

ZANIMLJIVOSTI

67. Državno natjecanje iz matematike, Hrvatska, 27. – 29. travnja 2026. g.

Školsko natjecanje iz matematike ove školske godine održano je 26. siječnja, a Županijsko natjecanje 24. veljače. Samo Državno natjecanje iz matematike ove je godine održano od 27. do 29. travnja u Vodicama, za učenike srednjih škola A varijante i B varijante. Zadatke je priredilo posebno potpovjerenstvo za A varijantu i B varijantu Državnog povjerenstva za matematička natjecanja.

Sudjelovao je 181 učenik srednjih škola, te brojni mentori. Za vrijeme natjecanja, mentori su imali seminar na kojem su održana predavanja:

Sonja Eberling i Petar Radanović, *Rješenja kao izazov*,

Tatjana Plantak, *Imam točno rješenje! Zašto nemam sve bodove!*,

Josip Pupić, *Česte pogreške u rješenjima i ispravljanju logičko-kombinatornih zadataka.*

Slobodno su vrijeme učenici i mentori mogli provesti u šetnjama Šibenikom.

Za srednje je škole podijeljeno 10 prvih, 9 drugih, 9 trećih nagrada i 16 pohvala za A varijantu, te 6 prvih, 11 drugih, 7 trećih nagrada i 13 pohvala za B varijantu.

Nagrade i pohvale učenika srednjih škola

A varijanta

I. razred

Filip Šuškavčević, XV. gimnazija, Zagreb, *Borna Gudac*, Gimnazija Andrije Mohorovičića Rijeka, Rijeka (I. nagrada); *Tin Glišić*, XV. gimnazija, Zagreb, *Noa Hornischer*, III. gimnazija, Split, *Noa Batinić*, XV. gimnazija, Zagreb (II. nagrada); *Mislav Vizjak*, Gimnazija "Fran Galović" Koprivnica, Korivnica, *Anđelo Bačani*, Prva gimnazija Varaždin, Varaždin, *Dora Duplančić*, XV. gimnazija, Zagreb (III. nagrada); *Jerko Matuško*, Gimnazija Metković, Metković *Marko Ivec*, XV. gimnazija, Zagreb, *Filip Smuđ*, XV. gimnazija, Zagreb (pohvala).

II. razred

Matej Križanić, Prva gimnazija Varaždin, Varaždin (I. nagrada); *Ivano Lukačević*, Gimnazija Josipa Slavenskog Čakovec, Čakovec, *Leonardo Starešinčić*, XV. gimnazija, Zagreb (II. nagrada); *David Ian Lučić*, Gimnazija Sesvete, Sesvete, *Ena Novak*, XV. gimnazija, Zagreb, *Kristian Radić*, III. gimnazija, Split (III. nagrada); *Petar Primorac*, III. gimnazija, Split, *Marin Puljiz*, XV. gimnazija, Zagreb, *Max Barbarić*, III. gimnazija, Split, *Ivan Katalenić*, XV. gimnazija, Zagreb (pohvala).

III. razred

Fran Pilipović, XV. gimnazija, Zagreb, *Martin Vidović*, XV. gimnazija, Zagreb (I. nagrada); *Fran Čačinović*, Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb, *Leo Pantar*, XV. gimnazija, Zagreb, *Matej Svilokos*, XV. gimnazija, Zagreb, (II. nagrada); *Jure Azenić*, XV. gimnazija, Zagreb (III. nagrada); *Damjan Leko*, Gimnazija Požega, Požega, *Dino Hadžić*, XV. gimnazija, Zagreb, *Mate Šarić*, Gimnazija Franje Petrića Zadar, *Josip Šebelja*, Gimnazija Andrije Mohorovičića Rijeka, Rijeka, *Niko Baotić*, Gimnazija i ekonomska škola Benedikta Kotruljevića, s pravom javnosti, Zagreb, *Jakov Crnov*, Gimnazija Antuna Vrančića Šibenik (pohvala).

IV. razred

Mila Maretić, Prva gimnazija Varaždin, Varaždin, *Emil Missoni*, XV. gimnazija, Zagreb, *Kristijan Šimović*, XV. gimnazija, Zagreb, *Hrvoje Valent*, Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb, *Maša Dobrić*, XV. gimnazija, Zagreb (I. nagrada); *Jakov Peroš*, Gimnazija Franje Petrića Zadar, Zadar (II. nagrada); *Tomislav Vlajčević*, XV. gimnazija, Zagreb, *Mare Zrno Agoli*, XV. gimnazija, Zagreb (III. nagrada); *Fran Janči*, Gimnazija Josipa Slavenskog Čakovec, Čakovec, *Ante Turk*, Gimnazija Metković, Metković, *Ita Blašković*, XV. gimnazija, Zagreb (pohvala).

B varijanta

I. razred

Gabriel Brebrić, Prirodoslova škola Vladimira Preloga, Zagreb (I. nagrada); *Roman Honcharenko*, Deutche Internationale Schule in Zagreb, *Thomas Velčić*, Prva riječka hrvatska gimnazija, Rijeka, *Adriana Letica*, Srednja škola fra Andrije Kačića Miočića, Makarska, *Fran Valenčić*, Srednja škola Jastrebarsko, Jastrebarsko (II. nagrada); *Tomas Štimac*, Srednja škola za elektrotehniku i računalstvo, Rijeka (III. nagrada); *Tena Brljak*, Gimnazija Josipa Slavenskog Čakovec, Čakovec, *Mihael Fruk*, Srednja škola Krapina, Krapina, *Matej Gavran*, Tehnička škola Ruđera Boškovića, Zagreb, *Lara Uljević*, V. gimnazija Vladimira Nazora Split, Split (pohvala).

II. razred

Josip Eranović, IV. gimnazija Marka Marulića, Split (I. nagrada); *Danilo Bartolić*, Tehnička škola Ruđera Boškovića, Zagreb, *Josip Ćelić*, Tehnička škola Ruđera Boškovića, Zagreb, *Nataša Drakulić*, Gimnazija Josipa Slavenskog Čakovec, Čakovec, *Ema Fabris*, Talijanska srednja škola Dante Alighieri – Scuola media superiore italiana Dante Alighieri, Pola (II. nagrada); *Lola Subašić Careva*, Gimnazija Tituša Brezovačkog, Zagreb, *Val Šimičić*, Gimnazija Vladimira Nazora, Zadar (III. nagrada); *Marko Dražetić*, Prirodoslovna škola Vladimra Preloga, Zagreb, *Josip Kostanić*, Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb, *Mateo Foder*, Srednja škola Ivanec, Ivanec (pohvala).

III. razred

Wenhang Jiang, XV. gimnazija, Zagreb (I. nagrada); *Toni Bartolić*, Tehnička škola Ruđera Boškovića, Zagreb, *Jan Filaković*, Elektrotehnička i prometna škola Osijek, Osijek (II. nagrada); *Maksim Stanković Šprajc*, Prva privatna gimnazija s pravom javnosti, Zagreb, *Fran Ozimec*, Srednja škola Ivan Švear Ivanić-Grad, Ivanić-Grad (III. nagrada); *Jakov Burić*, Gimnazija Antuna Vrančića, Šibenik, *Nikola Lovrić*, Gimnazija Nova Gradiška, Nova Gradiška (pohvala).

IV. razred

Nikla Borčić, Gimnazija Karlovac, Karlovac, *Viktorija Pribanić*, IX. gimnazija, Zagreb, *Ana Karla Vodanović*, XV. gimnazija, Zagreb (I. nagrada); *Marko Glučina*, Srednja škola fra Andrije Kačića Miošića, Makarska (II. nagrada); *Dominik Juraga*, Tehnička škola, Šibenik, *Lasta Trupčević*, Prirodoslovna škola Vladimira Preloga, Zagreb (III. nagrada); *Petar Bičanić*, Tehnička škola Ruđera Boškovića Vinkovci, Vinkovci, *Sara Dutour*

Sikirić, Prirodoslovna škola Vladimira Preloga, Zagreb, *Andrej Badeničić*, Gimnazija Josipa Slavenskog Čakovec, Čakovec, *Tina Narančić*, Gimnazija Nova Gradiška, Nova Gradiška (pohvala).

Zadatci s Državnog natjecanja – A varijanta

I. razred

1. Odredi sve parove (x, y) realnih brojeva za koje vrijedi

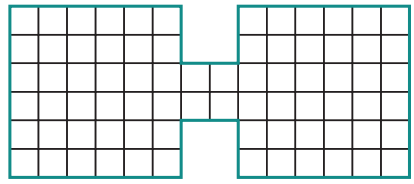
$$|2x+1| + 3x - 2y = -14$$
$$|3x+1| + x + 4y = 25.$$

2. Dokaži da za sve pozitivne realne brojeve a, b i c za koje je $a \geq c$ i $b \geq c$ vrijedi nejednakost

$$\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}.$$

3. Vrhovima B, C i D kvadrata $ABCD$ prolaze, redom, međusobno paralelni pravci b, c i d. Ako je udaljenost pravaca b i c jednaka 5, a udaljenost pravaca b i d jednaka 7, kolika može biti površina kvadrata $ABCD$?

4. Ploču na slici treba prekriti pločicama dimenzija 1×2. Svaka pločica prekriva točno dva polja. Pločice se smiju rotirati i ne smiju se preklapati. Dokaži da je broj načina na koje se to može napraviti jednak zbroju kvadrata dvaju prirodnih brojeva.



5. Odredi sve trojke prirodnih brojeva (a, b, c) takve da vrijedi

$$2^a + 2b^2 = 3^c + 67.$$

II. razred

1. Odredi najveću moguću površinu pravokutnika upisanog u pravokutni trokut s katetama duljina 5 i 12 tako da se dva vrha pravokutnika nalaze na hipotenuzi, a po jedan vrh na svakoj kateti tog trokuta.

2. Odredi broj različitih vrijednosti koje poprima izraz

$$\frac{n^2-2}{n^2-n+2},$$

za $n \in \{1, 2, 3, \ldots, 2026\}$.

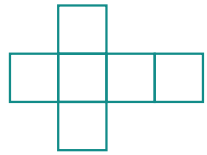
3. Neka je m prirodan broj i neka su a i b prirodni brojevi takvi da je

$$m^2 < a < m^2 + m \quad \text{i} \quad m^2 < b < m^2 + m.$$

Odredi sve prirodne djelitelje d umnožaka ab za koje vrijedi

$$m^2 < d < m^2 + m.$$

4. *Blok* je figura koja se sastoji od šest jediničnih kvadrata kao što je prikazano na slici. Odredi najveći mogući broj blokova koje je moguće postaviti na ploču dimenzija 6×11 tako da svaki prekriva točno šest polja. Blokovi se mogu rotirati i ne smiju se preklapati.



5. Neka je H ortocentar šiljastokutnog trokuta ABC i M polovište stranice $\overline{AB}$. Pravac HM siječe pravce AC i BC redom u točkama A_1 i B_1. Neku su A_2 i B_2 redom nožišta okomica iz A_1 i B_1 na pravac CH. Dokaži da se pravci AB_2 i BA_2 sijeku na opisanoj kružnici trokuta ABC.

III. razred

1. Neka je

$$A = \frac{\sin 1^\circ}{\cos 0^\circ \cos 1^\circ} + \frac{\sin 5^\circ}{\cos 2^\circ \cos 3^\circ} + \ldots + \frac{\sin 177^\circ}{\cos 88^\circ \cos 89^\circ}$$

i

$$B = \operatorname{tg} 91^\circ + \operatorname{tg} 92^\circ + \ldots + \operatorname{tg} 179^\circ + \operatorname{tg} 180^\circ.$$

Izračunaj $A + B$.

2. Odredi sva realna rješenja jednadžbe

$$\left(2+\sqrt{5}\right)^{x^2-4x+2} + \left(\sqrt{5}-2\right)^{x^2-4x+2} = 18.$$

3. Postoje li prirodni brojevi a, b i c takvi da su

$$\log_a(bc+1), \quad \log_b(ca+1) \quad \text{i} \quad \log_c(ab+1)$$

također prirodni brojevi?

4. Neka je ABC šiljastokutni trokut u kojem je $|BC| < |CA|$. Središte njegove upisane kružnice je točka I, a k mu je opisana kružnica. Neka su M i N redom polovišta kraćih lukova nad tetivama $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$ kružnice k. Pravac kroz C paralelan s MN ponovno siječe kružnicu k u točki P. Pravac PI ponovno siječe kružnicu k u točki T. Dokaži da vrijedi

$$|MP| \cdot |MT| = |NP| \cdot |NT|.$$

5. Na pravcu p označeno je 2026 točaka na jednakim razmacima. U jednoj poluravnini (s iste strane pravca p) označene su sve točke koje zajedno s dvjema označenim točkama pravca p čine vrhove jednakostraničnog trokuta. Neka je $\mathcal{T}$ skup svih označenih točaka, uključujući one na pravcu p.



Josip može brisati točke skupa $\mathcal{T}$ tako da u svakom koraku obriše po tri točke koje su vrhovi nekog jednakostraničnog trokuta. Korak ponavlja sve dok mu ne ostane točno jedna točka. Točka skupa $\mathcal{T}$ koja može ostati posljednja neobrisana naziva se *Josipova*. Odredi broj Josipovih točaka.

IV. razred

1. Neka je $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nekonstantan aritmetički niz realnih brojeva takav da postoji prirodni broj r za koji je

$$a_{r+1} + a_{r+2} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{3r+2}.$$

Dokaži da niti jedan član tog niza nije jednak 0.

2. Neka je ABC trokut s pravim kutom u vrhu C. Neka je D nožište visine iz vrha C. Kružnica sa središtem u C polumjera $|CD|$ siječe opisanu kružnicu trokuta ABC u točkama E i F. Pravac EF siječe duljinu $\overline{CD}$ u točki P. Dokaži da je P polovište duljine $\overline{CD}$.

3. Za uređenu trojku prirodnih brojeva (a,b,c) kažemo da je *morska* ako su a,b i c međusobno različiti, te je broj ac djeljiv brojevima $a+b$ i $b+c$. Dokaži da

a) za svaki prirodni broj $d>1$ postoji morska trojka (a,b,c) za koju je $M(a,b,c)=d$.
b) ne postoji morska trojka (a,b,c) za koju je $M(a,b,c)=1$.

Napomena. $M(a,b,c)$ označava najveći zajednički djelitelj brojeva a, b i c.

4. Odredi koliko ima polinoma s realnim koeficijentima

$$f(x)=x^{2026}+a_{2025}x^{2025}+\ldots+a_1x+a_0$$

takvih da je $f(2026)=0$ i da postoji polinom $g(x)$ s realnim koeficijentima takav da jednakost

$$(f(x+1)-f(x))\cdot g(x)=f(x)$$

vrijedi za svaki realan broj x.

5. Za arhipelag od 2026 otoka kažemo da je *dobro povezan* ako među svakih pet različitih otoka, postoje tri takva da između svaka dva od njih postoji dvosmjerna brodska linija. Odredi najveći prirodni broj N takav da u svakom dobro povezanom arhipelagu postoji niz od barem N različitih otoka takav da su svaka dva uzastopna, te prvi i posljednji otok u nizu povezani brodskom linijom.

Zadatci s Državnog natjecanja – B varijanta

I. razred

1. Odredi sve parove (x,y) realnih brojeva takvih da vrijedi

$$|x|+2|y|=2$$
$$||x|-|y||=1.$$

2. Odredi sve četvorke (a,b,c,d) prostih brojeva takvih da vrijedi $2a+4b+5c+8d=138$.

3. Neka je A umnožak brojeva $1-\frac{1}{n^2}$ za sve prirodne brojeve n od 2 do 2027, tj.

$$A=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2027^2}\right).$$

Riješi jednadžbu

$$x+\frac{x}{1+2}+\frac{x}{1+2+3}+\cdots+\frac{x}{1+2+\cdots+2026}=A,$$

pri čemu je na lijevoj strani zbroj 2026 pribrojnika oblika $\frac{x}{1+2+\cdots+n}$.

4. Neka su $\overline{AE}$ i $\overline{AF}$ visine paralelograma $ABCD$ pri čemu je točka E na dužini $\overline{BC}$, a točka F točka na dužini $\overline{CD}$. Ako je $|AE|=32$, $|AF|=20$ i $\cos|\sphericalangle EAF|=\frac{1}{3}$, kolika je površina četverokuta $AECF$?

5. Na metalnu ploču postavljaju se magneti, crveni i plavi, tako da na svakom polju bude po jedan magnet. Magnete iste boje ne razlikujemo.
a) Na koliko se načina može popuniti jedan redak od šest polja tako da broj plavih magneta u tom retku bude paran?
b) Na koliko se načina može popuniti ploča dimenzija 6×6 tako da u svakom retku i u svakom stupcu bude paran broj plavih magneta?

II. razred

1. Odredi sve peteroznamenkaste brojeve kojima aritmetička sredina prve i treće znamenke iznosi 7, druge i četvrte 5, treće i pete 4, a četvrte i prve znamenke 5.

2. Odredi najmanju moguću duljinu stranice $\overline{BC}$ trokuta ABC u kojem vrijedi

$$|\sphericalangle BAC| = 60^\circ \quad \text{i} \quad |AB| + 3|AC| = \sqrt{2}.$$

3. Trokutu ABC opisana je kružnica k. Duljine lukova $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CA}$ i $\overset{\frown}{AB}$ kružnice k odnose se kao $3 : 2 : 7$. Izračunaj vjerojatnost da se slučajno odabrana točka kruga omeđenoga kružnicom k nalazi unutar trokuta ABC.

4. Odredi sve realne brojeve p, q i r za koje je $[-1, 2\rangle \setminus \{r\}$ skup svih rješenja nejednadžbe

$$\frac{-2px^2 + p^2x}{0.25q^3x^2 + q^2x} \geq 0.$$

5. Lorna je stavila kuglice u deset kutija tako da je u svakoj kutiji barem jedna kuglica i da ne postoje dvije kutije u kojima je jednak broj kuglica. Tada je primijetila da, koju god kutiju odabrala, može uzeti sve kuglice iz nje i ubaciti ih u neke od preostalih kutija tako da u svakoj od tih devet kutija bude jednak broj kuglica. Koliki je najmanji mogući ukupan broj kuglica u svih 10 kutija?

III. razred

1. Odredi sva rješenja nejednadžbe

$$\sin x \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x \leq -\frac{1}{2}$$

u intervalu $[-\pi, \pi]$.

2. Dva su vrha trokuta ABC točke $A(2, -3)$ i $B(3, -2)$. Težište toga trokuta leži na pravcu $3x - y - 8 = 0$, a njegova površina iznosi $\frac{3}{2}$. Odredi sve moguće koordinate vrha C.

3. Odredi sve prirodne brojeve n takve da je $\log_2\left(n^2 + 295\right)$ također prirodan broj.

4. Neka je $ABCD$ konveksan četverokut takav da vrijedi

$$|AB| = |CD| = 5, \quad |BC| = \sqrt{65} \quad \text{i} \quad |AD| = 7.$$

Dijagonale tog četverokuta sijeku se u točki P. Ako je zbroj površina trokuta PAB i PCD jednak zbroju površina trokuta PBC i PDA, kolika je površina četverokuta $ABCD$?

5. Za ekipno natjecanje iz matematike prijavili su se učenici triju razreda, 3.a, 3.b i 3.c. Iz svakoga od tih triju razreda prijavila su se po dva mladića i dvije djevojke. Ako se od svih prijavljenih učenika na slučajan način odabere četveročlana ekipa, kolika je vjerojatnost da će u ekipi biti predstavnici svakoga razreda te barem jedan mladić i barem jedna djevojka?

IV. razred

1. Dokaži da za svaki prirodni broj $n \geq 2$ vrijedi

$$\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{1}{(n-1)^2}+\frac{1}{n^2}}=n-\frac{1}{n}.$$

2. Odredi sve kompleksne brojeve z za koje vrijedi

$$\operatorname{Re}(z^4)-\frac{1}{2}\operatorname{Im}(z^4)=\left(\operatorname{Re}(z^2)\right)^2$$

i

$$\operatorname{Im}(z^2)=2\sqrt{2}.$$

3. Neka je ABC trokut s pravim kutom u vrhu C. Simetrala kuta $\sphericalangle BAC$ siječe opisanu kružnicu tog trokuta u točkama A i D. Neka je E točka na pravcu AC takva da je duljina $\overline{AD}$ okomita na dužinu $\overline{DE}$. Ako je točka C polovište dužine $\overline{AE}$, odredi $|\sphericalangle BAC|$.

4. Ana i Tea naizmjence bacaju asimetrični novčić kod kojega pismo pada s vjerojatnošću p. Pobjeđuje ona koja prva dobije pismo. Ako Tea baca prva, a Ana pobjeđuje s vjerojatnošću 0.25, odredi p.

5. Odredi najmanji prirodni broj koji ima točno 30 djelitelja.

Državno povjerenstvo za natjecanja iz matematike