphericalangle ACB$, $\sphericalangle ADC$, $\sphericalangle BDC$, tim redom. Ako je $|CE| = e$ i $|CF| = f$, dokaži*

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{e} = \frac{1}{b} + \frac{1}{f}.$$

Rješenje. Primjenom poučka o simetrali unutarnjeg kuta trokuta (dijeli nasuprotnu stranicu u omjeru ostalih dviju stranica) za simetrale kutova DE i DF trokuta ADC i BDC imamo:

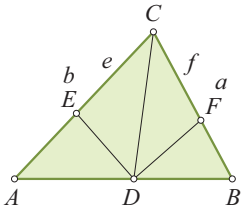
$$\frac{|AD|}{|CD|} = \frac{b-e}{e} \quad \text{i} \quad \frac{|BD|}{|CD|} = \frac{a-f}{f}.$$

Dijeljenjem ove dvije jednakosti dobivamo

$$\frac{|AD|}{|CD|} : \frac{|BD|}{|CD|} = \frac{b-e}{e} : \frac{a-f}{f}$$

ili

$$\frac{|AD|}{|BD|} = \frac{f(b-e)}{e(a-f)}. \qquad (1)$$



Primjenom spomenutog poučka na trokut ABC imamo

$$\frac{|AD|}{|BD|} = \frac{b}{a}. \qquad (2)$$

Iz jednakosti (1) i (2) je

$$\frac{f(b-e)}{e(a-f)} = \frac{b}{a} \qquad \text{ili}$$
$$af(b-e) = be(a-f), \qquad \text{tj.}$$
$$\frac{abf - aef}{abef} = \frac{abe - bef}{abef}.$$

Odavde je

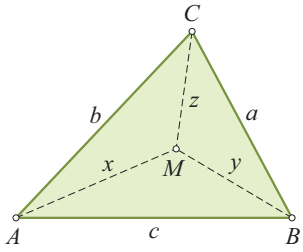
$$\frac{1}{e} - \frac{1}{b} = \frac{1}{f} - \frac{1}{a} \qquad \text{ili}$$
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{e} = \frac{1}{b} + \frac{1}{f}$$

rješenje.

Momčilo Bogunović (4), Novi Sad

4080. *Dana je točka M unutar trokuta ABC sa stranicama a, b, c takva da se iz nje svaka stranica vidi pod jednakim kutem. Odredi $|AM| + |BM| + |CM|$.*

Rješenje. Zbog uvjeta zadatka je $\sphericalangle AMC = \sphericalangle BMC = \sphericalangle AMB = 120^\circ$.



Koristimo poučak o kosinusima redom za trokute BCM, ACM i ABM:

$$a^2 = z^2 + y^2 + yz$$
$$b^2 = x^2 + z^2 + xz$$
$$c^2 = x^2 + y^2 + xy$$
$$\Longrightarrow\ x^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{2} - \frac{1}{2}(xy + xz + yz)$$

$$P = P_{\triangle AMB} + P_{\triangle BMC} + P_{\triangle AMC}$$
$$= \frac{1}{2}xy\sin 120^\circ + \frac{1}{2}yz\sin 120^\circ + \frac{1}{2}xz\sin 120^\circ$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{4}(xy + yz + xz)$$
$$\Longrightarrow\ xy + xz + yz = \frac{4P}{\sqrt{3}}.$$

Iz jednakosti

$$(x+y+z)^2$$
$$= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$$

$$= \frac{a^2+b^2+c^2}{2} - \frac{1}{2}(xy+xz+yz) + 2(xy+xz+yz)$$
$$= \frac{a^2+b^2+c^2}{2} + \frac{3}{2}\cdot\frac{4P}{\sqrt{3}}$$
$$= \frac{a^2+b^2+c^2}{2} + 2\sqrt{3}P$$

dobivamo

$$x+y+z = \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{2} + 2\sqrt{3}P}.$$

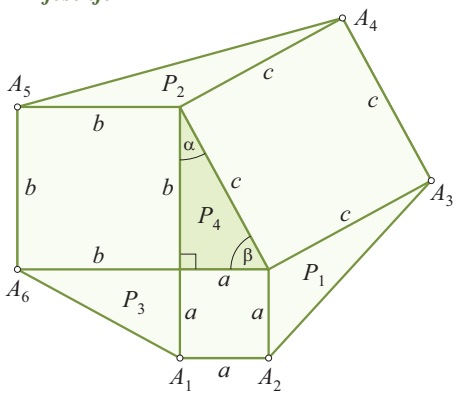
Po Heronovoj formuli je

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$
$$= \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}.$$

Ivan Jukić (1), Vukovar

4081. *Nad stranicama pravokutnog trokuta, čije katete su a i b, konstruirani su kvadrati. Susjedni slobodni vrhovi tih kvadrata spojeni su dužinama. Kolika je površina dobivenog šesterokuta?*

Rješenje.



Sa slike imamo:

$$P_1 = \frac{1}{2}ac\cdot\sin(180^\circ-\beta)$$
$$= \frac{1}{2}ac\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}ac\cdot\frac{b}{c}$$
$$= \frac{1}{2}ab$$
$$P_2 = \frac{1}{2}bc\cdot\sin(180^\circ-\alpha)$$
$$= \frac{1}{2}bc\cdot\sin\alpha = \frac{1}{2}bc\cdot\frac{a}{c}$$
$$= \frac{1}{2}ab$$
$$P_3 = \frac{1}{2}ab = P_4$$
$$P_{\text{uk}} = P_{A_1A_2A_3A_4A_5A_6}$$
$$= \frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}ab+a^2+b^2+c^2$$
$$= a^2+b^2+c^2+2ab$$
$$= a^2+b^2+(a^2+b^2)^2+2ab$$
$$= 2(a^2+b^2+ab)$$

Ivan Jukić (1), Vukovar

4082. *a) Dokaži da za sve $\alpha, \beta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ vrijedi*

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} \le \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{2}.$$

b) Za $n \in N$ i $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ dokaži da vrijedi

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}{n} \le \frac{\operatorname{tg}\alpha_1+\ldots+\operatorname{tg}\alpha_n}{n}.$$

Rješenje.

a)

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}$$
$$= \frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}$$
$$= \frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}}$$
$$= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{1+\cos(\alpha+\beta)}$$
$$= \frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{1+\cos(\alpha+\beta)}$$
$$= \frac{\cos\alpha\cos\beta}{1+\cos(\alpha+\beta)}(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)$$

(jer je $1 \geqslant \cos(\alpha-\beta)$)

$$\leqslant \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)$$
$$= \frac{\cos\alpha\cos\beta}{2\cos\alpha\cos\beta}(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)$$
$$= \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{2}$$

Jednakost vrijedi ako je $\cos(\alpha-\beta)=1$, tj. $\alpha=\beta$.

b) Najprije ćemo matematičkom indukcijom pokazati da nejednakost vrijedi ako je n potencija broja 2 za $n=2$. Nejednakost je dokazana u a) dijelu zadatka. Neka tvrdnja vrijedi za $n=k$ i dokažimo da vrijedi za $n=2k$.

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{2k-1}+\alpha_{2k}}{2k}$$
$$= \operatorname{tg}\frac{\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}+\ldots+\frac{\alpha_{2k-1}+\alpha_{2k}}{2}}{k}$$
$$\left(\begin{array}{l}\text{u brojniku imamo } k \text{ brojeva iz } \left[0,\frac{\pi}{2}\right)\\ \text{pa koristimo pretpostavku indukcije}\end{array}\right)$$
$$\leqslant \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}+\ldots+\operatorname{tg}\frac{\alpha_{2k-1}+\alpha_{2k}}{2}}{k}$$
$$\left(\begin{array}{l}\text{na svaki član brojnika primjenjujemo}\\ \text{a)}\end{array}\right)$$
$$\leqslant \frac{\frac{\operatorname{tg}\alpha_1+\operatorname{tg}\alpha_2}{2}+\ldots+\frac{\operatorname{tg}\alpha_{2k-1}+\operatorname{tg}\alpha_{2k}}{2}}{k}$$
$$\leqslant \frac{\operatorname{tg}\alpha_1+\operatorname{tg}\alpha_2+\operatorname{tg}\alpha_{2k-1}+\operatorname{tg}\alpha_{2k}}{2k}.$$

Neka sada $n>1$ nije potencija broja 2. Tada postoji prirodan broj m takav da je $m^{m-1}<n<m^m$. Neka je $p=2^m-n$, tj, $n+p=2^m$. Uvedimo oznake

$$\alpha_{n+1}=\alpha_{n+2}=\ldots=\alpha_{n+p}=\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}{n}.$$

Budući da je $n+p$ potencija broja 2, prema već dokazanom

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n+p}}{n+p} = \frac{\operatorname{tg}\alpha_1+\operatorname{tg}\alpha_2+\ldots+\operatorname{tg}\alpha_{n+p}}{n+p} \qquad (*)$$

i još je

$$\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n+p}}{n+p} = \frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n+p\cdot\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}{n}}{n+p}$$
$$= \frac{(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)\left(1+\frac{p}{n}\right)}{n+p} = \frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}{n}.$$

Tada je

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_1+\operatorname{tg}\alpha_2+\ldots+\operatorname{tg}\alpha_{n+p}}{n+p} = \frac{\operatorname{tg}\alpha_1+\ldots+\operatorname{tg}\alpha_n+p\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}{n}}{n+p}$$

i zbog $(*)$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}{n} \leqslant \frac{\operatorname{tg}\alpha_1+\ldots+\operatorname{tg}\alpha_n+p\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}{n}}{n+p}$$
$$(n+p)\operatorname{tg}\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}{n} \leqslant \operatorname{tg}\alpha_1+\operatorname{tg}\alpha_2+\ldots+\operatorname{tg}\alpha_n+p\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}{n}$$
$$n\operatorname{tg}\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}{n} \leqslant \operatorname{tg}\alpha_1+\operatorname{tg}\alpha_2+\ldots+\operatorname{tg}\alpha_n \;/\; :n$$
$$\operatorname{tg}\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}{n} \leqslant \frac{\operatorname{tg}\alpha_1+\operatorname{tg}\alpha_2+\ldots+\operatorname{tg}\alpha_n}{n},$$

pa nejednadžba vrijedi za svaki prirodan $n>1$. Jednakost se postiže u slučaju

$$\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n.$$

Ivan Jukić (1), Vukovar

4083. *Treba razmjestiti m muškaraca i $n>m$ žena oko okruglog stola s $m+n$ stolica tako da nikoja dva muškarca ne sjede jedan pored drugog. Na koliko načina se to može napraviti?*

Rješenje. Ako se odrede mjesta za muškarce i za žene onda se muškarci mogu razmjestiti na $P(m)=m!$ načina, a žene ne $P(n)=n!$

načina. Stoga preostaje odrediti broj načina na koje se može izabrati m stolica (za muškarce), tako da nikoja dva ne budu jedan pored drugog, iz danih $m+n$ stolica.

Svakom muškarcu pridružimo broj 1, a svakoj ženi broj 0. Izaberimo jednu fiksnu stolicu, koju označimo s X, i podijelimo sve moguće izbore stolica u dvije disjunktne grupe, već prema tome je li X za muškarca ili za ženu. U prvom slučaju (tj. X pripada 1) objema susjednim stolicama pripada 0 i muškarcima pripada $\binom{n-1}{m-1}$ mogućih izbora. Grupa u drugom slučaju ima $\binom{n}{m}$ članova. Sve ovo vrijedi ako je $m \leqslant n$. U protivnom je broj mogućnosti jednak nula. Ako s $P(m,n)$ označimo broj svih mogućnosti dobivamo:

$$P(m,n) = m!n!\left[\binom{n-1}{m-1} + \binom{n}{m}\right]$$
$$= m!n!\frac{n+m}{n}\binom{n}{m}.$$

Momčilo Bogunović (4), Novi Sad

4084. *Francuski matematičar Fermat dokazao je da ako je n prost broj tada on dijeli $2^n - 2$. Ako je $n = 341$ dokaži da n dijeli $2^n - 2$.*

Rješenje. Kako je

$$n = 341 = 11 \cdot 31,$$

dovoljno je pokazati da je $2^{341} - 2$ djeljivo i s 11 i s 31.

Imamo

$$2^{341} - 2 = (2^5)^{68} \cdot 2 - 2$$
$$\equiv (-1)^{68} \cdot 2 - 2$$
$$= 0 \pmod{11}$$
$$2^{341} - 2 = (2^5)^{68} \cdot 2 - 2$$
$$\equiv 1^{68} \cdot 2 - 2$$
$$= 0 \pmod{31}.$$

Dakle,

$$2^{341} - 2 \equiv 0 \pmod{341}.$$

Momčilo Bogunović (4), Novi Sad

D) Rješenja iz fizike

OŠ – 562. *Tijekom brzog punjenja baterija električnog automobila se zagrijava, ali i gubi toplinu u okolinu. Brzo punjenje traje 25 min i pri tome se baterija ugrije s $20\,^\circ C$ na $32\,^\circ C$. Masa baterije je 400 kg i napravljena je od materijala kojem je specifični toplinski kapacitet $900\ J/kgK$. Tijekom punjenja ona stalno gubi toplinu u okolinu prosječnom snagom 800 W. Izračunaj ukupnu količinu topline koja je nastala u bateriji tijekom punjenja.*

Rješenje.

$t = 25\ \text{min} = 1500\ \text{s}$
$t_1 = 20\,^\circ\text{C}$
$t_2 = 32\,^\circ\text{C}$
$m = 400\ \text{kg}$
$c = 900\ \text{J/kgK}$
$\underline{P = 800\ \text{W}}$
$Q = ?$
$Q = cm\Delta t + Pt$
$\Delta t = t_1 - t_2 = 12\,^\circ\text{C}$

$$Q = 900\ \frac{\text{J}}{\text{kg K}} \cdot 400\ \text{kg} \cdot 12\ \text{K} + 800\ \text{W} \cdot 1500\ \text{s}$$
$$= 4\,320\,000\ \text{J} + 1\,200\,000\ \text{J} = 5\,520\,000\ \text{J}$$

Mihael Ratkajec (8),
OŠ Mate Lovraka, Zagreb

OŠ – 563. *Učenici su na klupu visine 1 m stavili drveni kvadar mase 1 kg. Kvadar je pomoću nerastezljive niti zanemarive mase povezan s koloturom na kojoj je uteg mase M. Kolika treba biti masa tog utega da bi on do poda padao točno jednu sekundu? Koeficijent trenja između kvadra i stola je 0.3, a trenje na koloturu je zanemarivo.*

Rješenje.

$h = 1\ \text{m}$
$m = 1\ \text{kg}$
$t = 1\ \text{s}$
$\underline{\mu = 0.3}$
$M = ?$

$$a = \frac{2s}{t^2} = 2\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$
$$F_{\text{tr}} = \mu mg = 0.3 \cdot 1\ \text{kg} \cdot 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 3\ \text{N}$$

$$Mg - F_{\text{tr}} = (m + M)a$$
$$M(g - a) = F_{\text{tr}} + ma$$
$$M = \frac{F_{\text{tr}} + ma}{g - a} = \frac{3\ \text{N} + 1\ \text{kg} \cdot 2\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 2\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}$$
$$= 0.625\ \text{kg}$$

Luka Sabolić (8),
OŠ Mate Lovraka, Zagreb

OŠ – 564. *Bungee jumping skakač skače s mosta visokog 30 m. Uže mu je dugačko 20 m i kad se zaustavi nakon skoka od površine vode je udaljen 6 m. Masa skakača je 80 kg. Kolika je konstanta elastičnosti njegovog užeta?*

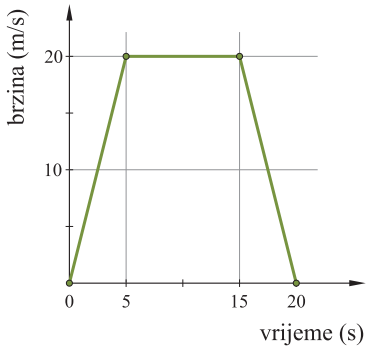
Rješenje.

$h = 30\ \text{m}$
$l_0 = 20\ \text{m}$
$l_1 = 24\ \text{m}$
$m = 80\ \text{kg}$
$k = ?$
$\Delta l = l_1 - l_0 = 24\ \text{m} - 20\ \text{m} = 4\ \text{m}$
$mg\Delta h = \frac{1}{2}k\Delta l^2$
$\Delta h = l_1 = 24\ \text{m}$
$$k = \frac{2mg\Delta h}{(\Delta l)^2} = \frac{2 \cdot 80\ \text{kg} \cdot 10\ \text{m/s}^2 \cdot 24\ \text{m}}{(4\ \text{m})^2}$$
$$= 2400\ \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Ur.

OŠ – 565. *Električni automobili su poznati po tome da mogu brzo ubrzavati. Na slici je v-t graf gibanja električnog automobila mase 1600 kg na testnoj stazi. Izračunajte snagu automobila dok je ubrzavao i duljinu testne staze.*

v-t graf gibanja električnog automobila



Rješenje.

$m = 1600\ \text{kg}$
$t_1 = 5\ \text{s}$
$v_1 = 20\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$
$t_2 = 10\ \text{s}$
$t_3 = 5\ \text{s}$
$P = ?$
$s = ?$
$$a = \frac{v}{t} = \frac{20\ \text{m/s}}{5\ \text{s}} = 4\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$
$$F = am = 4\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1600\ \text{kg} = 6400\ \text{N}$$
$$s = \frac{at^2}{2} = \frac{4\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (5s)^2}{2} = 50\ \text{m} = s_1 = s_3$$
$$W = Fs = 6400\ \text{N} \cdot 50\ \text{m} = 320\,000\ \text{J}$$
$$P = \frac{W}{t} = \frac{320\,000\ \text{J}}{5\ \text{s}} = 64\,000\ \text{W} = 64\ \text{kW}$$
$s = s_1 + s_2 + s_3$
$$s_2 = vt = 20\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 10\ \text{s} = 200\ \text{m}$$
$s = 50\ \text{m} + 200\ \text{m} + 50\ \text{m} = 300\ \text{m}.$

Jakov Smoljak (8),
OŠ Mate Lovraka, Zagreb

1889. *Moment inercije pune homogene kugle mase 1 kg jednak je 10^{-3} kg m^2 (oko osi koja prolazi njezinim centrom mase). Koliki je moment inercije šuplje kugle od istoga materijala (i oko iste osi), unutarnjeg polumjera 4 cm i vanjskoga polumjera 6 cm?*

Rješenje. Za punu homogenu kuglu je
$$I_0 = \frac{2}{5}mR_0^2$$
pa iz zadanih podataka dobijemo polumjer
$$R_0 = \sqrt{\frac{5I_0}{2m}} = 5\ \text{cm}.$$
Sada možemo naći gustoću materijala
$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{3m}{4\pi R_0^3} \approx 1910\ \text{kg/m}^3.$$
Masa M šuplje kugle iste gustoće te unutarnjeg radijusa R_1 i vanjskoga R_2 je
$$M = \frac{4\pi}{3}(R_2^3 - R_1^3)\rho = \frac{R_2^3 - R_1^3}{R_0^3}m = 1.216\ \text{kg}.$$

Moment inercije šuplje kugle sada je

$$I = \frac{2}{5}\frac{R_2^5 - R_1^5}{R_2^3 - R_1^3}M = \frac{2}{5}\frac{R_2^5 - R_1^5}{R_0^3}m,$$

odnosno

$$I = \frac{R_2^5 - R_1^5}{R_0^5}I_0 \approx 2.16 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg\,m^2}.$$

Ivan Jukić (1),
Gimnazija Vukovar, Vukovar

1890. *Nuklearni fizičar želi pripremiti čim čišći uzorak radioaktivnog izotopa joda* ^{131}I. *Međutim, u uzorku se potkrala primjesa stabilnog izotopa* ^{127}I. *Nestabilni* ^{131}I *raspada se* β*-raspadom u izotop* ^{131}Xe *plemenitog plina ksenona, koji po nastanku ispari iz uzorka. U početnom trenutku u uzorku se nalazi* 10^{15} *atoma joda, a nestabilni izotop čini* $99\,\%$ *tog broja. Nakon nekog vremena, zbog raspada* ^{131}I *i bijega* ^{131}Xe, *broj atoma u uzorku se smanji, a udio nestabilnog izotopa smanji se na* $98\,\%$. *Koliki je ukupan broj atoma joda u uzorku u tom trenutku?*

Rješenje. Neka je $N_0 = 10^{15}$ ukupan broj svih atoma joda u početnome trenutku, a $p_0 = 99\,\%$ početni udio nestabilnog izotopa ^{131}I. Tada za broj atoma dvaju izotopa u početnome trenutku vrijedi:

$$N_{127}^{(0)} = (1 - p_0)N_0 = 10^{13},$$
$$N_{131}^{(0)} = p_0 N_0 = 99 \cdot 10^{13}.$$

Za $p = 98\,\%$ kao kasniji udio nestabilnog izotopa i N_{131} kao njegov broj u tom trenutku vrijedi

$$p = \frac{N_{131}}{N_{127}^{(0)} + N_{131}}$$

jer se broj atoma stabilnog izotopa ne mijenja u vremenu. Odavde je

$$N_{131} = \frac{p}{1-p}N_{127}^{(0)} = \frac{p(1-p_0)}{1-p}N_0 = 49 \cdot 10^{13},$$

što za ukupan broj svih atoma povlači

$$N = N_{127}^{(0)} + N_{131} = \frac{1-p_0}{1-p}N_0 = 5 \cdot 10^{14}.$$

Ukupan broj atoma se prepolovio! (Vidi: *Paradoks krumpira*, MFL 281.)

Ur.

1891. *Ako je Sunce savršeno crno tijelo čiji je spektralni maksimum zračenja pri valnoj duljini od 500 nm, nakon koliko vremena izrači energijski ekvivalent mase Zemlje? Masa Zemlje je* $5.97 \cdot 10^{24}$ *kg, a polumjer Sunca* $6.96 \cdot 10^8$ *m.*

Rješenje. Prema Wienovu zakonu, uz k kao Wienovu konstantu, temperatura T savršeno crnog tijela obrnuto je proporcionalna valnoj duljini $\lambda_{\max}$ spektralnog maksimuma

$$T = \frac{k}{\lambda_{\max}} \approx 5796\ \mathrm{K}.$$

Prema Stefan-Boltzmannovu zakonu intenzitet I zračenja je

$$I = \sigma T^4 = \frac{\sigma k^4}{\lambda_{\max}^4} \approx 6.4 \cdot 10^7\ \mathrm{W/m^2},$$

uz σ kao Stefan-Boltzmannovu konstantu. Intenzitet zračenja odgovara snazi zračenja po jedinici površine, tj. energiji zračenja po jedinici površine A u jednici vremena t

$$I = \frac{E}{At} \implies t = \frac{E}{AI},$$

što nam daje vrijeme potrebno da Sunce izrači energiju E čitavom svojom površinom ($A = 4\pi R_S^2$, uz R_S kao polumjer Sunca). Konačno, energijski ekvivalent mase Zemlje njezina je energija mirovanja $E = m_Z c^2$, uz masu Zemlje m_Z i brzinu svjetlosti c. Uvrštavanje svih ovih izraza daje nam:

$$t = \frac{m_Z c^2 \lambda_{\max}^4}{4\pi\sigma k^4 R_S^2} \approx 1.38 \cdot 10^{15}\ \mathrm{s},$$

tj. 44 milijuna godina (samo Sunce staro je stotinjak puta više: 4.6 milijardi godina).

Ur.

1892. *Voda teče brzinom* $10\ m/s$ *u zatvorenoj gumenoj cijevi savinutoj u kružnicu. Promjer cijevi je 5 cm i puno je manji od polumjera kružnice koju zatvara čitava cijev. Kolika je sila napetosti cijevi? Koliko mora porasti brzina vode da bi se sila napetosti udvostručila? Gustoća vode je* $1000\ kg/m^3$.

(Zadatak osmislio Duje Dodig.)

Rješenje. Slika prikazuje izolirani komadić cijevi koji zatvara kutni otvor $\Delta\alpha$ s obzirom na središte kružnice i treba ga smatrati čim manjim mogućim ($\Delta\alpha \to 0$). Na krajeve toga komadića djeluje ostatak cijevi silom napetosti $\vec{F}_L$ slijeva i $\vec{F}_D$ zdesna. Obje su istog iznosa F

(tj. $|\vec{F}_\mathrm{L}| = |\vec{F}_\mathrm{D}| = F$) no blago različitih smjerova. Komponente tih sila tangencijalne na kružnicu vektorski se krate, dok im se radijalne komponente (prema središtu kružnice) zbrajaju. Iz označenog trokuta vidi se da je radijalna komponenta svake od dviju sila jednaka $F_\mathrm{r} = F\sin(\Delta\alpha/2)$. Zbroj dviju takvih komponenti (jedne zbog $\vec{F}_\mathrm{L}$, druge zbog $\vec{F}_\mathrm{D}$) osigurava centripetalnu silu F_cp

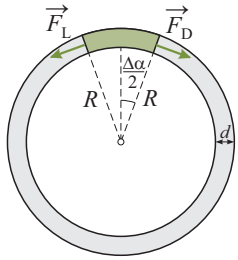
$$F_\mathrm{cp} = 2F_\mathrm{r} \implies \frac{(\Delta m)v^2}{R} = 2F\sin\frac{\Delta\alpha}{2}$$

potrebnu za kružno gibanje djelića vode mase Δm, brzinom v po kružnici polumjera R (budući da širinu cijevi smatramo puno manjom od polumjera R, čitavome komadiću vode približno možemo pripisati jedinstveni R). Masu Δm određujemo iz

$$\Delta m = \rho\Delta V = \rho[(d/2)^2\pi][R\Delta\alpha],$$

uz gustoću vode ρ i promjer cijevi d. Pri tome je $(d/2)^2\pi$ površina poprečnog presjeka cijevi, a $R\Delta\alpha$ duljina luka koji zatvara promatrani komadić vode. Odavde je

$$2F\sin\frac{\Delta\alpha}{2} = \frac{\rho d^2\pi v^2}{4}\Delta\alpha.$$



Za vrlo mali kut $\Delta\alpha$ vrijedi $\sin(\Delta\alpha/2) \approx \Delta\alpha/2$, odakle za silu napetosti imamo

$$F = \frac{\rho d^2\pi v^2}{4} \approx 196\ \mathrm{N}.$$

Zadržimo oznake F i v za prethodne vrijedosti sile i brzine. Da bi se sila udvostručila, brzina se mora povećati za toliki Δv da je

$$2F = \frac{\rho d^2\pi(v+\Delta v)^2}{4}.$$

Uvrštavanjem ranijeg izraza za F nalazimo

$$\Delta v = (\sqrt{2}-1)v \approx 4.14\ \mathrm{m/s}.$$

Ur.

1893. *Foton valne duljine λ_i raspršuje se pod kutom od 60° na slobodnom elektronu u gibanju. Nakon raspršenja elektron ostaje mirovati, a foton ima valnu duljinu λ_0. Zatim se raspršuje na drugom, mirujućem elektronu, ponovno pod kutom od 60°. Konačna valna duljina fotona sada je $\lambda_f = 125\ pm$. Izračunaj početnu de Broglievu valnu duljinu prvog elektrona, koji se sudario s početnim fotonom. Koristi $h = 6.6\cdot10^{-34}\ Js$ za Planckovu konstantu, $m_e = 9.1\cdot10^{-31}\ kg$ za masu elektrona i $c = 3\cdot10^8\ m/s$ za brzinu svjetlosti. (Potreban je relativistički račun.)*

(Zadatak osmislio Duje Dodig.)

Rješenje. Na slici su $\vec{p}_i$, $\vec{p}_0$ i $\vec{p}_f$ količine gibanja fotona, a $\vec{P}_1$ i $\vec{P}_2$ količine gibanja dvaju elektrona (čitav proces se ne odvija nužno u istoj ravnini; ovdje smo to tako prikazali radi jednostavnosti). Za prvo raspršenje iz zakona očuvanja energije imamo

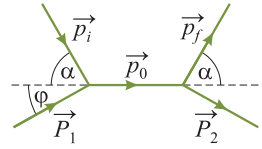
$$\frac{hc}{\lambda_i} + \sqrt{m_e^2c^4 + P_1^2c^2} = \frac{hc}{\lambda_0} + m_ec^2,$$

a iz očuvanja količine gibanja

$$\frac{h}{\lambda_i}\cos\alpha + P_1\cos\varphi = \frac{h}{\lambda_0}$$

i

$$\frac{h}{\lambda_i}\sin\alpha - P_1\sin\varphi = 0.$$



Izražavanjem $P_1\cos\varphi$ i $P_1\sin\varphi$ te primjenom $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$ nalazimo

$$P_1^2c^2 = \left(\frac{hc}{\lambda_i}\right)^2 - 2\frac{hc}{\lambda_i}\frac{hc}{\lambda_0}\cos\alpha + \left(\frac{hc}{\lambda_0}\right)^2.$$

Izražavanjem $P_1^2c^2$ iz očuvanja energije:

$$P_1^2c^2 = \left(\frac{hc}{\lambda_i}\right)^2 - 2\frac{hc}{\lambda_i}\frac{hc}{\lambda_0} + \left(\frac{hc}{\lambda_0}\right)^2 - 2m_ec^2\left(\frac{hc}{\lambda_i} - \frac{hc}{\lambda_0}\right)$$

te oduzimanjem prethodnih dvaju izraza

$$m_ec^2\left(\frac{hc}{\lambda_i} - \frac{hc}{\lambda_0}\right) = -\frac{hc}{\lambda_i}\frac{hc}{\lambda_0}(1-\cos\alpha)$$

dalje dobivamo

$$\lambda_0 - \lambda_i = -\frac{h}{m_e c}(1 - \cos\alpha).$$

Za drugo raspršenje analogno dobivamo (Comptonova formula)

$$\lambda_f - \lambda_0 = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\alpha).$$

Odavde

$$\lambda_0 = \lambda_f - \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\alpha) \approx 123.79 \text{ pm}.$$

Za de Broglievu valnu duljinu λ_e početnog elektrona treba nam njegova početna količina gibanja

$$\lambda_e = \frac{h}{P_1}.$$

Oduzimanje izraza za $\lambda_0 - \lambda_i$ i $\lambda_f - \lambda_0$ daje

$$\lambda_i = \lambda_f.$$

Imamo dva (ekvivalentna) izraza za $P_1^2 c^2$ unutar kojih to možemo iskoristiti pa je

$$P_1 c \approx 1.59 \cdot 10^{-15} \text{ J}.$$

To konačno daje

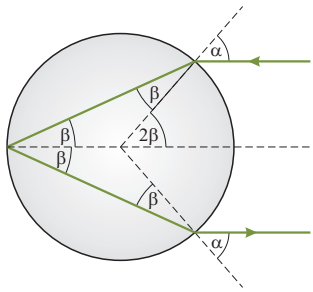
$$\lambda_e = \frac{hc}{P_1 c} \approx 124.4 \text{ pm}.$$

Ur.

1894. *Zraka svjetlosti upada na prozirnu kuglu indeksa loma n, reflektira se unutar kugle te zatim izlazi iz nje. Ako je α kut upadne zrake s obzirom na okomicu kugle u točki upada, pod kojim će uvjetom izlazna zraka biti paralelna s upadnom?*

(Zadatak osmislio Duje Dodig.)

Rješenje.



Iz skice vidimo da je uvjet paralelnosti

$$\alpha = 2\beta.$$

Prema Snellovu zakonu imamo

$$n = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin 2\beta}{\sin\beta} = 2\cos\beta,$$

odakle je

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{n}{2}.$$

To je nužan uvjet, no nije dovoljan jer indeks loma n mora biti takav da je jednakost moguća. Kako je $0^\circ \leqslant \alpha \leqslant 90^\circ$, slijedi da je $\sqrt{2}/2 \leqslant \cos(\alpha/2) \leqslant 1$, stoga mora biti

$$\sqrt{2} \leqslant n \leqslant 2.$$

Dakle, ako je zadovoljen ovaj uvjet, tada postoji upadni kut $\alpha = 2\arccos(n/2)$ za koji su upadna i izlazna zraka paralelne.

Ur.

1895. *Okomito na vertikalnu osovinu učvršćena je šipka koja može rotirati u horizontalnoj ravnini. Duž jednog kraka šipke, na udaljenosti 1 m od osovine, učvršćeno je tijelo mase 1 kg. Na kojoj udaljenosti duž drugog kraka šipke treba pričvrstiti tijelo mase 5 kg da pri okretanju šipke na osovinu ne bi djelovala horizontalna sila?*

Rješenje. Svaki kraj šipke djeluje centripetalnom silom na učvršćenu masu. Ulogu centripetalne sile igra napetost (elastična sila) šipke, koja se prenosi na osovinu i to su jedine prisutne horizontalne sile. Ukupne horizontalne sile na osovinu neće biti kad se napetosti dvaju krajeva šipke vektorski pokrate, tj. kad su centripetalne sile na dvije mase jednake. Kako se obje mase okreću istom kutnom brzinom ω_0, a centripetalna sila izražena preko kutne brzine ima oblik $F_i = m_i r_i \omega_0^2$, gdje su m_i i r_i $(i = 1, 2)$ masa i udaljenost pojedinog tijela od osi rotacije, kraćenje centripetalnih sila svodi se na

$$m_1 r_1 \omega_0^2 = m_2 r_2 \omega_0^2,$$

odakle je

$$r_2 = \frac{m_1}{m_2} r_1 = 20 \text{ cm}.$$

Ur.