ISSN 1333-6347 (Print)
ISSN 2975-7452 (Online)

Pregledni rad
Review

Od Einsteina do Martinisa
Od EPR paradoksa do kvantnog računala

From Einstein to Martinis
From the EPR Paradox to the Quantum Computer

Miroslav Dorešić*
Teorijski fizičar / Theoretical physicist
Podgoračka 4, HR-10040 Zagreb, Hrvatska / Croatia

Primljeno /*Received*: 2026-06-15; Prihvaćeno/*Accepted*: 2026-06-30
Rukopis je predan na hrvatskom jeziku / *Manuscript submitted in Croatian*

Pionirima kvantne teorije,
čije su se sumnje pokazale jednako važnima kao i njihova otkrića.

To the pioneers of quantum theory,
whose doubts proved as important as their discoveries.

SAŽETAK

Ovaj rad prati gotovo stoljetni intelektualni razvoj koji povezuje Einsteinovu kritiku kvantne mehanike s nastankom suvremene kvantne informatike i kvantnog računalstva. Polazeći od EPR (Einstein–Podolsky–Rosen) paradoksa iz godine 1935., prikazuje razvoj Bellova teorema, eksperimentalnu potvrdu kvantne spregnutosti, otkriće anyona i poopćenih kvantnih statistika, ulogu Chern–Simonsove topološke teorije, razvoj kvonskih algebri te nastanak topološkoga kvantnoga računalstva.

SUMMARY

This paper traces the nearly century-long intellectual journey connecting Einstein's critique of quantum mechanics with the emergence of modern quantum information science and quantum computing. Beginning with the 1935 EPR (Einstein–Podolsky–Rosen) paradox, it follows the development of Bell's theorem, the experimental confirmation of quantum entanglement, the discovery of anyons and generalized quantum statistics, the role of Chern–Simons topology, the theory of quon algebras, and the rise of topological quantum computation.

* Adresa autora za dopisivanje / *Author's correspondence address*:
E-pošta / *E-mail*: miroslav.doresic@gmail.com

Ovaj je rad predan na prvu objavu časopisu Prirodoslovlje pod licencijom CC-BY 4.0.
This work has been granted to the journal Prirodoslovlje under the CC-BY 4.0 license.

Posebna se pozornost posvećuje radu *Anyons as Quon Particles* (Bardek, Dorešić i Meljanac, 1994.), u kojemu se istražuje operatorski opis anyona i veza između topologije i poopćenih operatornih algebri. Iz današnje perspektive taj se pristup može promatrati kao rani pokušaj povezivanja topoloških struktura s kvantnom informacijom.

Rad nadalje razmatra doprinos Alekseja Kitajeva topološkoj zaštiti kvantnih informacija, razvoj površinskog (surface) koda kao vodeće arhitekture za ispravljanje pogrješaka te eksperimentalni rad Johna Martinisa na supravodljivim kvantnim procesorima. U završnim poglavljima razmatraju se suvremeni radovi Francesca Toppana o pletenim (braided) Majoraninim kubitima i njihovoj vezi s poopćenim statistikama.

Središnja je teza rada što naizgled odvojena područja – kvantni temelji, spregnutost, anyoni, topologija, poopćene statistike i kvantno računalstvo – tvore jedinstvenu konceptualnu cjelinu u kojoj informacija postupno postaje jedno od temeljnih načela moderne fizike.

KLJUČNE RIJEČI: Bellov teorem, Einsteinova kritika kvantne mehanike, John M. Martinis i supravodljivi kvantni procesori, rad Bardek-Dorešić-Meljanac, topološko kvantno računalstvo

UVOD

Povijest moderne fizike često se prikazuje kao niz revolucionarnih otkrića. Kvantna mehanika pojavila se početkom dvadesetoga stoljeća i preobrazila razumijevanje tvari i zračenja. Teorija relativnosti preoblikovala je poimanje prostora i vremena. Kvantna teorija polja ujedinila je čestice i međudjelovanja, dok je fizi-

Particular attention is devoted to the paper *Anyons as Quon Particles* (Bardek, Dorešić, and Meljanac, 1994), which explored an operator-algebraic description of anyons and investigated the relationship between topology and generalized operator structures. From today's perspective, this paper may be viewed as an early attempt to connect topological concepts with quantum information through algebraic methods.

The paper further examines Alexei Kitaev's introduction of topological protection and quantum error correction, the development of the surface code as the leading fault-tolerant architecture, and John Martinis's pioneering contributions to superconducting quantum processors. The concluding chapters discuss recent work by Francesco Toppan on braided Majorana qubits and its conceptual links with generalized statistics and topological quantum information.

The central thesis of the book is that seemingly disparate fields – quantum foundations, entanglement, anyons, topology, generalized statistics, and quantum computation – form a coherent conceptual narrative in which information gradually emerges as one of the fundamental organizing principles of modern physics.

KEYWORDS: Einstein's critique of quantum mechanics, John Martinis and superconducting quantum processors, topological quantum computation

INTRODUCTION

The history of modern physics is often presented as a sequence of revolutionary discoveries. Quantum mechanics emerged in the early twentieth century and transformed our understanding of matter and radiation. Relativity reshaped our conception of space and time. Quantum field theory unified particles and interactions,

ka kondenzirane tvari otkrila posve nove oblike kolektivnoga ponašanja.

Ipak, ispod te bogate raznolikosti razvoja krije se dublja intelektualna nit. Mnoga od najvažnijih dostignuća moderne fizike mogu se razumjeti kao uzastopni pokušaji odgovora na jedno iznenađujuće jednostavno pitanje: *Kako je informacija predstavljena u fizičkoj stvarnosti?*

To se pitanje prvi put pojavilo u posebno upečatljivom obliku godine 1935., kada su Albert Einstein, Boris Podolsky i Nathan Rosen objavili svoj slavni rad o onome što je kasnije postalo poznato kao EPR-paradoks [1].

Einstein je bio duboko nezadovoljan probabilističkom (vjerojatnosnom) interpretacijom kvantne mehanike. Iako je teorija davala iznimno točna predviđanja, vjerovao je da ne može pružiti potpun opis fizičke stvarnosti. EPR argument trebao je pokazati da ispod kvantnih vjerojatnosti mora postojati neka dublja razina opisa. Kasnija povijest fizike krenula je neočekivanim putem. Umjesto da razotkrije nedostatak kvantne mehanike, EPR paradoks naposljetku je doveo do otkrića kvantne spregnutosti (*entanglementa*) kao jednoga od najtemeljnijih obilježja prirode.

John Bell pretvorio je Einsteinov filozofski prigovor u precizan matematički teorem [2]. Eksperimentalni testovi Clausera, Aspecta, Zeilingera i mnogih drugih pokazali su [3,4] da priroda krši Bellove nejednakosti. Lokalni realizam više se nije mogao održati u svom klasičnom obliku. Pokazalo se da su kvantne korelacije snažnije nego što je Einstein mogao zamisliti.

while condensed-matter physics revealed entirely new forms of collective behavior.

Yet beneath this rich diversity of developments lies a deeper intellectual thread. Many of the most important advances in modern physics can be understood as successive attempts to answer a surprisingly simple question: *How is information represented in physical reality?*

This question first appeared in a particularly striking form in 1935, when Albert Einstein, Boris Podolsky, and Nathan Rosen published their celebrated paper on what later became known as the EPR paradox [1]. Einstein was deeply dissatisfied with the probabilistic interpretation of quantum mechanics. Although the theory produced extraordinarily accurate predictions, he believed that it could not provide a complete description of physical reality. The EPR argument was intended to demonstrate that some deeper level of description must exist beneath quantum probabilities.

The subsequent history of physics took an unexpected turn. Rather than exposing a flaw in quantum mechanics, the EPR paradox ultimately led to the discovery of quantum entanglement as one of the most fundamental features of nature.

John Bell transformed Einstein's philosophical objection into a precise mathematical theorem [2]. Experimental tests by Clauser, Aspect, Zeilinger, and many others demonstrated [3,4] that nature violates Bell inequalities. Local realism could no longer be maintained in its classical form. Quantum correlations proved to be stronger than Einstein ad imagined.

The concept of information gradually moved from the periphery of physics toward its center. At roughly the same time, a different revolution was taking place within condensed-matter physics. In 1982, Frank Wil-

Pojam informacije postupno se pomicao s rubova fizike prema njezinu središtu. Otprilike u isto vrijeme odvijala se još jedna revolucija unutar fizike kondenzirane tvari. Godine 1982. Frank Wilczek uveo je pojam anyona [5] – čestica koje postoje u dvodimenzionalnim sustavima i koje se pokoravaju statistici koja se nalazi između bozonske i fermionske. To je otkriće temeljito promijenilo tradicionalnu klasifikaciju identičnih čestica.

Gotovo cijelo stoljeće fizičari su pretpostavljali da sve čestice moraju pripadati jednoj od dviju kategorija: bozoni ili fermioni. Anyoni su pokazali da ta pretpostavka vrijedi samo u trodimenzionalnom prostoru. U dvije dimenzije postaju moguće posve nove vrste kvantne statistike. Još je zanimljivije to što izmjena čestica postaje topološka operacija. Topologija, koja se dotad smatrala apstraktnom granom matematike, dobila je izravno fizičko značenje.

Kasniji razvoj Chern–Simonsove teorije [6,7] pokazao je da topološke strukture mogu stvarati mjerljive fizičke učinke. Statistička faza anyona ne proizlazi iz lokalnih sila, nego iz globalnih topoloških svojstava sustava. Ta je spoznaja označila početak duboke sinteze geometrije, topologije i kvantne fizike.

Istodobno su istraživači počeli proučavati mogućnost opisivanja generalizirane kvantne statistike pomoću algebarskih struktura. Pojava q-deformiranih algebri i kvonske statistike [8] sugerirala je da poznata podjela na bozone i fermione možda predstavlja samo poseban slučaj unutar šireg matematičkoga okvira. Jedan

czek introduced the concept of anyons [5] – particles that exist in two-dimensional systems and obey statistics intermediate between those of bosons and fermions. This discovery fundamentally altered the traditional classification of identical particles.

For nearly a century, physicists had assumed that all particles must belong to one of two categories: bosons or fermions. Anyons revealed that this assumption is valid only in three spatial dimensions. In two dimensions, entirely new forms of quantum statistics become possible. Even more remarkably, the exchange of particles becomes a topological operation. Topology, previously regarded as an abstract branch of mathematics, acquired direct physical significance.

The subsequent development of Chern–Simons theory [6,7] showed that topological structures can generate observable physical effects. The exchange phase of anyons originates not from local forces but from global topological properties of the system. This realization marked the beginning of a profound synthesis between geometry, topology, and quantum physics.

At the same time, researchers began exploring whether generalized quantum statistics could be described through algebraic structures. The emergence of q-deformed algebras and quon statistics [8] suggested that the familiar distinction between bosons and fermions might be only a special case within a broader mathematical frame-work. One contribution to this effort was the paper *Anyons as Quon Particles* published in 1994 by Velimir Bardek, Miroslav Dorešić, and Stjepan Meljanac [9]. The central objective of that work was to investigate whether the topological properties of anyons could be represented within a generalized operator formalism related to quon algebras. Although topological quan-

od doprinosa tom istraživačkom smjeru bio je rad: *Anyons as Quon Particles*, koji su godine 1994. objavili Velimir Bardek, Miroslav Dorešić i Stjepan Meljanac [9]. Temeljni cilj toga rada bio je istražiti mogu li se topološka svojstva anyona opisati unutar generaliziranoga operatorskoga formalizma povezanog s kvonskim algebrama. Premda topološko kvantno računalstvo tada još nije bilo predloženo, pitanja kojima se rad bavio anticipirala su nekoliko tema koje će kasnije postati središnje za to područje.

Sljedeći veliki korak napravio je Alexei Kitaev. On je prepoznao da se topologija može koristiti ne samo za opis egzotičnih čestica nego i za zaštitu kvantne informacije. Njegov torički kod (*toric code)* uveo je radikalno novu paradigmu [10] u kojoj se logička kvantna stanja ne pohranjuju u lokalnim fizičkim stupnjevima slobode, nego u globalnim topološkim svojstvima sustava. Pogrješke postaju topološka pobuđenja. Računanje postaje geometrija. Informacija postaje topologija. Ta je ideja preobrazila područje kvantnoga računalstva.

Tijekom sljedećih desetljeća ti su se koncepti razvili u praktične arhitekture za kvantno računalstvo otporno na pogrješke, osobito kroz razvoj arhitektura površinskog koda (*surface code*) i srodnih topoloških metoda korekcije pogrješaka [11]. Eksperimentalnu realizaciju tih ideja unaprijedio je pionirski rad Johna Martinisa i njegovih suradnika. Zahvaljujući supravodljivim kvantnim sklopovima postala je moguća sve preciznija kontrola kvantnih stanja. Pojmovi koji su nekoć pripadali istum computation had not yet been proposed, the questions addressed in that work anticipated several themes that would later become central to the field.

The next major step came from Alexei Kitaev. He recognized that topology could be used not merely to describe exotic particles but also to protect quantum information. His toric code introduced a radically new paradigm [10] in which logical quantum states are encoded in global topological properties rather than local physical degrees of freedom. Errors become topological excitations. Computation becomes geometry. Information becomes topology. This idea transformed the field of quantum computation.

Over the following decades, these concepts evolved into practical architectures for fault-tolerant quantum computing, particularly through the development of surface codes and related topological error-correction schemes [11]. The experimental realization of these ideas was advanced by the pioneering work of John Martinis and his collaborators. Through superconducting quantum circuits, increasingly precise control of quantum states became possible. Concepts that once belonged exclusively to theoretical physics gradually entered the laboratory. The path from Einstein's paradox to quantum processors had become a reality.

This work follows that journey. Its purpose is not merely historical. Rather, it seeks to reveal the conceptual unity underlying developments that are often treated separately:

– quantum foundations,
– entanglement,
– generalized statistics,
– anyons,
– topology,

ključivo teorijskoj fizici postupno su ušli u laboratorij. Put od Einsteinova paradoksa do kvantnih procesora postao je stvarnost.

Ovaj rad prati upravo to putovanje. Njegov cilj nije samo povijesni. On nastoji otkriti konceptualno jedinstvo koje povezuje razvojna područja koja se često promatraju odvojeno:

– temelje kvantne teorije,
– kvantnu spregnutost,
– generaliziranu statistiku,
– anyone,
– topologiju,
– kvantnu informaciju,
– topološko kvantno računalstvo,
– i suvremeni kvantni hardver.

Promatrani iz dovoljno široke perspektive, svi ti razvoji predstavljaju dijelove jedne jedinstvene priče. To je priča o tome kako je fizika postupno počela prepoznavati informaciju kao jedan od svojih najtemeljnijih pojmova. Putovanje započinje Einsteinovim pitanjem. Nastavlja se preko Bellova teorema, anyona, topologije, generalizirane statistike i kvantnog računalstva. I traje još i danas.

1. EINSTEINOV IZAZOV KVANTNOJ MEHANICI

1.1. EPR paradoks

Godine 1935. Albert Einstein (slika 1), Boris Podolsky i Nathan Rosen objavili su rad koji će postati jedno od najutjecajnijih djela u povijesti fizike. Njegov je naslov bio varljivo jednostavan: *Može li se kvantnomehanički opis fizičke stvarnosti smatrati potpunim?*

– quantum information,
– topological quantum computation,
– and modern quantum hardware.

Viewed from a sufficiently broad perspective, these developments form parts of a single story. It is the story of how physics gradually came to recognize information as one of its most fundamental concepts. The journey begins with Einstein's question. It leads through Bell's theorem, anyons, topology, generalized statistics, and quantum computation. And it continues today.

1 EINSTEIN'S CHALLENGE TO QUANTUM MECHANICS

1.1 The EPR Paradox

In 1935, Albert Einstein (Figure 1), Boris Podolsky, and Nathan Rosen published a paper that would become one of the most influential works in the history of physics. Its title was deceptively simple: *Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?*

The objective of the paper was not to defend quantum mechanics but to challenge it. At that time, quantum mechanics had already achieved extraordinary success. The theory accurately described atomic spectra, chemical bonding, and a wide range of microscopic phenomena. Yet Einstein remained unconvinced that it provided a complete description of nature. His concern was not with the predictive power of the theory. It was with its interpretation. According to the Copenhagen interpretation, physical quantities do not generally possess definite values prior to measurement. Instead, quantum systems are described by a wave function that yields only probabilities for possible outcomes. Einstein

Cilj toga rada nije bio obraniti kvantnu mehaniku, nego je dovesti u pitanje. U to je vrijeme kvantna mehanika već postigla izvanredan uspjeh. Teorija je točno opisivala atomske spektre, kemijske veze i širok raspon mikroskopskih pojava. Ipak, Einstein nije bio uvjeren da ona pruža potpun opis prirode. Njegova zabrinutost nije se odnosila na prediktivnu moć teorije. Odnosila se na njezinu interpretaciju. Prema kopenhaškoj interpretaciji, fizičke veličine općenito nemaju određene vrijednosti prije mjerenja. Umjesto toga, kvantni sustavi opisani su valnom funkcijom koja daje samo vjerojatnosti mogućih ishoda. Einstein je takav zaključak smatrao duboko nezadovoljavajućim. Svoju je nelagodu sažeo u poznatoj izjavi: *Bog se ne kocka.*

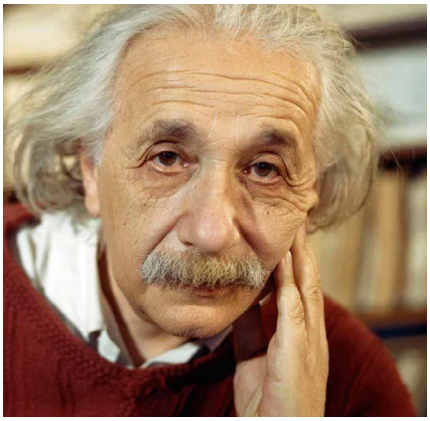
EPR rad nastojao je pokazati da kvantna mehanika mora biti nepotpuna te da ispod kvantnih vjerojatnosti mora postojati neka dublja razina fizičke stvarnosti.

1.2. Elementi fizičke stvarnosti

Einstein, Podolsky i Rosen započeli su predlaganjem kriterija fizičke stvarnosti. Tvrdili su: ako se, bez narušavanja fizičkog sustava, može sa sigurnošću predvidjeti vrijednost neke fizičke veličine, tada postoji element fizičke stvarnosti koji odgovara toj veličini. Taj se kriterij činio i razumnim i intuitivnim.

Ako se neka veličina može sa sigurnošću predvidjeti bez interakcije sa samim sustavom, prirodno je smatrati tu veličinu objektivno stvarnom. EPR argument zatim razmatra dvije čestice koje međusobno djeluju, a potom se razdvajaju na veliku udaljenost.

found this conclusion deeply unsatisfactory. He famously summarized his discomfort with the statement: *"God does not play dice."*



Slika 1. **Albert Einstein (1879. – 1955.)**
Figure 1. ***Albert Einstein (1879–1955)***

The EPR paper sought to demonstrate that quantum mechanics must be incomplete and that a deeper level of physical reality must exist beneath quantum probabilities.

1.2 Elements of Physical Reality

Einstein, Podolsky, and Rosen began by proposing a criterion for physical reality. They argued that: If, without disturbing a physical system, one can predict with certainty the value of a physical quantity, then there exists an element of physical reality corresponding to that quantity. This criterion appeared both reasonable and intuitive.

If a quantity can be predicted with certainty without interacting with the system itself, it seems natural to regard that quantity as objectively real. The EPR argument then considered two particles that interact and subsequently separate by a large distance.

Kvantna mehanika opisuje takav par jednom zajedničkom spregnutom (*entangled*) valnom funkcijom. Iako čestice mogu biti vrlo udaljene jedna od druge, njihova svojstva ostaju korelirana. Mjerenja provedena na jednoj čestici trenutačno određuju ishod odgovarajućih mjerenja na drugoj. Upravo se u toj značajci nalazi srž paradoksa.

1.3. Spregnuto stanje

Kako bismo ilustrirali argument, razmotrimo par čestica pripremljenih u spregnutom stanju.

Simbolički se može zapisati

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_A|0\rangle_B + |1\rangle_A|1\rangle_B\right). \quad (1.1)$$

Danas se to stanje prepoznaje kao jedan od najjednostavnijih primjera kvantne spregnutosti. Ako promatrač (A) izmjeri česticu (A) i dobije rezultat (0), tada će promatrač (B) odmah dobiti rezultat (0) pri mjerenju čestice (B). Slično tome, ako promatrač (A) dobije rezultat (1), promatrač (B) dobit će rezultat (1). Rezultati su savršeno korelirani. Einstein je tu situaciju smatrao duboko problematičnom.

Pretpostavimo da su čestice otputovale proizvoljno daleko jedna od druge. Kako mjerenje provedeno na jednoj čestici može trenutačno utjecati na stanje druge? Prividna napetost s načelom lokalnosti postala je središnje pitanje EPR argumenta.

1.4. Lokalnost i potpunost

Einstein je vjerovao da se fizički utjecaji ne mogu širiti brže od svjetlosti. To načeQuantum mechanics describes such a pair through a single entangled wave function. Although the particles may be far apart, their properties remain correlated. Measurements performed on one particle immediately determine the outcome of corresponding measurements on the other. This feature lies at the heart of the paradox.

1.3 The Entangled State

To illustrate the argument, consider a pair of particles prepared in an entangled state.

Symbolically, one may write

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_A|0\rangle_B + |1\rangle_A|1\rangle_B\right). \quad (1.1)$$

Today this state is recognized as one of the simplest examples of quantum entanglement. If observer *A* measures particle *A* and obtains the result 0, then observer *B* will immediately obtain 0 when measuring particle *B*. Similarly, if observer *A* obtains 1, observer *B* will obtain 1. The outcomes are perfectly correlated. Einstein regarded this situation as deeply problematic.

Suppose the particles have travelled arbitrarily far apart. How can a measurement performed on one particle instantaneously affect the state of the other? The apparent tension with locality became the central issue of the EPR argument.

1.4 Locality and Completeness

Einstein believed that physical influences cannot propagate faster than light. This principle follows naturally from special relativity. If measurements performed on one particle appear to determine properties of another distant particle, two possibilities seem available:

1. Quantum mechanics is incomplete and the particles possess hidden properties that determine the outcomes in advance.

lo prirodno proizlazi iz specijalne teorije relativnosti. Ako se čini da mjerenja provedena na jednoj čestici određuju svojstva druge, udaljene čestice, tada se naizgled nude dvije mogućnosti:

1. Kvantna mehanika je nepotpuna i čestice posjeduju skrivena svojstva koja unaprijed određuju ishode.

2. Postoji neki oblik nelokalnog utjecaja.

Einstein je snažno davao prednost prvoj mogućnosti. Sumnjao je da kvantna mehanika predstavlja samo statističku aproksimaciju neke dublje determinističke teorije. Stoga je EPR rad zaključio da kvantnomehanički opis stvarnosti ne može biti potpun.

Povijest će, međutim, krenuti drukčijim putem.

1.5. Rasprava koja je trajala desetljećima

EPR paradoks pokrenuo je jednu od najduljih i najdubljih rasprava u modernoj znanosti. Dugi niz godina ta je rasprava ostala ponajprije filozofske naravi. Činilo se da nijedan eksperiment nije sposoban razlikovati Einsteinovo gledište od predviđanja kvantne mehanike. Situacija se dramatično promijenila godine 1964. Te je godine John Bell otkrio izvanredan teorem koji je raspravu iz područja filozofije pretvorio u područje eksperimentalne znanosti.

Bell je pokazao da svaka lokalna teorija skrivenih varijabli mora zadovoljavati određene matematičke nejednakosti. Kvantna mehanika predviđa narušavanje

2. Some form of nonlocal influence exists.

Einstein strongly preferred the first possibility. He suspected that quantum mechanics represented only a statistical approximation to a deeper deterministic theory. The EPR paper therefore concluded that the quantum-mechanical description of reality could not be complete.

History, however, would take a different path.

1.5 A Debate That Lasted Decades

The EPR paradox initiated one of the longest and most profound debates in modern science. For many years the discussion remained largely philosophical. No experiment seemed capable of distinguishing Einstein's viewpoint from the predictions of quantum mechanics. The situation changed dramatically in 1964. In that year, John Bell discovered a remarkable theorem that transformed the debate from philosophy into experimental science.

Bell showed that any local hidden-variable theory must satisfy specific mathematical inequalities. Quantum mechanics predicts violations of those inequalities. For the first time, Einstein's challenge could be tested experimentally. The consequences would permanently alter our understanding of reality.

1.6 The Legacy of the EPR Paper

Although Einstein intended the EPR paper as a criticism of quantum mechanics, its long-term impact proved very different. The paradox introduced concepts that later became central to modern physics:

– quantum entanglement,
– nonlocal correlations,
– quantum information,

tih nejednakosti. Po prvi put Einsteinov izazov mogao se eksperimentalno provjeriti. Posljedice će trajno promijeniti razumijevanje stvarnosti.

1.6. Nasljeđe EPR rada

Iako je Einstein EPR rad zamislio kao kritiku kvantne mehanike, njegov se dugoročni utjecaj pokazao sasvim drukčijim. Paradoks je uveo pojmove koji su kasnije postali središnji za modernu fiziku:

– kvantnu spregnutost,
– nelokalne korelacije,
– kvantnu informaciju,
– kvantnu komunikaciju,
– kvantno računalstvo.

Ono što je započelo kao argument protiv kvantne mehanike na kraju je pomoglo otkriti neka od njezinih najdubljih i najiznenađujućih obilježja. EPR paradoks nije razotkrio nedostatak teorije. Umjesto toga, otvorio je vrata posve novom razumijevanju informacije i fizičke stvarnosti.

Sljedeći korak u ovoj priči pripada Johnu Bellu, čiji je teorem Einsteinov filozofski prigovor pretvorio u precizan eksperimentalni izazov.

2. BELLOV TEOREM I EKSPERIMENTALNA REVOLUCIJA

John Stewart Bell (1928. – 1990.) (slika 2), uspostavio je teorem s kojim je raspravu o EPR paradoksu pretvorio iz filozofske u eksperimentalnu znanost.

Bell je postigao ono što Einstein i Bohr nisu uspjeli: filozofski spor pretvorio je u kvantitativni eksperimentalni test.

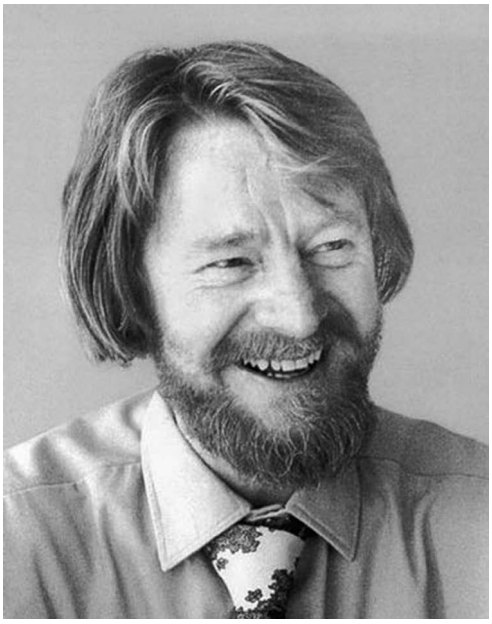
– quantum communication,
– quantum computation.

What began as an argument against quantum mechanics ultimately helped reveal some of its deepest and most surprising features. The EPR paradox did not expose a flaw in the theory. Instead, it opened the door to an entirely new understanding of information and physical reality.

The next step in this story belongs to John Bell, whose theorem transformed Einstein's philosophical objection into a precise experimental challenge.

2 BELL'S THEOREM AND THE EXPERIMENTAL REVOLUTION

John Stewart Bell (1928 – 1990) (Figure 2), established a theorem which transformed the



Slika 2. **John Stewart Bell (1928. – 1990.)**
Figure 2. ***John Stewart Bell (1928–1990)***

2.1. Od filozofije do fizike

Gotovo tri desetljeća nakon objavljivanja EPR rada rasprava o temeljima kvantne mehanike ostala je u velikoj mjeri filozofske naravi. Einstein je nastavio tvrditi da kvantna mehanika mora biti nepotpuna. Niels Bohr je branio kopenhašku interpretaciju i tvrdio da teorija pruža potpun opis svih opažljivih pojava. Činilo se da je taj spor nemoguće razriješiti eksperimentalnim putem. Obje su strane prihvaćale ista eksperimentalna predviđanja. Činilo se da se pitanje odnosi na interpretaciju, a ne na fiziku. Ta se situacija dramatično promijenila godine 1964., kada je John Stewart Bell objavio rad koji je preobrazio cijelu raspravu.

Bell je pokazao da Einsteinova zamisao o skrivenim varijablama nije samo filozofska mogućnost. Ona podrazumijeva određena matematička ograničenja koja se mogu eksperimentalno provjeriti. Po prvi put temelji kvantne mehanike postali su predmet eksperimentalne znanosti.

2.2. Lokalne skrivene varijable

Einsteinovo stajalište može se sažeti pomoću dviju pretpostavki.

Prva je *realizam*.

Fizički sustavi posjeduju određena svojstva neovisno o promatranju.

Druga je *lokalnost*.

Nijedan fizički utjecaj ne može se širiti brže od svjetlosti. Ako obje pretpostavke vrijede, tada ishodi mjerenja moraju biti određeni nekim skupom skrivenih varijabli, koje se obično označavaju simbolom

EPR debates from philosophy into experimental science.

Bell achieved what Einstein and Bohr could not: he converted a philosophical dispute into a quantitative experimental test.

2.1 From Philosophy to Physics

For nearly three decades after the publication of the EPR paper, the debate concerning the foundations of quantum mechanics remained largely philosophical. Einstein continued to argue that quantum mechanics must be incomplete. Niels Bohr defended the Copenhagen interpretation and maintained that the theory provided a complete description of all observable phenomena. The disagreement appeared impossible to resolve experimentally. Both sides accepted the same experimental predictions. The question seemed to concern interpretation rather than physics. This situation changed dramatically in 1964 when John Stewart Bell published a paper that transformed the entire discussion.

Bell demonstrated that Einstein's idea of hidden variables was not merely a philosophical possibility. It implied specific mathematical constraints that could be tested experimentally. For the first time, the foundations of quantum mechanics became an experimental science.

2.2 Local Hidden Variables

Einstein's position can be summarized through two assumptions.

The first is *realism*.

Physical systems possess definite properties independently of observation.

The second is *locality*.

No physical influence can propagate faster than light. If both assumptions hold, measure-

$$\lambda. \quad (2.1)$$

Rezultati mjerenja koja su provela dva udaljena promatrača, po tradiciji nazvana Alice i Bob, zatim se određuju funkcijama

$$A(a,\lambda), \qquad B(b,\lambda), \quad (2.2)$$

gdje a i b označuju postavke mjerenja.

Statistička korelacija između dvaju mjerenja jest

$$E(a,b) = \int d\lambda\, \rho(\lambda) A(a,\lambda) B(b,\lambda), \qquad (2.3)$$

gdje je $\rho(\lambda)$ distribucija vjerojatnosti skrivenih varijabli. Taj izraz prirodno proizlazi iz lokalnog realizma.

Bellov ključni uvid bio je da svaka teorija takve vrste mora zadovoljavati određene nejednakosti.

2.3. Bellova nejednakost

Bell je razmatrao parove čestica emitirane iz zajedničkog izvora i mjerene na međusobno udaljenim lokacijama.

Pod pretpostavkama lokalnosti i realizma mogu se izvesti ograničenja na moguće korelacije. Najjednostavniji suvremeni oblik jest Clauser–Horne–Shimony–Holtova (CHSH) nejednakost.

Definirajmo veličinu

$$S = E(a,b) + E(a,b') + E(a',b) - E(a',b'). \qquad (2.4)$$

Svaka lokalna teorija skrivenih varijabli mora zadovoljavati

ment outcomes must be determined by some set of hidden variables, usually denoted by

$$\lambda. \quad (2.1)$$

The results of measurements performed by two distant observers, traditionally called Alice and Bob, are then determined by functions

$$A(a,\lambda), \qquad B(b,\lambda), \quad (2.2)$$

where a and b denote measurement settings.

The statistical correlation between the two measurements is

$$E(a,b) = \int d\lambda\, \rho(\lambda) A(a,\lambda) B(b,\lambda), \qquad (2.3)$$

where $\rho(\lambda)$ is the probability distribution of hidden variables. This expression follows naturally from local realism.

Bell's crucial insight was that every theory of this type must satisfy certain inequalities.

2.3 Bell's Inequality

Bell considered pairs of particles emitted from a common source and measured at distant locations.

Under the assumptions of locality and realism, one can derive constraints on the possible correlations. The simplest modern form is the Clauser–Horne–Shimony–Holt (CHSH) inequality.

Define the quantity

$$S = E(a,b) + E(a,b') + E(a',b) - E(a',b'). \qquad (2.4)$$

Any local hidden-variable theory must satisfy

$$|S| \leq 2. \quad (2.5)$$

Taj je rezultat isključivo matematičke prirode. On proizlazi iz pretpostavki lokalnog realizma i ne ovisi o pojedinostima bilo koje određene fizičke teorije.

Kvantna mehanika, međutim, predviđa nešto drukčije.

2.4. Kvantnomehaničko predviđanje

Razmotrimo dvije čestice spina $\frac{1}{2}$ pripremljene u singletnom stanju

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|\uparrow\rangle_A|\downarrow\rangle_B - |\downarrow\rangle_A|\uparrow\rangle_B\Big). \quad (2.6)$$

Za mjerenja provedena u smjerovima koji su međusobno razdvojeni kutom ϑ, kvantna mehanika predviđa korelaciju

$$E(\theta) = -\cos\theta. \quad (2.7)$$

Odabirom prikladnih kutova mjerenja dobiva se

$$|S| = 2\sqrt{2}. \quad (2.8)$$

Budući da je

$$2\sqrt{2} > 2, \quad (2.9)$$

kvantnomehaničko predviđanje narušava Bellovu nejednakost. Ta vrijednost

$$2\sqrt{2}, \quad (2.10)$$

poznata je kao Tsirelsonova granica. Ona predstavlja najveće narušavanje koje dopušta kvantna mehanika.

$$|S| \leq 2. \quad (2.5)$$

This result is purely mathematical.

It follows from the assumptions of local realism and does not depend on the details of any particular physical theory.

Quantum mechanics, however, predicts something different.

2.4 Quantum Mechanical Prediction

Consider two spin $\frac{1}{2}$ particles prepared in the singlet state

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|\uparrow\rangle_A|\downarrow\rangle_B - |\downarrow\rangle_A|\uparrow\rangle_B\Big). \quad (2.6)$$

For measurements performed along directions separated by an angle ϑ, quantum mechanics predicts the correlation

$$E(\theta) = -\cos\theta. \quad (2.7)$$

Choosing suitable measurement angles yields

$$|S| = 2\sqrt{2}. \quad (2.8)$$

Since

$$2\sqrt{2} > 2, \quad (2.9)$$

the quantum prediction violates Bell's inequality. This value,

$$2\sqrt{2}, \quad (2.10)$$

is known as Tsirelson's bound. It represents the maximum violation allowed by quantum mechanics.

2.5. Značenje Bellova rezultata

Bellov teorem ne dokazuje da je kvantna mehanika točna. Umjesto toga, on dokazuje nešto još izvanrednije. Nijedna teorija koja zadovoljava i lokalnost i realizam ne može reproducirati sva predviđanja kvantne mehanike. Od barem jedne Einsteinove pretpostavke mora se odustati. Taj je zaključak duboko promijenio temelje fizike.

Rasprava više nije bila pitanje filozofskih sklonosti. Postala je pitanje o kojem se može odlučiti eksperimentalnim putem.

2.6. Aspectovi eksperimenti

Odlučujući eksperimenti započeli su 1970-ih godina i dosegli važnu prekretnicu radom Alaina Aspecta i njegovih suradnika godine 1982. Koristeći spregnute fotone, Aspect je proveo mjerenja posebno osmišljena za provjeru Bellovih nejednakosti. Rezultati su bili u skladu s kvantnom mehanikom. Bellove nejednakosti bile su narušene.

Lokalne teorije skrivenih varijabli bile su odbačene. Aspectovi eksperimenti predstavljali su jedno od najvažnijih postignuća fizike dvadesetoga stoljeća. Po prvi put kvantne nelokalne korelacije bile su izravno opažene. Pokazalo se da je pojava koju je Einstein smatrao paradoksalnom doista stvarno obilježje prirode.

2.7. Clauser, Zeilinger i doba kvantne informacije

Nakon Aspectova rada uslijedili su sve sofisticiraniji eksperimenti. John Clauser proveo je neke od najranijih provjera Bellovih nejednakosti. Anton Zeilinger razvio je

2.5 The Meaning of Bell's Result

Bell's theorem does not prove that quantum mechanics is correct. Instead, it proves something even more remarkable. No theory satisfying both locality and realism can reproduce all predictions of quantum mechanics. At least one of Einstein's assumptions must be abandoned. This conclusion profoundly changed the foundations of physics.

The debate was no longer about philosophical preferences. It became a question that could be decided experimentally.

2.6 Aspect's Experiments

The decisive experiments began in the 1970s and reached a major milestone through the work of Alain Aspect and his collaborators in 1982. Using entangled photons, Aspect performed measurements designed specifically to test Bell inequalities. The results agreed with quantum mechanics. Bell inequalities were violated.

Local hidden-variable theories were ruled out. Aspect's experiments represented one of the most important achievements in twentieth-century physics. For the first time, quantum nonlocal correlations were observed directly. The phenomenon Einstein had regarded as paradoxical turned out to be a genuine feature of nature.

2.7 Clauser, Zeilinger, and the Quantum Information Era

Aspect's work was followed by increasingly sophisticated experiments. John Clauser performed some of the earliest Bell tests. Anton Zeilinger developed long-distance entanglement experiments and demonstrated quantum teleportation and quantum communication protocols. Advances in detector technology, pho-

eksperimente sa spregnutošću na velikim udaljenostima te demonstrirao kvantnu teleportaciju i protokole kvantne komunikacije. Napredak u tehnologiji detektora, izvorima fotona i eksperimentalnom dizajnu postupno je zatvorio moguće rupe u Bellovim testovima. Početkom dvadeset i prvoga stoljeća dokazi su postali neosporni.

Priroda narušava Bellove nejednakosti. Spregnutost je stvarna. Nobelova nagrada za fiziku za godinu 2022. zajednički je dodijeljena Johnu F. Clauseru, Alainu Aspectu i Antonu Zeilingeru za eksperimente sa spregnutim fotonima kojima je utvrđeno narušavanje Bellovih nejednakosti i za pionirski doprinos kvantnoj informacijskoj znanosti.

2.8. Spregnutost kao resurs

Jedna od najiznenađujućih posljedica Bellova teorema jest da se spregnutost prestala promatrati kao paradoks. Umjesto toga, postala je resurs. Kvantna kriptografija koristi spregnutost kako bi zajamčila sigurnost.

Kvantna teleportacija koristi spregnutost za prijenos kvantnih stanja. Kvantno računalstvo iskorištava spregnutost za izvođenje izračuna koji su nemogući za klasične sustave. Ono što je Einstein smatrao dokazom nepotpunosti kvantne mehanike na kraju je postalo jedno od njezinih najmoćnijih obilježja.

2.9. Novi pogled na stvarnost

Bellov je teorem prisilio fizičare da preispitaju neke od svojih najdubljih pretpostavki.

ton sources, and experimental design gradually closed potential loopholes in Bell tests. By the early twenty-first century, the evidence had become overwhelming.

Nature violates Bell inequalities. Entanglement is real. The Nobel Prize in Physics 2022 was awarded jointly to John F. Clauser, Alain Aspect, Anton Zeilinger, for experiments with entangled photons establishing the violation of Bell inequalities and pioneering quantum information science.

2.8 Entanglement as a Resource

One of the most surprising consequences of Bell's theorem is that entanglement ceased to be viewed as a paradox. Instead, it became a resource. Quantum cryptography uses entanglement to guarantee security.

Quantum teleportation uses entanglement to transfer quantum states. Quantum computing exploits entanglement to perform computations impossible for classical systems. What Einstein regarded as evidence for the incompleteness of quantum mechanics ultimately became one of its most powerful features.

2.9 A New View of Reality

Bell's theorem forced physicists to reconsider some of their deepest assumptions.

Classical physics had emphasized:

– locality,

– determinism,

– independent physical systems.

Quantum physics revealed a different picture. Correlations can exist that have no classical explanation. Information becomes a fundamental physical quantity. The whole may contain properties that cannot be reduced to its individ-

Klasična fizika naglašavala je:
– lokalnost,
– determinizam,
– neovisne fizičke sustave.

Kvantna fizika otkrila je drukčiju sliku. Mogu postojati korelacije koje nemaju klasično objašnjenje. Informacija postaje temeljna fizikalna veličina. Cjelina može sadržavati svojstva koja se ne mogu svesti na njezine pojedinačne dijelove. Ta je spoznaja otvorila vrata teoriji kvantne informacije. Ona je također pripremila konceptualno tlo za kasniji razvoj ideja povezanih s anyonima, topologijom i kvantnim računalstvom.

Sljedeće poglavlje prati još jedno revolucionarno otkriće proizašlo iz kvantne teorije: spoznaju da sama statistika čestica može biti bogatija od tradicijske podjele na bozone i fermione.

3. IZA BOZONA I FERMIONA: OTKRIĆE ANYONA

Frank Wilczek (slika 3) dobitnik je Nobelove nagrade za fiziku za godinu 2004., čiji je rad iz 1982. uveo pojam anyona.

3.1. Stoljeće kvantne statistike

Jedno od najtemeljnijih načela kvantne fizike odnosi se na ponašanje istovjetnih čestica.

Tijekom prve polovice dvadesetoga stoljeća fizičari su otkrili da se sve poznate čestice mogu svrstati u dvije kategorije.

Prvu kategoriju čine bozoni, čestice koje se pokoravaju Bose–Einsteinovoj statistici. Njihove valne funkcije ostaju nepromijenjene pri zamjeni čestica:

ual parts. This realization opened the door to quantum information theory. It also prepared the conceptual ground for later developments involving anyons, topology, and quantum computation.



Slika 3. **Frank Wilczek, dobitnik Nobelove nagrade**

Figure 3. ***Frank Wilczek, Nobel Prize winner***

The next chapter follows another revolutionary discovery that emerged from quantum theory: the realization that particle statistics themselves could be richer than the traditional distinction between bosons and fermions.

3 BEYOND BOSONS AND FERMIONS: THE DISCOVERY OF ANYONS

Frank Wilczek (Figure 3) is the 2004 Nobel Prize winner in Physics, whose work 1982 introduced the concept of anyon.

3.1 A Century of Quantum Statistics

One of the most fundamental principles of quantum physics concerns the behavior of iden-

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = +\psi(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1). \quad (3.1)$$

Drugu kategoriju čine fermioni, čestice koje se pokoravaju Fermi–Diracovoj statistici.

Njihove valne funkcije mijenjaju predznak pri zamjeni čestica:

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = -\psi(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1). \quad (3.2)$$

Ta razlika objašnjava neke od najvažnijih pojava u prirodi. Bozoni mogu zauzimati isto kvantno stanje, što dovodi do pojava kao što su laseri, superfluidnost i Bose–Einsteinova kondenzacija. Fermioni se pokoravaju Paulijevu načelu isključenja, koje je temelj strukture atoma, kemije i same stabilnosti tvari. Tijekom mnogih desetljeća činilo se da te dvije mogućnosti iscrpljuju sve opcije koje dopušta kvantna mehanika. Međutim, taj se zaključak temeljio na jednoj skrivenoj pretpostavci: pretpostavci da fizički prostor ima tri dimenzije.

3.2. Zaboravljeno zapažanje Leinaasa i Myrheima

Važan korak prema širem razumijevanju kvantne statistike učinili su godine 1977. J. M. Leinaas i J. Myrheim. Pažljivo su proučili topologiju konfiguracijskih prostora za istovjetne čestice. Njihova je analiza pokazala da tradicionalna podjela na bozone i fermione nije univerzalna.

U dvodimenzionalnim sustavima zamjena čestica posjeduje temeljno drukčija topološka svojstva. Iako je njihov rad bio matematički vrlo dubok, njegovo fizičko

tical particles. During the first half of the twentieth century, physicists discovered that all known particles could be classified into two categories.

The first category consists of bosons, particles that obey Bose–Einstein statistics. Their wave functions remain unchanged under particle exchange:

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = +\psi(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1). \quad (3.1)$$

The second category consists of fermions, particles that obey Fermi–Dirac statistics. Their wave functions change sign under exchange:

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = -\psi(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1). \quad (3.2)$$

This distinction explains some of the most important phenomena in nature. Bosons can occupy the same quantum state, leading to phenomena such as lasers, superfluidity, and Bose–Einstein condensation. Fermions obey the Pauli exclusion principle, which underlies the structure of atoms, chemistry, and the stability of matter itself. For many decades it appeared that these two possibilities exhausted all options allowed by quantum mechanics. Yet this conclusion rested on a hidden assumption: the assumption that physical space has three dimensions.

3.2 The Forgotten Observation of Leinaas and Myrheim

An important step toward a broader understanding of quantum statistics was taken in 1977 by J. M. Leinaas and J. Myrheim. They carefully examined the topology of configuration spaces for identical particles. Their analysis revealed that the traditional boson–fermion classification is not universal.

značenje nije odmah bilo prepoznato. Nekoliko godina kasnije novo će tumačenje promijeniti sve.

3.3. Wilczekov revolucionarni uvid

Godine 1982. F. Wilczek shvatio je da dvodimenzionalni kvantni sustavi mogu podržavati posve nove oblike statistike. Uveo je novu klasu čestica koju je nazvao *anyonima*. Naziv odražava činjenicu da te čestice mogu pokazivati *bilo koju* statističku fazu između poznatih bozonskih i fermionskih granica.

Za bozone:

$$\psi \longrightarrow \psi. \quad (3.3)$$

Za fermione:

$$\psi \longrightarrow -\psi. \quad (3.4)$$

Za anyone:

$$\psi \longrightarrow e^{i\theta}\psi, \qquad 0 \leq \theta \leq \pi. \quad (3.5)$$

Parametar ϑ kontinuirano prelazi između Boseove i Fermijeve statistike.

Kada je

$$\theta = 0, \quad (3.6)$$

dobivaju se bozoni.

Kada je

$$\theta = \pi, \quad (3.7)$$

dobivaju se fermioni.

In two-dimensional systems, the exchange of particles possesses fundamentally different topological properties. Although their work was mathematically profound, its physical significance was not immediately recognized. A few years later, a new interpretation would change everything.

3.3 Wilczek's Revolutionary Insight

In 1982, F. Wilczek realized that two-dimensional quantum systems could support entirely new forms of statistics. He introduced a new class of particles that he called *anyons*. The name reflects the fact that these particles can exhibit *any* statistical phase between the familiar bosonic and fermionic limits.

For bosons:

$$\psi \longrightarrow \psi. \quad (3.3)$$

For fermions:

$$\psi \longrightarrow -\psi. \quad (3.4)$$

For anyons:

$$\psi \longrightarrow e^{i\theta}\psi, \qquad 0 \leq \theta \leq \pi. \quad (3.5)$$

The parameter ϑ continuously interpolates between Bose and Fermi statistics.

When

$$\theta = 0, \quad (3.6)$$

one recovers bosons.

When

$$\theta = \pi, \quad (3.7)$$

one recovers fermions.

Međuvrijednosti odgovaraju istinski novim oblicima kvantne statistike.

3.4. Zašto su dvije dimenzije posebne?

Razlog zbog kojeg anyoni postoje samo u dvije dimenzije u svojoj je biti topološke prirode. U tri dimenzije dvostruka zamjena dviju čestica ekvivalentna je tome da se ne učini ništa. Odgovarajuće putanje uvijek se mogu neprekidno deformirati jedna u drugu.

Matematički se zamjene opisuju permutacijskom grupom

$$S_n. \quad (3.8)$$

Njene jednodimenzionalne reprezentacije dopuštaju samo dvije mogućnosti:

$$+1 \quad (3.9)$$

i

$$-1. \quad (3.10)$$

One odgovaraju upravo bozonima i fermionima. Dvodimenzionalni sustavi razlikuju se od toga. Putanje čestica ne mogu se uvijek neprekidno deformirati jedna u drugu. Povijest zamjena čestica postaje važna. Umjesto permutacijske grupe pojavljuje se grupa pletenica

$$B_n. \quad (3.11)$$

Ta grupa posjeduje beskonačno mnogo reprezentacija. Posljedično, postaju ostvarive posve nove statističke mogućnosti. Topologija na izravan i neizbježan način ulazi u fiziku.

Intermediate values correspond to genuinely new forms of quantum statistics.

3.4 Why Are Two Dimensions Special?

The reason anyons exist only in two dimensions is fundamentally topological. In three dimensions, exchanging two particles twice is equivalent to doing nothing. The corresponding trajectories can always be continuously deformed into one another.

Mathematically, exchanges are described by the permutation group

$$S_n. \quad (3.8)$$

Its one-dimensional representations allow only two possibilities:

$$+1 \quad (3.9)$$

and

$$-1. \quad (3.10)$$

These correspond precisely to bosons and fermions. Two-dimensional systems are different. Particle trajectories cannot always be continuously deformed into one another. The history of particle exchanges becomes important. Instead of the permutation group, one encounters the braid group

$$B_n. \quad (3.11)$$

This group possesses infinitely many representations. Consequently, entirely new statistical possibilities become available. Topology enters physics in a direct and unavoidable way.

3.5. Od rotacija do anyona: kako topologija određuje kvantni spin

Jedno od najdubljih pitanja moderne fizike odnosi se na podrijetlo kvantnog spina. Zašto elementarne čestice posjeduju spin i zašto su u nama poznatom trodimenzionalnom svijetu dopuštene samo cjelobrojne i polucjelobrojne vrijednosti?

Povijesno gledano, spin je uveden kao dodatni kvantni broj potreban za objašnjenje spektroskopskih opažanja i rezultata Stern–Gerlachova eksperimenta. Međutim, razvojem moderne matematike postalo je jasno da spin nije posljedica toga što se sićušna čestica fizički okreće oko vlastite osi. Naprotiv, on je manifestacija same geometrije i topologije prostora. Temeljna simetrija koja stoji u osnovi te pojave jest rotacijska invarijantnost. Zakoni fizike ne ovise o orijentaciji koordinatnog sustava, a ta se simetrija matematički opisuje rotacijskom grupom trodimenzionalnog prostora,

$$SO(3). \quad (3.12)$$

Svako kvantno stanje mora se transformirati prema nekoj reprezentaciji te grupe. Izvanredna je činjenica da je topologija grupe $SO(3)$ netrivijalna. Njezina fundamentalna grupa iznosi

$$\pi_1(SO(3)) = \mathbb{Z}_2. \quad (3.13)$$

Ta jednostavna matematička tvrdnja ima duboke fizičke posljedice. Ona implicira da se neprekidni niz rotacija koji odgovara punom okretu od 2π ne može neprekidno kontrahirati u jednu točku.

3.5 From Rotations to Anyons: How Topology Determines Quantum Spin

One of the most profound questions in modern physics concerns the origin of quantum spin. Why do elementary particles possess spin, and why are only integer and half-integer values allowed in the familiar three-dimensional world?

Historically, spin was introduced as an additional quantum number required to explain spectroscopic observations and the results of the Stern–Gerlach experiment. With the development of modern mathematics, however, it became clear that spin is not the consequence of a tiny particle physically rotating around its own axis. Rather, it is a manifestation of the geometry and topology of space itself. The fundamental symmetry underlying this phenomenon is rotational invariance. The laws of physics do not depend on the orientation of the coordinate system, and this symmetry is described mathematically by the rotation group of three-dimensional space,

$$SO(3). \quad (3.12)$$

Every quantum state must transform according to some representation of this group. The remarkable fact is that the topology of $SO(3)$ is nontrivial. Its fundamental group is

$$\pi_1(SO(3)) = \mathbb{Z}_2. \quad (3.13)$$

This simple mathematical statement has profound physical consequences. It implies that a continuous sequence of rotations corresponding to a full 2π turn cannot be continuously contracted to a point. A useful visualization is pro-

Korisnu vizualizaciju pruža poznati Diracov trik s remenom, poznat i kao Feynmanov trik s tanjurom. Nakon jedne pune rotacije sustav ostaje topološki uvrnut. Tek nakon rotacije od 4π konfiguracija se može neprekidno deformirati natrag u svoje izvorno stanje.

Netrivijalna topologija grupe $SO(3)$ znači da se kvantna stanja prirodno ne povezuju sa samom grupom $SO(3)$, nego s njezinom dvostrukom natkrivajućom grupom,

$$SU(2). \quad (3.14)$$

Ireducibilne reprezentacije $SU\ (2)$ označene su s

$$j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \ldots \quad (3.15)$$

a svaka reprezentacija posjeduje

$$2j + 1 \quad (3.16)$$

nezavisnih stanja. Poznata kvantizacija kutnog momenta stoga proizlazi izravno iz teorije reprezentacija rotacijske grupe.

U tom suvremenom gledištu spin nije mehaničko svojstvo, nego grupno-teorijsko svojstvo. On karakterizira način na koji se kvantno stanje transformira pri rotacijama. Čestice s cjelobrojnim spinom odgovaraju običnim tenzorskim reprezentacijama, dok čestice s polucjelobrojnim spinom odgovaraju spinorskim reprezentacijama grupe $SU\,(2)$.

Za čestice sa spinom 1/2 pojavljuje se osobito upečatljiva pojava. Pri rotaciji za

vided by the celebrated Dirac belt trick, also known as Feynman's plate trick. After a single full rotation, the system remains topologically twisted. Only after a rotation of 4π can the configuration be continuously deformed back into its original state.

The nontrivial topology of $SO(3)$ means that quantum states are naturally associated not with $SO(3)$ itself but with its double covering group,

$$SU(2). \quad (3.14)$$

The irreducible representations of $SU\,(2)$ are labelled by

$$j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \ldots \quad (3.15)$$

and each representation possesses

$$2j + 1 \quad (3.16)$$

independent states. The familiar quantization of angular momentum therefore emerges directly from the representation theory of the rotation group.

In this modern viewpoint, spin is not a mechanical property but a group-theoretical one. It characterizes how a quantum state transforms under rotations. Integer-spin particles correspond to ordinary tensor representations, while half-integer-spin particles correspond to spinorial representations of $SU\,(2)$.

For particles with spin 1/2, an especially striking phenomenon appears. Under a rotation through an angle of 2π, the quantum state acquires a minus sign,

$$\psi \to -\psi, \quad (3.17)$$

kut od 2π kvantno stanje poprima predznak minus,

$$\psi \to -\psi, \quad (3.17)$$

iako se fizička konfiguracija doima nepromijenjenom. Tek nakon rotacije od 4π stanje se vraća na svoju izvornu vrijednost,

$$\psi \to \psi. \quad (3.18)$$

Takvo ponašanje, koje nema klasičnog analogona, pruža jedan od najljepših primjera geometrijske prirode kvantne mehanike.

3.6. Pletenice umjesto zamjena

Generatori grupe pletenica obično se označavaju s

$$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}. \quad (3.19)$$

Oni zadovoljavaju relacije pletenica

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \quad (3.20)$$

i

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, \qquad |i-j| > 1. \quad (3.21)$$

Za razliku od običnih zamjena čestica, operacije pletenja zadržavaju sjećanje na način na koji čestice obilaze jedna oko druge. To topološko pamćenje nalazi se u samom središtu anyonske statistike.

3.7. Frakcijska statistika

Anyoni se često opisuju kao čestice koje nose i električni naboj i magnetski tok.

even though the physical configuration appears unchanged. Only after a rotation of 4π does the state return to its original value,

$$\psi \to \psi. \quad (3.18)$$

This behavior, which has no classical counterpart, provides one of the most beautiful illustrations of the geometric nature of quantum mechanics.

3.6 Braids Instead of Exchanges

The generators of the braid group are usually denoted by

$$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}. \quad (3.19)$$

They satisfy the braid relations

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \quad (3.20)$$

and

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, \qquad |i-j| > 1. \quad (3.21)$$

Unlike ordinary particle exchanges, braid operations retain memory of how particles wind around one another. This topological memory lies at the heart of anyonic statistics.

3.7 Fractional Statistics

Anyons are often described as particles carrying both electric charge and magnetic flux. When one anyon moves around another, the wave function acquires an Aharonov–Bohm phase

$$\psi \longrightarrow \exp\left(iq \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}\right) \psi. \quad (3.22)$$

Kada se jedan anyon kreće oko drugoga, valna funkcija poprima Aharonov–Bohmovu fazu

$$\psi \longrightarrow \exp\left(iq \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}\right) \psi. \quad (3.22)$$

Dobivena faza ovisi samo o topologiji putanje. Ona ne ovisi o detaljnom obliku putanje. To je opažanje pružilo prvi jasan primjer fizičke pojave određene prvenstveno topologijom, a ne lokalnom dinamikom.

3.8. Rađanje topološke tvari

Otkriće anyona preobrazilo je fiziku kondenzirane tvari. Prije toga topologija se uglavnom smatrala granom čiste matematike. Anyoni su pokazali da topologija može imati izravne fizičke posljedice. Globalna svojstva sustava mogu određivati opažljive pojave. Ta je spoznaja naposljetku dovela do otkrića:

– frakcijskih kvantnih Hallovih stanja,
– topoloških izolatora,
– topoloških supravodiča,
– topoloških kvantnih računala.

Pojavila su se posve nova stanja tvari čija su određujuća svojstva bila topološke, a ne lokalne prirode.

3.9. Nova granica

Otkriće anyona predstavljalo je mnogo više od puke izmjene statistike čestica. Ono je otkrilo da su kvantna mehanika, geometrija i topologija duboko međusobno povezane. Zamjena čestica postala je topološka operacija. Statistika je postala geometrija. A geometrija je postala informacija.

The resulting phase depends only on the topology of the path. It does not depend on the detailed trajectory. This observation provided the first clear example of a physical phenomenon determined primarily by topology rather than local dynamics.

3.8 The Birth of Topological Matter

The discovery of anyons transformed condensed-matter physics.

Previously, topology had been regarded largely as a branch of pure mathematics. Anyons demonstrated that topology could have direct physical consequences. Global properties of a system could determine observable phenomena. This insight eventually led to the discovery of:

– fractional quantum Hall states,
– topological insulators,
– topological superconductors,
– topological quantum computers.

Entirely new phases of matter emerged whose defining characteristics were topological rather than local.

3.9 A New Frontier

The discovery of anyons represented far more than a modification of particle statistics. It revealed that quantum mechanics, geometry, and topology are deeply interconnected. The exchange of particles became a topological operation. Statistics became geometry. And geometry became information.

The next step in this development was to understand the physical mechanism responsible for anyonic behavior. That mechanism emerged through one of the most elegant theories in modern theoretical physics:

Sljedeći korak u tom razvoju bio je razumjeti fizički mehanizam odgovoran za anyonsko ponašanje. Taj se mehanizam pojavio kroz jednu od najelegantnijih teorija moderne teorijske fizike: Chern–Simonsovu baždarnu teoriju.

4. CHERN–SIMONSOVA TEORIJA I TOPOLOŠKO PODRIJETLO STATISTIKE

4.1. Od geometrije do topologije

Otkriće anyona odmah je postavilo temeljno pitanje. Koji fizički mehanizam proizvodi frakcijsku statistiku? Kako zamjena čestica može generirati fazu koja se razlikuje od poznatih bozonskih i fermionskih slučajeva? Odgovor je proizašao iz izvanredne sinteze baždarne teorije i topologije.

U središtu tog razvoja nalazi se Chern–Simonsova teorija, jedna od najelegantnijih konstrukcija moderne matematičke fizike.

Za razliku od konvencionalnih teorija polja, Chern–Simonsova teorija nema lokalne propagirajuće stupnjeve slobode. Njezin je bitan sadržaj topološki. Fizičke pojave ne ovise o lokalnim geometrijskim pojedinostima, nego o globalnoj strukturi sustava. Zbog toga Chern–Simonsova teorija pruža prirodan jezik za opisivanje anyona.

4.2. Chern–Simonsovo djelovanje

Razmotrimo baždarno polje A_μ u 2 + 1 dimenzija.

Abelovsko Chern–Simonsovo djelovanje je

4 CHERN–SIMONS THEORY AND THE TOPOLOGICAL ORIGIN OF STATISTICS

4.1 From Geometry to Topology

The discovery of anyons immediately raised a fundamental question.

What physical mechanism produces fractional statistics? How can the exchange of particles generate a phase that differs from the familiar bosonic and fermionic cases? The answer emerged through a remarkable synthesis of gauge theory and topology. At the center of this development stands Chern–Simons theory, one of the most elegant constructions in modern mathematical physics.

Unlike conventional field theories, Chern–Simons theory possesses no local propagating degrees of freedom. Its essential content is topological. Physical phenomena depend not on local geometric details but on the global structure of the system. For this reason, Chern–Simons theory provides the natural language for describing anyons.

4.2 Chern–Simons Action

Consider a gauge field A_μ in 2 + 1 dimensions. The Abelian Chern–Simons action is

$$S_{CS} = \frac{k}{4\pi} \int d^3x \, \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho, \quad (4.1)$$

where

– k is the Chern–Simons level,

– A_μ is the gauge potential,

– $\epsilon^{\mu\nu\rho}$ is the antisymmetric Levi–Civita tensor.

$$S_{CS} = \frac{k}{4\pi} \int d^3x \, \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho, \quad (4.1)$$

gdje je

– k je Chern–Simonsova razina,

– A_μ je baždarni potencijal,

– $\epsilon^{\mu\nu\rho}$ je antisimetrični Levi–Civitin tenzor.

To se djelovanje bitno razlikuje od Maxwellove elektrodinamike. U njemu se ne pojavljuje metrički tenzor. Teorija ovisi samo o topologiji. Udaljenosti i kutovi ne igraju bitnu ulogu. Važne su jedino globalne strukture. Ta značajka čini teoriju idealno prikladnom za opisivanje topoloških faza tvari.

4.3. Vezivanje magnetskog toka

Jedna od najizvanrednijih posljedica Chern–Simonsove teorije jest pojava vezivanja magnetskog toka. Jednadžbe polja impliciraju

$$B = \frac{2\pi}{k} \rho, \quad (4.2)$$

gdje

– (B) označuje magnetsko polje,

– ρ označuje gustoću čestica.

Ta relacija znači da svaka nabijena čestica automatski nosi sa sobom pridruženi magnetski tok. Čestica i njezin magnetski tok postaju nerazdvojivi.

Stoga se anyon može promatrati kao složeni objekt koji se sastoji od

– električnog naboja,

– magnetskog toka.

Ta jednostavna ideja pruža fizičko podrijetlo frakcijske statistike.

This action differs fundamentally from Maxwell electrodynamics. No metric tensor appears. The theory depends only on topology. Distances and angles play no essential role. Only global structures matter. This feature makes the theory ideally suited for describing topological phases of matter.

4.3 Flux Attachment

One of the most remarkable consequences of Chern–Simons theory is the phenomenon of flux attachment. The field equations imply

$$B = \frac{2\pi}{k} \rho, \quad (4.2)$$

where

– B denotes the magnetic field,

– ρ denotes the particle density.

This relation means that every charged particle automatically carries an associated magnetic flux. The particle and its flux become inseparable.

One may therefore regard an anyon as a composite object consisting of

– electric charge,

– magnetic flux.

This simple idea provides the physical origin of fractional statistics.

4.4 The Aharonov–Bohm Mechanism

To understand the statistical phase, consider one anyon moving around another. Although the particles never touch, the moving particle encircles the magnetic flux carried by the second particle. The wave function therefore acquires an Aharonov–Bohm phase

4.4. Aharonov–Bohmov mehanizam

Da bismo razumjeli statističku fazu, razmotrimo jedan anyon koji se kreće oko drugoga. Iako se čestice nikada ne dodiruju, gibajuća čestica obilazi magnetski tok koji nosi druga čestica. Valna funkcija stoga poprima Aharonov–Bohmovu fazu

$$\psi \longrightarrow \exp\left(iq \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}\right) \psi. \quad (4.3)$$

Faza ovisi samo o ukupnom obuhvaćenom magnetskom toku. Ona je potpuno neosjetljiva na lokalne pojedinosti putanje. To je karakteristično obilježje topološkog učinka. Faza je određena brojem obilaženja, a ne geometrijom.

4.5. Frakcijska statistika iz topologije

Aharonov–Bohmova faza nastala vezivanjem magnetskog toka izravno vodi do frakcijske statistike. Ako je obuhvaćeni magnetski tok Φ, tada je

$$\theta = q\Phi. \quad (4.4)$$

Zamjena dviju čestica proizvodi

$$\psi \longrightarrow e^{i\theta}\psi. \quad (4.5)$$

Za razliku od bozona i fermiona, za koje su moguće samo

$$\theta = 0 \quad (4.6)$$

ili

$$\theta = \pi \quad (4.7)$$

vrijednosti, Chern–Simonsov mehanizam dopušta neprekidan raspon vrijednosti.

$$\psi \longrightarrow \exp\left(iq \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}\right) \psi. \quad (4.3)$$

The phase depends only on the total enclosed flux. It is completely insensitive to local details of the trajectory. This is the hallmark of a topological effect. The phase is determined by winding rather than geometry.

4.5 Fractional Statistics from Topology

The Aharonov–Bohm phase generated by flux attachment leads directly to fractional statistics. If the enclosed flux is Φ, then

$$\theta = q\Phi. \quad (4.4)$$

The exchange of two particles produces

$$\psi \longrightarrow e^{i\theta}\psi. \quad (4.5)$$

Unlike bosons and fermions, for which only

$$\theta = 0 \quad (4.6)$$

or

$$\theta = \pi \quad (4.7)$$

are allowed, the Chern–Simons mechanism permits a continuous range of values. Fractional statistics emerges naturally. The statistical phase is not imposed by hand. It arises dynamically from the topology of the gauge field.

4.6 Wilson Loops and Topological Observables

A central concept in Chern–Simons theory is the Wilson loop

Frakcijska statistika pojavljuje se prirodno. Statistička faza nije nametnuta izvana. Ona dinamički proizlazi iz topologije baždarnog polja.

4.6. Wilsonove petlje i topološke opservable

Središnji pojam u Chern–Simonsovoj teoriji jest Wilsonova petlja

$$W(C) = \exp\left(i \oint_C A_\mu dx^\mu\right). \quad (4.8)$$

Vrijednost Wilsonove petlje ovisi samo o topologiji konture *C*. Posebno, međusobno povezane petlje daju netrivijalne topološke invarijante. To je opažanje otkrilo duboku povezanost između kvantne teorije polja i teorije čvorova. Po prvi put ideje iz topologije postale su izravno opažljive u jednoj fizikalnoj teoriji.

4.7. Wittenovo topološko tumačenje

Velik napredak ostvaren je radom E. Wittena. On je pokazao da Chern–Simonsova teorija pruža opis invarijanata čvorova preko kvantne teorije polja. Osobito, očekivane vrijednosti Wilsonovih petlji generiraju topološke invarijante kao što je Jonesov polinom.

Taj je rezultat uspostavio dubok most između:

– kvantne teorije polja,
– topologije,
– teorije čvorova.

Matematika koja leži u osnovi anyona tako je povezana s nekim od najdubljih struktura moderne geometrije.

$$W(C) = \exp\left(i \oint_C A_\mu dx^\mu\right). \quad (4.8)$$

The value of a Wilson loop depends only on the topology of the contour *C*. In particular, linked loops produce nontrivial topological invariants. This observation revealed a deep connection between quantum field theory and knot theory. For the first time, ideas from topology became directly observable in a physical theory.

4.7 Witten's Topological Interpretation

A major advance occurred through the work of E. Witten. He demonstrated that Chern–Simons theory provides a quantum-field-theoretic description of knot invariants. In particular, expectation values of Wilson loops generate topological invariants such as the Jones polynomial.

This result established a profound bridge between:

– quantum field theory,
– topology,
– knot theory.

The mathematics underlying anyons was therefore connected to some of the deepest structures in modern geometry.

4.8 Non-Abelian Generalization

The Abelian theory describes ordinary anyons whose exchange produces only a phase. A richer structure emerges when the gauge group becomes non-Abelian. The action takes the form

$$S_{CS} = \frac{k}{4\pi} \int \mathrm{Tr}\left(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A\right). \quad (4.9)$$

Examples include

$$SU(2)_k, \qquad U(1)_k. \quad (4.10)$$

4.8. Neabelovo poopćenje

Abelova teorija opisuje obične anyone, kod kojih zamjena proizvodi samo fazni faktor. Bogatija struktura pojavljuje se kada baždarna grupa postane neabelova. Djelovanje tada poprima oblik

$$S_{CS} = \frac{k}{4\pi} \int \mathrm{Tr} \left(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \right). \tag{4.9}$$

Primjeri uključuju

$$SU(2)_k, \qquad U(1)_k. \tag{4.10}$$

U tim teorijama zamjena čestica više ne množi valnu funkciju samo jednostavnim faznim faktorom. Umjesto toga, ona djeluje pomoću matrica na degeneriranom Hilbertovu prostoru. To je podrijetlo neabelovih anyona.

4.9. Topologija postaje informacija

Možda je najvažnija posljedica Chern–Simonsove teorije konceptualne prirode.

Ta je teorija pokazala da topologija može pohranjivati fizičku informaciju. Različiti topološki sektori odgovaraju fizikalno različitim kvantnim stanjima. Ta su stanja zaštićena od mnogih lokalnih poremećaja zato što se topologija ne može promijeniti malim lokalnim deformacijama. To će opažanje kasnije postati temelj topološkoga kvantnog računalstva. Informacija se može kodirati ne u lokalnim mikroskopskim varijablama, nego u globalnim topološkim strukturama. Takva bi informacija posjedovala prirodan oblik zaštite od šuma i dekoherencije.

In these theories, particle exchange no longer multiplies the wave function by a simple phase. Instead, it acts through matrices on a degenerate Hilbert space. This is the origin of non-Abelian anyons.

4.9 Topology Becomes Information

Perhaps the most important consequence of Chern–Simons theory is conceptual. The theory demonstrated that topology can store physical information. Different topological sectors correspond to physically distinct quantum states. These states are protected against many local perturbations because topology cannot be changed by small local deformations. This observation would later become the foundation of topological quantum computation. Information could be encoded not in local microscopic variables but in global topological structures. Such information would possess a natural form of protection against noise and decoherence.

4.10 Toward Topological Quantum Computing

By the late twentieth century, Chern–Simons theory had revealed a remarkable picture. Particle statistics, gauge fields, topology, and quantum phases were all aspects of a single mathematical framework. Anyons were no longer merely exotic particles. They became carriers of topological information.

The next question was unavoidable: Could topology itself be used to perform computation? The answer emerged through the pioneering work of Alexei Kitaev and the development of topological quantum computation.

4.10. Prema topološkom kvantnom računalstvu

Do kraja dvadesetoga stoljeća Chern–Simonsova teorija otkrila je izvanrednu sliku. Statistika čestica, baždarna polja, topologija i kvantne faze pokazali su se kao različiti aspekti jedinstvenoga matematičkoga okvira. Anyoni više nisu bili samo egzotične čestice. Postali su nositelji topološke informacije.

Sljedeće se pitanje nametnulo samo od sebe: može li se sama topologija iskoristiti za izvođenje računanja? Odgovor je proizašao iz pionirskoga rada Alekseja Kitajeva i razvoja topološkoga kvantnog računalstva.

5. KITAJEVLJEVA VIZIJA: TOPOLOGIJA KAO ZAŠTITA KVANTNE INFORMACIJE

Ideje Alekseja Kitajeva (slika 4) o topološkom kvantnom računalstvu i toričkom kodu iz temelja su promijenile područje kvantne informacije.

Aleksej Kitajev pokazao je da se topologija može iskoristiti za zaštitu kvantne informacije od dekoherencije, otvarajući novi put prema kvantnom računalstvu otpornom na pogrješke.

5.1. Središnji problem kvantnoga računalstva

Od najranijih prijedloga za kvantno računalstvo fizičari su prepoznali jednu temeljnu preprjeku. Kvantni sustavi iznimno su osjetljivi. Interakcije s okolinom neprestano uništavaju kvantnu koherenciju kroz proces poznat kao dekoherenci-

5 KITAEV'S VISION: TOPOLOGY AS QUANTUM PROTECTION

Alexei Kitaev's (Figure 4) ideas on topological quantum computation and toric code and the toric code fundamentally transformed the field of quantum information.



Slika 4. **Aleksej Kitajev, rusko–američki teorijski fizičar**

Figure 4. ***Alexei Kitaev, Russian–American theoretical physicist***

Alexei Kitaev showed that topology could be used to protect quantum information from decoherence, opening a new path toward fault-tolerant quantum computation.

5.1 The Central Problem of Quantum Computing

From the earliest proposals for quantum computation, physicists recognized a fundamental obstacle. Quantum systems are extraordinarily fragile. Interactions with the environment continuously destroy quantum coherence through a process known as decoherence. Errors accumu-

ja. Pogrješke se brzo gomilaju. Čak i male nesavršenosti mogu narušiti kvantnu informaciju i učiniti računanje beskorisnim.

Izazov je osobito ozbiljan zato što se kvantna informacija ne može jednostavno kopirati i redundantno pohraniti. Teorem o nemogućnosti kloniranja zabranjuje stvaranje istovjetnih kopija proizvoljnoga kvantnoga stanja. Zbog toga se metode koje se koriste za ispravljanje pogrješaka u klasičnim računalima ne mogu izravno primijeniti na kvantne sustave.

Do 1990-ih postalo je jasno da će kvantno računalstvo velikih razmjera zahtijevati posve nove metode zaštite informacija. Upravo je u tom trenutku Aleksej Kitajev predstavio jednu od najutjecajnijih ideja u povijesti kvantne informacijske znanosti.

5.2. Radikalna ideja

Kitajevljev ključni uvid bio je iznenađujuće jednostavan. Umjesto pokušaja zaštite kvantne informacije pomoću lokalnih fizikalnih svojstava, moguće ju je kodirati u globalnim topološkim strukturama. Lokalni poremećaji mogu lako promijeniti lokalne stupnjeve slobode. Međutim, promijeniti topologiju mnogo je teže. Topologija posjeduje prirođenu robusnost.

Ako bi se informacija mogla pohraniti na topološki način, mogla bi postati prirodno otporna na šum i dekoherenciju. Ta je ideja dovela do razvoja toričkoga koda, predstavljenoga godine 1997. Torički kod postao je prvi potpuno razvijeni model topološkoga kvantnog računalstva.

late rapidly. Even small imperfections can corrupt quantum information and render a computation useless.

The challenge is particularly severe because quantum information cannot simply be copied and stored redundantly. The no-cloning theorem prohibits the creation of identical copies of an arbitrary quantum state. As a result, the methods used in classical error correction cannot be applied directly to quantum systems.

By the 1990s, it had become clear that large-scale quantum computation would require fundamentally new methods of protecting information. It was at this point that Alexei Kitaev introduced one of the most influential ideas in the history of quantum information science.

5.2 A Radical Idea

Kitaev's key insight was remarkably simple. Instead of attempting to protect quantum information through local physical properties, one could encode it in global topological structures. Local perturbations can easily alter local degrees of freedom. Changing topology, however, is much more difficult. Topology possesses an inherent robustness.

If information could be stored topologically, it might become naturally resistant to noise and decoherence. This idea led to the development of the toric code, introduced in 1997. The toric code became the first fully developed model of topological quantum computation.

5.3 The Toric Code

The toric code is defined on a two-dimensional lattice whose edges carry quantum two-level systems (qubits).

The Hamiltonian takes the form

5.3. Torički kod

Torički kod definiran je na dvodimenzionalnoj rešetki čiji bridovi nose kvantne dvorazinske sustave (kubite).

Hamiltonijan ima oblik

$$H = -\sum_s A_s - \sum_p B_p, \quad (5.1)$$

gdje je

$$A_s = \prod_{i \in s} \sigma_i^x, \quad (5.2)$$

i

$$B_p = \prod_{i \in p} \sigma_i^z. \quad (5.3)$$

Ovdje

– A_s djeluje na bridove koji okružuju vrh s,

– B_p djeluje na bridove koji okružuju plohu (plaquette) p,

– σ_i^x i σ_i^z Paulijevi su operatori.

Ključno svojstvo jest

$$[A_s, B_p] = 0. \quad (5.4)$$

Svi stabilizatorski operatori međusobno komutiraju. Posljedično, osnovno stanje može se odabrati kao istodobno svojstveno stanje svih stabilizatora.

5.4. Topološka degeneracija osnovnoga stanja

Najizvanrednija značajka toričkoga koda jest da degeneracija njegova osnovnog stanja ovisi o topologiji. Na torusu sustav posjeduje četiri degenerirana osnovna sta-

$$H = -\sum_s A_s - \sum_p B_p, \quad (5.1)$$

where

$$A_s = \prod_{i \in s} \sigma_i^x, \quad (5.2)$$

and

$$B_p = \prod_{i \in p} \sigma_i^z. \quad (5.3)$$

Here

– A_s acts on the edges surrounding a vertex s,

– B_p acts on the edges surrounding a plaquette p,

– σ_i^x and σ_i^z are Pauli operators.

A crucial property is

$$[A_s, B_p] = 0. \quad (5.4)$$

All stabilizer operators commute. Consequently, the ground state can be chosen as a simultaneous eigenstate of all stabilizers.

5.4 Topological Ground-State Degeneracy

The most remarkable feature of the toric code is that its ground-state degeneracy depends on topology. On a torus, the system possesses four degenerate ground states. These states cannot be distinguished by any local measurement. Instead, they differ through global topological properties. Quantum information can therefore be encoded in the degenerate ground-state manifold. The information is stored nonlocally. A local disturbance cannot determine which logical state is present. This nonlocal encoding provides natural protection against many forms of noise.

nja. Ta se stanja ne mogu razlikovati nijednim lokalnim mjerenjem.

Umjesto toga, razlikuju se po svojim globalnim topološkim svojstvima.

Kvantna informacija stoga se može kodirati u degeneriranom mnogostrukom prostoru osnovnih stanja. Informacija je pohranjena nelokalno. Lokalni poremećaj ne može odrediti koje je logičko stanje prisutno. Takvo nelokalno kodiranje pruža prirodnu zaštitu od mnogih oblika šuma.

5.5. Emergentni anyoni

Pobuđena stanja toričkoga koda ponašaju se kao anyonske kvazičestice.

Pojavljuju se dvije temeljne vrste:

– *e*-anyoni (električna pobuđenja),

– *m*-anyoni (magnetska pobuđenja).

Ta pobuđenja nisu elementarne čestice. Ona kolektivno nastaju iz temeljne rešetkaste strukture sustava. Kada se *e*-anyon kreće oko *m*-anyona, valna funkcija poprima netrivijalnu fazu. Stoga, iako su mikroskopski sastojci obični kubiti, emergentna se pobuđenja pokoravaju anyonskoj statistici. Torički kod tako pruža konkretnu realizaciju ideja koje su se prethodno pojavile u istraživanjima anyona i Chern–Simonsove teorije.

5.6. Logički operatori

Logički kubiti toričkoga koda predstavljeni su nekontraktibilnim petljama koje okružuju torus.

Odgovarajući logički operatori obično se označuju kao

$$\overline{X}, \qquad \overline{Z}. \quad (5.5)$$

5.5 Emergent Anyons

Excitations of the toric code behave as anyonic quasiparticles.

Two fundamental types appear:

– *e*-anyons (electric excitations),

– *m*-anyons (magnetic excitations).

These excitations are not elementary particles. They emerge collectively from the underlying lattice. When an *e*-anyon moves around an *m*-anyon, the wave function acquires a nontrivial phase. Thus, even though the microscopic constituents are ordinary qubits, the emergent excitations obey anyonic statistics. The toric code therefore provides a concrete realization of the ideas that had previously appeared in studies of anyons and Chern–Simons theory.

5.6 Logical Operators

The logical qubits of the toric code are represented by non-contractible loops around the torus.

The corresponding logical operators are usually denoted

$$\overline{X}, \qquad \overline{Z}. \quad (5.5)$$

They satisfy

$$\overline{X}\,\overline{Z} = -\overline{Z}\,\overline{X}, \quad (5.6)$$

exactly like ordinary Pauli operators.

The crucial difference is that these operators are global. They extend around the entire system. A local perturbation cannot easily change their value. This is the essence of topological protection.

Oni zadovoljavaju

$$\overline{X}\,\overline{Z} = -\overline{Z}\,\overline{X}, \quad (5.6)$$

točno poput običnih Paulijevih operatora.

Ključna je razlika u tome što su ti operatori globalni. Protežu se oko cijelog sustava. Lokalni poremećaj ne može lako promijeniti njihovu vrijednost. U tome se sastoji bit topološke zaštite.

5.7. Pogrješke postaju anyoni

Jedan od Kitajevljevih najdubljih uvida bio je da se pogrješke mogu tumačiti kao anyonska pobuđenja. Lokalna pogrješka stvara parove anyona. Sve dok anyoni ostaju lokalizirani, kodirana informacija nije uništena. Tek kada se pogrješke nagomilaju u tolikoj mjeri da oblikuju topološki netrivijalne putanje, logička informacija može biti narušena.

Ta geometrijska slika pretvara ispravljanje pogrješaka u problem praćenja putanja anyona. Jezik kvantnoga računalstva tako postaje jezik topologije.

5.8. Od toričkoga do površinskoga koda

Iako je torički kod konceptualno vrlo elegantan, njegovu toroidalnu geometriju teško je ostvariti u eksperimentu. Zbog toga su istraživači razvili srodne arhitekture definirane na ravninskim površinama. Najuspješniji među njima jest površinski (*surface*) kod. Površinski kod zadržava temeljne ideje toričkoga koda:

– stabilizatorska mjerenja,
– anyonska pobuđenja,
– topološku zaštitu,

5.7 Errors Become Anyons

One of Kitaev's most profound insights was that errors can be interpreted as anyonic excitations. A local error creates pairs of anyons. As long as the anyons remain localized, the encoded information is not destroyed. Only when errors accumulate sufficiently to form topologically nontrivial paths can logical information be corrupted.

This geometric picture transforms error correction into a problem of tracking anyon trajectories.The language of quantum computation becomes the language of topology.

5.8 From Toric Code to Surface Code

Although the toric code is conceptually elegant, its toroidal geometry is difficult to realize experimentally. Researchers therefore developed related architectures defined on planar surfaces. The most successful of these is the surface code. The surface code preserves the essential ideas of the toric code:

– stabilizer measurements,
– anyonic excitations,
– topological protection,
– nonlocal logical encoding.

At the same time, it can be implemented using realistic physical hardware. This development would later prove crucial for experimental quantum computing.

5.9 The Error Threshold

A central result of surface-code theory is the existence of an error threshold. Below a critical physical error rate p_{th}, logical errors decrease ex-

– nelokalno logičko kodiranje.

Istodobno se može implementirati uporabom stvarnoga fizičkoga hardvera. Taj će se razvoj kasnije pokazati presudnim za eksperimentalno kvantno računalstvo.

5.9. Prag pogrješke

Središnji rezultat teorije površinskoga koda jest postojanje praga pogrješke. Ispod kritične fizičke stope pogrješke p_{th}, logičke pogrješke eksponencijalno se smanjuju s povećanjem kodne udaljenosti.

Simbolički,

$$P_L \sim e^{-\alpha d}, \quad (5.7)$$

gdje

– P_L je vjerojatnost logičke pogrješke,
– d je kodna udaljenost,
– $\alpha > 0$ ovisi o fizičkoj stopi pogrješke.

Taj rezultat pružio je prvi realističan put prema kvantnom računalstvu otpornom na pogrješke. U načelu, proizvoljno pouzdano računanje postaje moguće povećavanjem veličine koda.

5.10. Susret topologije i tehnologije

Kitajevljev je rad iz temelja promijenio cijelo područje. Prije toričkoga koda topologija se prvenstveno smatrala matematičkim okvirom za razumijevanje egzotičnih kvantnih sustava. Nakon toričkoga koda topologija je postala praktičan alat za zaštitu informacija. Posljedice su bile goleme. Kvantna informacija, topologija i računalstvo postali su duboko međusobno povezani.

ponentially with increasing code distance exponentially with increasing code distance.

Symbolically,

$$P_L \sim e^{-\alpha d}, \quad (5.7)$$

where

– P_L is the logical error probability,
– d is the code distance,
– $\alpha > 0$ depends on the physical error rate.

This result provided the first realistic route toward fault-tolerant quantum computation. In principle, arbitrarily reliable computation becomes possible by increasing the size of the code.

5.10 Topology Meets Technology

Kitaev's work fundamentally changed the field. Before the toric code, topology had been regarded primarily as a mathematical framework for understanding exotic quantum systems. After the toric code, topology became a practical tool for protecting information Technology. Quantum information, topology, and computation became deeply intertwined.

Concepts originating in studies of anyons and topological field theory suddenly acquired direct technological relevance. The next challenge was experimental. Could these ideas be implemented in real quantum devices? The answer emerged through the development of superconducting quantum circuits and the pioneering work of John Martinis and his collaborators. The path from abstract topology to physical hardware had begun.

Pojmovi koji su nastali u proučavanju anyona i topološke teorije polja odjednom su dobili izravnu tehnološku važnost. Sljedeći izazov bio je eksperimentalan. Mogu li se te ideje ostvariti u stvarnim kvantnim uređajima? Odgovor je proizašao iz razvoja supravodljivih kvantnih sklopova i pionirskog rada Johna Martinisa i njegovih suradnika. Započeo je put od apstraktne topologije do stvarnoga fizičkoga hardvera.

6. MARTINIS I EKSPERIMENTALNA REALIZACIJA KVANTNOG RAČUNALSTVA

6.1. Od teorije do hardvera

Koliko god neka teorija bila elegantna, ona se na kraju mora suočiti s eksperimentom.

Koncepti kvantne informacije, kvantne spregnutosti, kvantnog ispravljanja pogrješaka i topološke zaštite predstavljali su duboka intelektualna dostignuća. Ipak, tijekom mnogih godina ostali su uglavnom teorijske prirode.

Središnji izazov bio je tehnološki. Kvantni sustavi iznimno su osjetljivi na svoju okolinu. Da bi izgradili uporabljivo kvantno računalo, istraživači su morali postići preciznu kontrolu nad kvantnim stanjima, istodobno potiskujući šum i dekoherenciju. To se pokazalo jednim od najtežih eksperimentalnih izazova u modernoj znanosti.

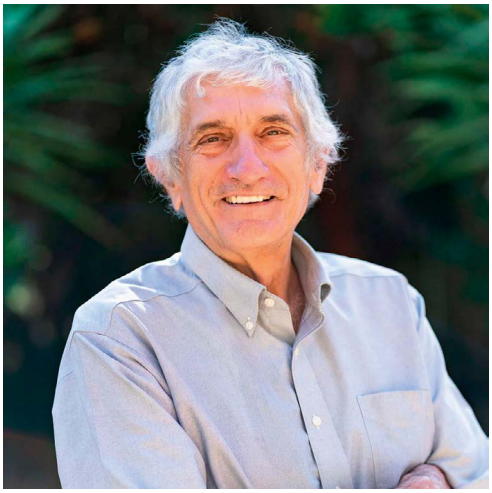
Među istraživačima koji su odigrali odlučujuću ulogu u suočavanju s tim izazovom bio je John M. Martinis (slika 5).

6 MARTINIS AND THE EXPERIMENTAL REALIZATION OF QUANTUM COMPUTING

6.1 From Theory to Hardware

A theory, no matter how elegant, ultimately must confront experiment.

The concepts of quantum information, entanglement, quantum error correction, and topological protection represented profound intellectual achievements. Yet for many years they remained largely theoretical.



Slika 5. **John Matthew Martinis, sudobitnik Nobelove nagrade za fiziku 2025.**

Figure 5. ***John Matthew Martinis, co-winner of the 2025 Nobel Prize in Physics***

The central challenge was technological. Quantum systems are extraordinarily sensitive to their environment. To build a useful quantum computer, researchers needed to achieve precise control over quantum states while simultaneously suppressing noise and decoherence. This proved to be one of the most difficult experimental challenges in modern science.

Tijekom nekoliko desetljeća Martinis i njegovi suradnici razvili su supravodljive kvantne sklopove koji su na kraju postali jedna od vodećih platformi za kvantno računalstvo.

6.2. Makroskopsko kvantno tuneliranje

Martinisovo znanstveno putovanje započelo je mnogo prije suvremenog doba kvantnog računalstva. Jedan od njegovih ranih istraživačkih interesa odnosio se na makroskopsko kvantno tuneliranje (MQT) u Josephsonovim spojevima.

Ta je ideja bila izvanredna. Kvantna mehanika tradicionalno se povezivala s mikroskopskim česticama poput elektrona i atoma. Josephsonovi sklopovi omogućili su promatranje kvantnih pojava u makroskopskim električnim sustavima. Josephsonov spoj sastoji se od dvaju supravodiča razdvojenih tankom izolacijskom barijerom. Cooperovi parovi mogu tunelirati kroz tu barijeru, stvarajući kvantne učinke na makroskopskoj skali.

Dinamika spoja može se opisati potencijalom u obliku valovite ploče za pranje (washboard potential). Kvantno tuneliranje omogućuje sustavu da napusti metastabilna stanja čak i onda kada bi klasični izlazak bio nemoguć. Ti su eksperimenti pružili neke od najranijih demonstracija da kvantna mehanika ostaje valjana daleko izvan mikroskopskog svijeta.

6.3. Umjetni atomi

Velik konceptualni proboj dogodio se kada su supravodljivi sklopovi počeli biti promatrani kao umjetni atomi. Za razliku od prirodnih atoma, ti se sustavi mogu

Among the researchers who played a decisive role in addressing this challenge was J. M. Martinis (Figure 5).

Over several decades, Martinis and his collaborators developed superconducting quantum circuits that eventually became one of the leading platforms for quantum computation.

6.2 Macroscopic Quantum Tunneling

Martinis's scientific journey began long before the modern era of quantum computing. One of his early research interests concerned macroscopic quantum tunneling (MQT) in Josephson junctions.

The idea was remarkable. Quantum mechanics had traditionally been associated with microscopic particles such as electrons and atoms. Josephson circuits made it possible to observe quantum phenomena in macroscopic electrical systems. A Josephson junction consists of two superconductors separated by a thin insulating barrier. Cooper pairs can tunnel through the barrier, producing quantum effects on a macroscopic scale.

The dynamics of the junction may be described by a washboard potential. Quantum tunneling allows the system to escape from metastable states even when classical escape would be impossible. These experiments provided some of the earliest demonstrations that quantum mechanics remains valid far beyond the microscopic world.

6.3 Artificial Atoms

A major conceptual breakthrough occurred when superconducting circuits began to be viewed as artificial atoms. Unlike natural atoms, these systems can be designed and engi- neered. Their energy levels may be controlled through circuit parameters.

projektirati i konstruirati. Njihove energetske razine mogu se kontrolirati pomoću parametara električnog sklopa.

Dobiveni se uređaji ponašaju kao kvantni dvorazinski sustavi:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle. \quad (6.1)$$

Takvi sustavi prirodno služe kao kvantni bitovi, odnosno kubiti. Mogućnost izrade velikog broja gotovo istovjetnih kubita otvorila je mogućnost izgradnje skalabilnog kvantnog hardvera. Ono što je nekoć bilo isključivo teorijski koncept počelo je dobivati fizički oblik.

6.4. Supravodljivi kubit

Razvijeno je nekoliko obitelji supravodljivih kubita:

– nabojni kubiti,
– tokovni (*flux*) kubiti,
– fazni kubiti,
– transmonski kubiti.

Martinis je odigrao važnu ulogu u razvoju faznih kubita, a kasnije i u prijelazu prema robusnijim arhitekturama. Središnji cilj bio je povećati vremena koherencije uz istodobno održavanje visoke vjernosti kvantnih operacija (*gate fidelity*).

Napredak je zahtijevao poboljšanja u:

– materijalima,
– metodama izrade,
– mikrovalnom upravljanju,
– projektiranju električnih sklopova.

Dugi niz godina taj je napredak izgledao postupan. Gledano unatrag, upravo je on postavio temelje za kvantne procesore koji će uslijediti.

The resulting devices behave as quantum two-level systems:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle. \quad (6.1)$$

Such systems naturally serve as quantum bits, or qubits. The ability to fabricate large numbers of nearly identical qubits opened the possibility of scalable quantum hardware. What had once been a purely theoretical concept began to acquire physical form.

6.4 The Superconducting Qubit

Several families of superconducting qubits were developed:

– charge qubits,
– flux qubits,
– phase qubits,
– transmon qubits.

Martinis played an important role in the development of phase qubits and later in the transition toward more robust architectures. A central objective was to increase coherence times while maintaining high gate fidelity.

Progress required improvements in:

– materials,
– fabrication methods,
– microwave control,
– circuit design.

For many years these advances appeared incremental. In retrospect, they laid the foundation for the quantum processors that would follow.

6.5 The Importance of Error Correction

As the number of qubits increased, it became clear that scalability required quantum error correction.

6.5. Važnost ispravljanja pogrješaka

Kako se broj kubita povećavao, postalo je jasno da skalabilnost zahtijeva kvantno ispravljanje pogrješaka.

Pojedinačni kubiti neizbježno pate od:
– relaksacije,
– dekoherencije faze (*dephasing*),
– pogrješaka upravljanja,
– pogrješaka mjerenja.

Bez ispravljanja pogrješaka velika kvantna računanja postaju nemoguća. Ta je spoznaja dovela eksperimentalnu fiziku u izravan dodir s Kitajevljevim teorijskim idejama. Površinski kod pokazao se kao jedan od najperspektivnijih pristupa. Njegov relativno visok prag pogrješke i lokalna arhitektura učinili su ga osobito privlačnim za supravodljivi hardver.

Martinis je postao jedan od najsnažnijih zagovornika pristupa temeljenog na površinskom kodu.

6.6. Površinski kodovi u praksi

Praktična implementacija površinskih kodova zahtijeva ponavljana stabilizatorska mjerenja. Polja fizičkih kubita raspoređena su u dvodimenzionalnu rešetku. Pomoćni (ancilarni) kubiti provode sindromska mjerenja koja identificiraju pogrješke bez uništavanja kodirane kvantne informacije. Dobivena arhitektura usko odražava konceptualni okvir koji je uveo Kitajev. Informacija je pohranjena nelokalno. Pogrješke se pojavljuju kao efektivna anyonska pobuđenja.

Ispravljanje odgovara prepoznavanju i uklanjanju topološki konzistentnih lanaca pogrješaka. Po prvi put pojmovi koji potječu iz topološke kvantne teorije polja postali su inženjerski alati.

Individual qubits inevitably suffer from:
– relaxation,
– dephasing,
– control errors,
– measurement errors.

Without correction, large computations become impossible.

This realization brought experimental physics into direct contact with Kitaev's theoretical ideas. The surface code emerged as one of the most promising approaches. Its relatively high error threshold and local architecture made it particularly attractive for superconducting hardware.

Martinis became one of the strongest advocates of the surface-ode approach.

6.6 Surface Codes in Practice

The practical implementation of surface codes requires repeated stabilizer measurements. Arrays of physical qubits are arranged in a two-dimensional lattice. Ancillary qubits perform syndrome measurements that identify errors without destroying the encoded quantum information. The resulting architecture closely mirrors the conceptual frame- work introduced by Kitaev. Information is stored nonlocally. Errors appear as effective anyonic excitations.

Correction corresponds to identifying and removing topologically consistent error chains. For the first time, concepts originating in topological quantum field theory became engineering tools.

6.7 Quantum Supremacy

A major milestone occurred in 2019. Researchers at Google Quantum AI demonstrat-

6.7. Kvantna nadmoć

Velika prekretnica dogodila se godine 2019. Istraživači iz Google Quantum AI demonstrirali su programabilni supravodljivi kvantni procesor nazvan Sycamore. Procesor je izvršio zadatak uzorkovanja [12] koji bi za klasična superračunala bio iznimno težak. Iako je precizno tumačenje pojma "kvantna nadmoć" (*quantum supremacy*) i dalje predmet rasprava, taj je eksperiment predstavljao povijesno dostignuće. Pokazao je da su kvantni procesori dosegnuli područje koje nadilazi jednostavnu simulaciju na klasičnim računalima. Put od teorijske mogućnosti do eksperimentalne stvarnosti postao je nedvojben.

6.8. Prema kvantnom računalstvu otpornom na pogrješke

Unatoč tim postignućima, krajnji cilj i dalje ostaje kvantno računalstvo otporno na pogrješke. To zahtijeva logičke kubite velikih razmjera zaštićene kvantnim ispravljanjem pogrješaka. Izazov je golem.

Za ostvarenje velikog broja pouzdanih logičkih kubita u konačnici bi mogli biti potrebni milijuni fizičkih kubita. Ipak, napredak ostvaren tijekom posljednja dva desetljeća bio je izvanredan. Vjernost kvantnih operacija neprestano se poboljšava. Vremena koherencije i dalje se produljuju. Eksperimenti s kvantnim ispravljanjem pogrješaka pokazuju sve sofisticiraniju kontrolu nad kvantnom informacijom.

Vizija koju je prvi iznio Kitajev postupno postaje praktična stvarnost.

ed a programmable superconducting quantum processor known as Sycamore. The processor performed a sampling task [12] that would be extraordinarily difficult for classical supercomputers. Although the precise interpretation of "quantum supremacy" remains debated, the experiment represented a landmark achievement. It demonstrated that quantum processors had reached a regime beyond straightforward classical simulation. The path from theoretical possibility to experimental reality had become unmistakable.

6.8 Toward Fault-Tolerant Quantum Computing

Despite these achievements, the ultimate goal remains fault-tolerant quantum computation. This requires large-scale logical qubits protected by quantum error correction. The challenge is formidable.

Millions of physical qubits may ultimately be required to realize large numbers of reliable logical qubits. Yet the progress achieved over the past two decades has been extraordinary. Gate fidelities continue to improve. Coherence times continue to increase. Error-correction experiments continue to demonstrate increasingly sophisticated control of quantum information.

The vision first articulated by Kitaev is gradually becoming a practical reality.

6.9 The Connection to Topology

Interestingly, modern superconducting quantum processors do not themselves rely on non-Abelian anyons. Instead, they use conventional superconducting qubits arranged in topological error-correction architectures. Nevertheless, the conceptual connection remains

6.9. Povezanost s topologijom

Zanimljivo je da se suvremeni supravodljivi kvantni procesori sami po sebi ne oslanjaju na neabelove anyone. Umjesto toga, oni koriste konvencionalne supravodljive kubite raspoređene u topološke arhitekture za ispravljanje pogrješaka. Ipak, konceptualna povezanost ostaje duboka.

Površinski kod nasljeđuje svoje intelektualno podrijetlo od:

– anyona,
– topološkog uređenja,
– Chern–Simonsove teorije,
– Kitajevljeva toričkoga koda.

U tom smislu topologija i dalje ima središnju ulogu čak i kada fizički anyoni nisu prisutni. Informacija je zaštićena pomoću topoloških načela. Jezik geometrije i topologije ostaje ugrađen u samu arhitekturu kvantnog računalstva.

6.10. Novo doba

Rad Martinisa i njegovih suradnika predstavlja prekretnicu u povijesti fizike.

Po prvi put ideje koje potječu iz temelja kvantne mehanike, teorije kvantne informacije, topologije i fizike kondenzirane tvari spojile su se u funkcionalnim kvantnim uređajima. Put od Einsteinovih prigovora kvantnoj mehanici do suvremenih kvantnih procesora proteže se kroz gotovo cijelo stoljeće.

Na tom su putu fizičari otkrili kvantnu spregnutost, Bellove nejednakosti, anyone, topološko uređenje i kvantno ispravljanje pogrješaka. Ono što se nekoć činilo kao niz odvojenih istraživačkih smjerova postupno se pokazalo dijelovima jedinstvene intelektualne cjeline.

profound. The surface code inherits its intellectual ancestry from:

– anyons,
– topological order,
– Chern–Simons theory,
– Kitaev's toric code.

In this sense, topology continues to play a central role even when no physical anyons are present. Information is protected through topological principles. The language of geometry and topology remains embedded within the architecture of quantum computation.

6.10 A New Era

The work of Martinis and his collaborators represents a turning point in the history of physics.

For the first time, ideas originating in the foundations of quantum mechanics, quantum information theory, topology, and condensed-matter physics converged within functioning quantum devices. The journey from Einstein's objections to quantum mechanics to modern quantum processors spans nearly a century.

Along the way, physicists discovered entanglement, Bell inequalities, anyons, topological order, and quantum error correction. What once appeared to be separate research directions gradually revealed themselves as parts of a single intellectual narrative.

The next chapter returns to a more theoretical perspective. Before reaching the final synthesis, we must examine another approach to generalized statistics: the theory of q-deformed algebras and quons, and their connection to the operator description of anyons.

Sljedeće se poglavlje vraća teorijskom gledištu. Prije nego što dođemo do završne sinteze, moramo razmotriti još jedan pristup poopćenoj statistici: teoriju q-deformiranih algebri i kvona te njihovu povezanost s operatorskim opisom anyona.

7. KVONI, Q-DEFORMIRANE ALGEBRE I OPERATORSKI OPIS ANYONA

7.1. Može li se topologija prevesti na jezik operatora?

Otkriće anyona pokazalo je da kvantna statistika može proizaći iz topologije. Chern–Simonsova teorija objasnila je kako vezivanje magnetskog toka uz električni naboj stvara frakcijsku statistiku, dok su neabelovi anyoni pokazali da sama topologija može provoditi kvantno računanje.

Ipak, ostalo je jedno temeljno pitanje.

Mogu li se topološka svojstva anyona u potpunosti preoblikovati u algebarski jezik? Može li se statistika pletenica prikazati pomoću poopćenih operatorskih algebri na način analogan operatorima stvaranja i anihilacije u običnoj kvantnoj teoriji polja? To je pitanje potaknulo važan istraživački smjer tijekom kasnoga dvadesetoga stoljeća i dovelo do razvoja q-deformiranih algebri i kvonske statistike.

Cilj je bio ambiciozan: izgraditi most između topologije i teorije operatora.

7 QUONS, Q-DEFORMED ALGEBRAS, AND THE OPERATOR PICTURE OF ANYONS

7.1 Can Topology Be Translated into the Language of Operators?

The discovery of anyons revealed that quantum statistics can emerge from topology. Chern–Simons theory explained how the attachment of magnetic flux to electric charge generates fractional statistics, while non-Abelian anyons showed that topology itself can perform quantum computation.

Yet a fundamental question remained.

Can the topological properties of anyons be reformulated entirely in algebraic language? Can braid statistics be represented through generalized operator algebras in a manner analogous to the creation and annihilation operators of ordinary quantum field theory? This question motivated an important line of research during the late twentieth century and led to the development of q-deformed algebras and quon statistics.

The goal was ambitious: to build a bridge between topology and operator theory.

7.2 Beyond Bose and Fermi Operators

In conventional quantum mechanics, bosons and fermions are described by simple algebraic relations.

Bosons satisfy

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}, \qquad [a_i, a_j] = [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0, \tag{7.1}$$

while fermions satisfy

7.2. Izvan Boseovih i Fermijevih operatora

U konvencionalnoj kvantnoj mehanici bozoni i fermioni opisuju se jednostavnim algebarskim relacijama.

Bozoni zadovoljavaju

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}, \qquad [a_i, a_j] = [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0, \tag{7.1}$$

dok fermioni zadovoljavaju

$$\{a_i, a_j^\dagger\} = \delta_{ij}, \qquad \{a_i, a_j\} = \{a_i^\dagger, a_j^\dagger\} = 0. \tag{7.2}$$

Te relacije određuju statističko ponašanje čestica. Prirodno se postavlja pitanje:

Može li se neprekidno interpolirati između te dvije mogućnosti? Odgovor je potvrdan.

Rezultirajuća algebra jest kvonska algebra koju je uveo O. W. Greenberg:

$$a_i a_j^\dagger - q\, a_j^\dagger a_i = \delta_{ij}. \tag{7.3}$$

Parametar deformacije q određuje statističko ponašanje.

Za

$$q = 1, \tag{7.4}$$

dobivaju se bozoni.

Za

$$q = -1, \tag{7.5}$$

dobivaju se fermioni.

Međuvrijednosti stvaraju poopćenu statistiku. Algebra tako objedinjuje dva tradicionalna slučaja unutar jedinstvenoga matematičkoga okvira.

$$\{a_i, a_j^\dagger\} = \delta_{ij}, \qquad \{a_i, a_j\} = \{a_i^\dagger, a_j^\dagger\} = 0. \tag{7.2}$$

These relations determine the statistical behavior of the particles. The question naturally arises: Can one continuously interpolate between these two possibilities? The answer is yes.

The resulting algebra is the quon algebra introduced by O. W. Greenberg:

$$a_i a_j^\dagger - q\, a_j^\dagger a_i = \delta_{ij}. \tag{7.3}$$

The deformation parameter q controls the statistical behavior. For

$$q = 1, \tag{7.4}$$

one recovers bosons.

For

$$q = -1, \tag{7.5}$$

one recovers fermions.

Intermediate values generate generalized statistics. The algebra therefore unifies the two traditional cases within a single mathematical framework.

7.3 *q*-Deformation and Quantum Groups

The concept of deformation has deep roots in mathematical physics. Instead of modifying physical systems directly, one modifies the algebraic structures describing them.

A familiar example is the harmonic oscillator.

Ordinary oscillators satisfy

$$[a, a^\dagger] = 1. \tag{7.6}$$

7.3. q-Deformacija i kvantne grupe

Pojam deformacije ima duboke korijene u matematičkoj fizici. Umjesto da se izravno mijenjaju fizikalni sustavi, mijenjaju se algebarske strukture koje ih opisuju.

Poznat primjer jest harmonijski oscilator.

Obični oscilatori zadovoljavaju

$$[a, a^\dagger] = 1. \quad (7.6)$$

q-Deformirani oscilator zamjenjuje tu relaciju općenitijom strukturom.

Rezultirajuća matematika postaje povezana s:

– kvantnim grupama,
– Hopfovim algebrama,
– reprezentacijama grupa pletenica,
– invarijantama čvorova.

Tijekom 1980-ih i 1990-ih godina te su strukture postale središnje u mnogim područjima teorijske fizike. Zanimljivo je da su se one također prirodno pojavile u proučavanju anyona.

7.4. Anyoni i operatorske algebre

Anyoni se obično uvode putem faza zamjene:

$$\psi \longrightarrow e^{i\theta}\psi. \quad (7.7)$$

Takav opis naglašava topologiju. Izazov je preoblikovati istu fiziku uporabom operatora. Uobičajeno polazište jest singularna baždarna transformacija koja povezuje fermione i anyone:

A q-deformed oscillator replaces this relation with a more general structure.

The resulting mathematics becomes connected with:

– quantum groups,
– Hopf algebras,
– braid representations,
– knot invariants.

During the 1980s and 1990s, these structures became central to many areas of theoretical physics. Remarkably, they also appeared naturally in the study of anyons.

7.4 Anyons and Operator Algebras

Anyons are usually introduced through exchange phases:

$$\psi \longrightarrow e^{i\theta}\psi. \quad (7.7)$$

This description emphasizes topology. The challenge is to rewrite the same physics using operators. A common starting point is the singular gauge transformation that relates fermions and anyons:

$$\psi_A(x) = \exp\left[i\alpha \int d^2y\, \Theta(x-y)\rho(y)\right] \psi_F(x). \quad (7.8)$$

Its presence reflects the winding of particles around one another in two-dimensional space. The problem then becomes understanding how this topological information appears in operator algebra.

7.5 The Barked–Dorešić–Meljanac Approach

One of the motivations behind the work *Anyons as Quon Particles* [9] was precisely this issue. The goal was not merely to describe anyons.

$$\psi_A(x) = \exp\left[i\alpha \int d^2y\, \Theta(x-y)\rho(y)\right] \psi_F(x). \tag{7.8}$$

Eksponencijalni faktor sadrži cjelokupnu statističku informaciju. Njegova prisutnost odražava obilaženje čestica jedne oko druge u dvodimenzionalnom prostoru. Problem se zatim svodi na razumijevanje kako se ta topološka informacija pojavljuje u operatorskoj algebri.

7.5. Pristup Bardek–Dorešić–Meljanac

Jedan od motiva rada *Anyons as Quon Particles* [9] bio je upravo taj problem. Cilj nije bio samo opisati anyone. Naprotiv, namjera je bila istražiti može li se anyonska statistika prikazati unutar poopćenoga algebarskoga okvira sličnog quonskoj statistici. Analiza je pokazala da je ključni objekt dvodimenzionalna funkcija polarnog kuta.

$$\Theta(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right). \tag{7.9}$$

Za razliku od običnih funkcija, polarni kut posjeduje grananja (*branch cuts*) i singularnosti koje odražavaju topologiju ravnine. Kada se transformira u prostor impulsa, te singularnosti stvaraju vrlo netrivijalne strukture.

7.6. Fourierova analiza topologije

Fourierova transformacija funkcije polarnoga kuta daje članove koji uključuju poopćene distribucije.

Među najvažnijima su

$$\delta(k_x)P\left(\frac{1}{k_y}\right), \qquad \delta(k_y)P\left(\frac{1}{k_x}\right), \tag{7.10}$$

Rather, it was to investigate whether anyonic statistics could be represented within a generalized algebraic framework similar to quon statistics. The analysis revealed that the crucial object is the two-dimensional polar-angle function

$$\Theta(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right). \tag{7.9}$$

Unlike ordinary functions, the polar angle possesses branch cuts and singularities reflecting the topology of the plane. When transformed into momentum space, these singularities generate highly nontrivial structures.

7.6 Fourier Analysis of Topology

The Fourier transform of the polar-angle function produces terms involving generalized distributions.

Among the most important are

$$\delta(k_x)P\left(\frac{1}{k_y}\right), \qquad \delta(k_y)P\left(\frac{1}{k_x}\right), \tag{7.10}$$

where $P\,(1/k)$ denotes the Cauchy principal value.

These expressions are not merely technical details. They encode topological information in momentum space. The winding structure responsible for anyonic statistics leaves a precise algebraic signature. From this perspective, topology acquires an operator representation. One may say that the braid structure becomes visible inside the algebra itself.

A particularly important relation derived in the analysis is

$$\text{p.v.} \int d^2x\, e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\, \epsilon_{ij}\frac{x_j}{|\mathbf{x}|^2} = 2\pi i\, \epsilon_{ij}\frac{p_j}{|\mathbf{p}|^2}. \tag{7.11}$$

gdje $P\,(1/k)$ označuje Cauchyjevu glavnu vrijednost.

Ti izrazi nisu samo tehnički detalji. Oni kodiraju topološku informaciju u prostoru impulsa. Struktura obilaženja odgovorna za anyonsku statistiku ostavlja precizan algebarski trag. Iz te perspektive topologija dobiva operatorski prikaz. Može se reći da struktura pletenica postaje vidljiva unutar same algebre.

Posebno važna relacija izvedena u analizi jest

$$\text{p.v.} \int d^2x\, e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\, \epsilon_{ij} \frac{x_j}{|\mathbf{x}|^2} = 2\pi i\, \epsilon_{ij} \frac{p_j}{|\mathbf{p}|^2}. \tag{7.11}$$

Ta formula pruža izravnu vezu između topologije funkcije polarnog kuta i njezina prikaza u prostoru impulsa.

7.7. Topologija u prostoru impulsa

Tradicionalno se topologija razmatra s geometrijskoga stajališta. Proučavaju se putanje čestica, pletenice i brojevi obilaženja (*winding numbers*). Operatorski pristup nudi komplementarno gledište. Umjesto izravnoga praćenja putanja, analiziraju se singularne strukture koje se pojavljuju u algebri kvantnih polja. Ista fizikalna informacija kodirana je na drukčiji način.

U geometrijskom jeziku:

– topologija je predstavljena pletenicama.

U operatorskom jeziku:

– topologija se pojavljuje kroz singularne algebarske strukture.

This formula provides a direct connection between the topology of the polar-angle function and its momentum-space representation.

7.7 Topology in Momentum Space

Traditionally, topology is discussed geometrically. One studies particle trajectories, braids, and winding numbers. The operator approach offers a complementary viewpoint. Instead of tracking paths directly, one analyzes the singular structures appearing in the algebra of quantum fields. The same physical information is encoded differently.

In geometric language:

– topology is represented by braids.

In operator language:

– topology appears through singular algebraic structures.

This duality is conceptually important because quantum computation is ultimately formulated in operator language. Quantum gates, Hamiltonians, and measurements are all described algebraically. A successful operator representation of anyonic topology therefore provides a potential bridge between abstract topological theories and practical quantum-information architectures.

7.8 Connections with Modern Topological Quantum Computing

At the time the BDM work appeared in 1994, topological quantum computation had not yet emerged as a major field. Kitaev's toric code was still several years away. The connection between generalized statistics and quantum computation was therefore not obvious. Looking back from today's perspective, the situation appears different.

Modern topological quantum computing relies heavily on:

Ta je dualnost konceptualno važna jer se kvantno računanje u konačnici formulira u operatorskom jeziku. Kvantna vrata, Hamiltonijani i mjerenja opisuju se algebarski. Stoga uspješan operatorski prikaz anyonske topologije pruža potencijalni most između apstraktnih topoloških teorija i praktičnih arhitektura kvantne informacije.

7.8. Povezanost sa suvremenim topološkim kvantnim računalstvom

Kada se rad BDM pojavio, godine 1994., topološko kvantno računalstvo još nije bilo izraslo u veliko istraživačko područje. Kitajevljev torički kod bio je još nekoliko godina udaljen. Stoga veza između poopćene statistike i kvantnoga računalstva nije bila očita. Gledajući iz današnje perspektive, situacija izgleda drukčije.

Suvremeno se topološko kvantno računalstvo uvelike oslanja na:

– strukture pletenica,
– anyonsku statistiku,
– topološku degeneraciju,
–nelokalnu kvantnu informaciju.

Ti su pojmovi duboko povezani s matematičkim strukturama koje se proučavaju u *q*-deformiranim algebrama i poopćenoj statistici. Premda se povijesni razvoj odvijao kroz više međusobno neovisnih putova, temeljne ideje pokazuju iznimnu konvergenciju. Oba pristupa nastoje razumjeti kako se informacija može kodirati u strukturama koje su robusnije od običnih lokalnih kvantnih stanja.

7.9. Algebra i topologija

Jedna od tema koje se neprestano provlače kroz modernu fiziku jest me-

– braid structures,
– anyonic statistics,
– topological degeneracy,
– nonlocal quantum information.

These concepts are deeply related to the mathematical structures explored in *q*-deformed algebras and generalized statistics. Although the historical development followed multiple independent routes, the underlying themes show remarkable convergence. Both approaches seek to understand how information can be encoded in structures more robust than ordinary local quantum states.

7.9 Algebra and Topology

One of the recurring themes throughout modern physics is the interplay between algebra and geometry. General relativity describes gravity geometrically. Gauge theories describe interactions algebraically. Topological quantum computation combines both viewpoints. Anyons illustrate this duality perfectly.

Their behavior can be described:

– geometrically through braids,
– topologically through Chern–Simons theory,
– algebraically through deformed operator structures.

These are not competing descriptions. They are different windows onto the same underlying reality.The geometric viewpoint emphasizes particle trajectories and winding. The topological viewpoint emphasizes global invariants and equivalence classes of paths. The algebraic viewpoint emphasizes operators, commutation relations, and representations. Each language captures a different aspect of the same physical

đudjelovanje algebre i geometrije. Opća teorija relativnosti opisuje gravitaciju geometrijski. Baždarne teorije opisuju međudjelovanja algebarski. Topološko kvantno računalstvo objedinjuje oba gledišta. Anyoni savršeno ilustriraju tu dualnost.

Njihovo se ponašanje može opisati:

– geometrijski, putem pletenica,

– topološki, pomoću Chern–Simonsove teorije,

– algebarski, pomoću deformiranih operatorskih struktura.

To nisu konkurentski opisi. Oni predstavljaju različite poglede na istu temeljnu stvarnost. Geometrijsko gledište naglašava putanje čestica i obilaženja. Topološko gledište naglašava globalne invarijante i klase ekvivalencije putanja. Algebarsko gledište naglašava operatore, komutacijske relacije i reprezentacije. Svaki od tih jezika opisuje drukčiji aspekt istoga fizikalnog fenomena. Povijesno gledano, takvi dualni opisi često su bili znak postojanja dublje ujedinjujuće strukture.

Klasična mehanika može se formulirati geometrijski pomoću faznoga prostora ili algebarski pomoću Poissonovih zagrada. Kvantna mehanika može se formulirati pomoću valnih funkcija ili pomoću operatorskih algebri. Na sličan način, anyonski sustavi dopuštaju komplementarne topološke i algebarske formulacije.

Važnost toga opažanja daleko nadilazi matematičku eleganciju. Teorija kvantne informacije u svojoj je biti formulirana algebarski. Kvantna stanja pripadaju Hilbertovim prostorima. Kvantna vrata predstavljena su operatorima. Mjerenja odgovaraju opservablama. Stoga svaki

phenomenon. Historically, such dual descriptions have often signaled the presence of a deeper unifying structure.

Classical mechanics can be formulated geometrically through phase space or algebraically through Poisson brackets. Quantum mechanics may be formulated through wave functions or through operator algebras. Similarly, anyonic systems admit complementary topological and algebraic formulations.

The importance of this observation extends far beyond mathematical elegance. Quantum information theory is fundamentally formulated in algebraic language. Quantum states belong to Hilbert spaces. Quantum gates are represented by operators. Measurements correspond to observables. Consequently, any successful attempt to describe topological phenomena algebraically may facilitate their implementation within quantum-information architectures. This perspective helps explain the enduring interest in generalized statistics, q-deformations, and operator approaches to anyons.

Although topology and operator algebra initially appear very different, both seek to describe how quantum information is organized and transformed. From this viewpoint, the work on quons and generalized operator algebras may be regarded as part of a broader effort to understand the mathematical foundations of topological quantum phenomena.

7.10 Toward the Final Synthesis

By the beginning of the twenty-first century, several seemingly independent developments had converged:

– Einstein's challenge to quantum mechanics,

– Bell's theorem and entanglement,

– Wilczek's discovery of anyons,

uspješan pokušaj algebarskog opisa topoloških pojava može olakšati njihovu primjenu u arhitekturama kvantne informacije. To gledište pomaže objasniti trajni interes za poopćenu statistiku, q-deformacije i operatorske pristupe anyonima.

Iako se topologija i operatorska algebra na prvi pogled čine vrlo različitima, obje nastoje opisati kako se kvantna informacija organizira i transformira. Iz te perspektive, radovi o quonima i poopćenim operatorskim algebrama mogu se promatrati kao dio šireg nastojanja da se razumiju matematički temelji topoloških kvantnih pojava.

7.10. Prema završnoj sintezi

Početkom dvadeset i prvog stoljeća nekoliko naizgled neovisnih razvoja spojilo se u jedinstvenu cjelinu:

– Einsteinov izazov kvantnoj mehanici,
– Bellov teorem i kvantna spregnutost,
– Wilczekovo otkriće anyona,
– Chern–Simonsova topologija,
– q-deformirane algebre,
– Kitajevljevi topološki kodovi,
– Martinisovi supravodljivi procesori.

Ono što se u početku činilo kao skup odvojenih istraživačkih smjerova postupno je postalo dijelovima jedinstvene priče. Zajednička nit koja ih sve povezuje jest informacija.

Kvantna informacija više se ne promatra samo kao računalni resurs. Ona je postala temeljni pojam koji povezuje kvantnu mehaniku, topologiju i samu strukturu fizikalne stvarnosti. Kvantna spregnutost pokazala je da se informacija može raspodijeliti nelokalno.

– Chern–Simons topology,
– q-deformed algebras,
– Kitaev's topological codes,
– Martinis's superconducting processors.

What initially appeared as separate research directions gradually became parts of a single story. The common thread running through all of them is information.

Quantum information is no longer viewed merely as a computational resourced that information can be distributed non-locally.

Anyons demonstrated that information can be encoded topologically. Quantum error correction showed that information can be protected geometrically. Topological quantum computation suggested that information can be processed through braiding operations. Increasingly, modern physics points toward a picture in which information occupies a role comparable to matter, energy, space, and time. The final step in our story is to examine how these ideas connect with recent developments involving Majorana modes, braided quantum systems, and modern approaches to topological quantum computation.

Particularly interesting in this context is the work of Francesco Toppan and collaborators, whose studies of braided Majorana qubits, parastatistics, and generalized quantum structures provide a modern perspective on questions that originally motivated investigations of anyons and quons [13-18].

The next chapter explores these connections and examines how ideas originating in generalized statistics evolved into concepts that now lie at the frontier of topological quantum information science.

Anyoni su pokazali da se informacija može kodirati topološki. Kvantno ispravljanje pogrješaka pokazalo je da se informacija može zaštititi geometrijski. Topološko kvantno računalstvo sugeriralo je da se informacija može obrađivati pomoću operacija pletenja. Sve više se čini da moderna fizika upućuje na sliku u kojoj informacija zauzima ulogu usporedivu s materijom, energijom, prostorom i vremenom. Posljednji korak naše priče jest ispitati kako se te ideje povezuju s novijim razvojem koji uključuje Majoranine modove, isprepletene (*braided*) kvantne sustave i suvremene pristupe topološkom kvantnom računalstvu.

U tom je kontekstu osobito zanimljiv rad Francesca Toppana i njegovih suradnika, čija istraživanja isprepletenih Majoraninih kubita, parastatistike i poopćenih kvantnih struktura pružaju suvremenu perspektivu na pitanja koja su izvorno potaknula istraživanja anyona i kvona [13-18].

Sljedeće poglavlje istražuje te poveznice i razmatra kako su se ideje proizašle iz poopćene statistike razvile u koncepte koji se danas nalaze na samoj granici topološke kvantne informacijske znanosti.

8. OD BDM ANYONA DO TOPPANOVIH ISPREPLETENIH MAJORANINIH KUBITA

Nedavni radovi Francesca Toppana (slika 6) istaknuli su nove poveznice između isprepletenih Majoraninih sustava, parastatistike, poopćenih kvantnih struktura i topološkoga kvantnoga računalstva, pružajući suvremeni kontekst za nekoli-

8 FROM BDM ANYONS TO TOPPAN'S BRAIDED MAJORANA QUBITS

Recent work by Francesco Toppan (Figure 6) has highlighted new connections between braided Majorana systems, parastatistics, generalized quantum structures and topological quantum computation, providing a modern context for several ideas explored earlier in generalized statistics and quon theory.



Slika 6. **Profesor Francesco Toppan**
Figure 6. ***Professor Francesco Toppan***

8.1 Generalized Statistics, Operator Algebras, and the Road Toward Topological Quantum Computation

One of the most interesting ways to strengthen the conceptual bridge between the 1994 paper *Anyons as Quon Particles* by Bardek, Dorešić, and Meljanac and contemporary research on topological quantum computation is to compare the BDM approach with recent work on braided Majorana qubits [13,15,18].

ko ideja koje su ranije istraživane u okviru poopćene statistike i teorije kvona.

8.1. Poopćena statistika, operatorske algebre i put prema topološkom kvantnom računalstvu

Jedan od najzanimljivijih načina za jačanje konceptualnog mosta između rada iz 1994. *Anyons as Quon Particles*, autora Bardeka, Dorešića i Meljanca, i suvremenih istraživanja topološkoga kvantnoga računalstva jest usporedba pristupa BDM-a s novijim radovima o ispreplетenim Majoraninim kubitima (*braided Majorana qubits*) [13,15,18].

Na prvi pogled, ta se dva istraživačka smjera mogu činiti prilično udaljenima. Rad BDM-a bavio se anyonima, kvonima i poopćenim operatorskim algebrama, dok suvremeni modeli Majoraninih kubita pripadaju fizici topološke supravodljivosti, grupa pletenica i topološki zaštićene kvantne informacije.

Ipak, oba su pravca motivirana istim dubljim pitanjem: *Koliko se daleko kvantna statistika može poopćiti izvan uobičajene Bose–Fermijeve dihotomije?*

Rad BDM polazio je od opažanja da se anyonska statistika u dvjema dimenzijama može povezati s poopćenom operatorskom strukturom.

U formalizmu kvona piše se

$$a_i a_j^\dagger - q\, a_j^\dagger a_i = \delta_{ij}, \quad (8.1)$$

tako da parametar q interpolira između bozonske i fermionske granice.

To već sugerira da statistiku ne treba promatrati samo kao fiksnu oznaku pridruženu elementarnim česticama, nego

At first sight, these two directions may appear rather distant. The BDM paper was concerned with anyons, quons, and generalized operator algebras, while modern Majorana-qubit models belong to the physics of topological superconductivity, braid groups, and protected quantum information.

Yet both lines of thought are motivated by the same deeper question: *How far can quantum statistics be generalized beyond the ordinary Bose–Fermi dichotomy?*

The BDM work started from the observation that anyonic statistics in two dimensions can be related to a generalized operator structure.

In the quon formalism one writes

$$a_i a_j^\dagger - q\, a_j^\dagger a_i = \delta_{ij}, \quad (8.1)$$

so that the parameter q interpolates between the bosonic and fermionic limits.

This already suggests that statistics need not be treated merely as a fixed label attached to elementary particles, but may be encoded in a deeper algebraic structure.

8.2 Topology Inside Operator Algebra

In the anyonic case, the crucial topological information is carried by the polar-angle function.

A typical anyon field may be written schematically as

$$\Psi_A(x) = \Psi_F(x) \exp\left[i\alpha \int d^2y\, \Theta(x-y)\rho(y)\right], \quad (8.2)$$

where $\Theta(x–y)$ records the winding of one particle around another.

da ona može biti kodirana u dubljoj algebarskoj strukturi.

8.2. Topologija unutar operatorske algebre

U anyonskom slučaju ključnu topološku informaciju nosi funkcija polarnog kuta.

Tipično anyonsko polje može se shematski zapisati kao

$$\Psi_A(x) = \Psi_F(x) \exp\left[i\alpha \int d^2y\, \Theta(x-y)\rho(y)\right], \tag{8.2}$$

gdje $\Theta(x-y)$ bilježi obilaženje jedne čestice oko druge.

U BDM analizi Fourierova transformacija te kutne funkcije vodi do singularnih distribucija u prostoru impulsa, kao što su

$$\delta(k_x)\, P\left(\frac{1}{k_y}\right), \qquad \delta(k_y)\, P\left(\frac{1}{k_x}\right), \tag{8.3}$$

koje se mogu tumačiti kao operatorsko-algebarski trag topološke strukture anyonske zamjene. Taj je rezultat osobito značajan jer pokazuje da topologija može ostaviti izravan algebarski otisak. Obilaženje putanja čestica odražava se u singularnoj strukturi operatorskih relacija u prostoru impulsa. Iz te perspektive topologija postaje vidljiva unutar operatorske algebre.

8.3. Od abelovskih faza do isprepletenih operatora

Prijelaz od abelovskih anyona prema suvremenom topološkom kvantnom računalstvu može se razumjeti kao prijelaz od skalarnih faza prema matrično vrijednosnim operatorima pletenja.

In the BDM analysis, the Fourier transform of this angular function leads to singular momentum-space distributions such as

$$\delta(k_x)\, P\left(\frac{1}{k_y}\right), \qquad \delta(k_y)\, P\left(\frac{1}{k_x}\right), \tag{8.3}$$

which may be interpreted as an operator-algebraic trace of the topological structure of anyonic exchange. This result is particularly significant because it shows that topology can leave a direct algebraic imprint. The winding of particle trajectories is reflected in the singular structure of operator relations in momentum space. From this perspective, topology becomes visible inside operator algebra.

8.3 From Abelian Phases to Braided Operators

The transition from Abelian anyons to modern topological quantum computation can be understood as a progression from scalar phases to matrix-valued braid operators.

For Abelian anyons, exchange produces a phase factor:

$$\psi \longrightarrow e^{i\theta}\psi. \tag{8.4}$$

The entire effect of the exchange is contained in a single number. For non-Abelian systems, the situation changes dramatically. The exchange operation becomes a matrix acting on a degenerate Hilbert space:

$$|\Psi\rangle \longrightarrow U_i|\Psi\rangle. \tag{8.5}$$

The statistical phase is replaced by a braid operator.

Symbolically, one may write

Kod abelovskih anyona zamjena proizvodi fazni faktor:

$$\psi \longrightarrow e^{i\theta}\psi. \quad (8.4)$$

Cjelokupni učinak zamjene sadržan je u jednom jedinom broju. Kod neabelovskih sustava situacija se dramatično mijenja. Operacija zamjene postaje matrica koja djeluje na degenerirani Hilbertov prostor:

$$|\Psi\rangle \longrightarrow U_i|\Psi\rangle. \quad (8.5)$$

Statistička faza zamijenjena je operatorom pletenja.

Simbolički se može zapisati

$$e^{i\theta} \quad \longrightarrow \quad U_i. \quad (8.6)$$

Taj jednostavan izraz obuhvaća jedan od najvažnijih konceptualnih prijelaza u modernoj teorijskoj fizici. Statistika postaje računanje. Pletenje (*braiding*) postaje obrada informacije.

8.4. Isprepleteni Majoranini kubiti

Ta ideja postaje osobito sugestivna kada se usporedi s novijim radovima F. Toppana i njegovih suradnika o isprepletenim Majoraninim kubitima. U tom se okviru Majoranini stupnjevi slobode ne tretiraju kao obični fermioni. Umjesto toga, njihovi višedijelni sustavi opisani su pomoću isprepletenih tenzorskih produkata (*braided tensor products*), poopćene statistike i struktura kvantnih grupa.

Fizikalni jezik jest drukčiji, ali je konceptualni problem usko povezan s onim čime se bavio rad BDM.

$$e^{i\theta} \quad \longrightarrow \quad U_i. \quad (8.6)$$

This simple expression captures one of the most important conceptual transitions in modern theoretical physics. Statistics becomes computation. Braiding becomes information processing.

8.4 Braided Majorana Qubits

This point becomes especially suggestive when compared with recent work by F. Toppan and collaborators on braided Majorana qubits. In that setting, Majorana degrees of freedom are not treated as ordinary fermions. Instead, their multiparticle sectors are governed by braided tensor products, generalized statistics, and quantum-group structures.

The physical language is different, but the conceptual problem is closely related to that addressed by the BDM work.

In both cases, one seeks a mathematical framework in which:

– statistics,
– braiding,
– topology,
– quantum information

are encoded algebraically.

The modern Majorana approach therefore revisits, in a new technological context, questions that originally arose in studies of of generalized statistics.

8.5 Majorana Modes and Non-Abelian Statistics

Although Ettore Majorana (Figure 7) could not have foreseen topological quantum computation, his 1937 theory of real fermions ultimate-

U oba se slučaja nastoji pronaći matematički okvir u kojemu su:

– statistika,
– pletenje,
– topologija,
– kvantna informacija

kodirani algebarski.

Suvremeni pristup temeljen na Majoraninim stupnjevima slobode stoga ponovno razmatra, u novom tehnološkom kontekstu, pitanja koja su izvorno nastala u istraživanjima poopćene statistike.

8.5. Majoranini modovi i neabelovska statistika

Premda Ettore Majorana (slika 7) nije mogao predvidjeti nastanak topološkog kvantnog računalstva, njegova teorija realnih fermiona iz godine 1937. na kraju je postala jedan od konceptualnih temelja Majoraninih nultih modova (*Majorana zero modes*) i isprepletenih kvantnih sustava.

Majoranini operatori zadovoljavaju

$$\gamma_i\gamma_j + \gamma_j\gamma_i = 2\delta_{ij}, \quad (8.7)$$

zajedno s

$$\gamma_i^\dagger = \gamma_i. \quad (8.8)$$

Dva Majoranina moda mogu se kombinirati u obični fermionski operator:

$$c = \frac{1}{2}(\gamma_1 + i\gamma_2), \qquad c^\dagger = \frac{1}{2}(\gamma_1 - i\gamma_2). \quad (8.9)$$

Pletenje dvaju Majoraninih nultih modova prikazuje se pomoću

ly became one of the conceptual foundations of Majorana zero modes and braided quantum systems.



Slika 7. **Ettore Majorana (1906. – 1938.)**
Figure 7. ***Ettore Majorana (1906–1938)***

Majorana operators satisfy

$$\gamma_i\gamma_j + \gamma_j\gamma_i = 2\delta_{ij}, \quad (8.7)$$

together with

$$\gamma_i^\dagger = \gamma_i. \quad (8.8)$$

Two Majorana modes may be combined into an ordinary fermionic operator:

$$c = \frac{1}{2}(\gamma_1 + i\gamma_2), \qquad c^\dagger = \frac{1}{2}(\gamma_1 - i\gamma_2). \quad (8.9)$$

The braiding of two Majorana zero modes is represented by

$$U_{ij} = \exp\left(\frac{\pi}{4}\gamma_i\gamma_j\right). \quad (8.10)$$

Za razliku od običnih faza zamjene, ti operatori općenito ne komutiraju:

$$U_{12}U_{23} \neq U_{23}U_{12}. \quad (8.11)$$

Ta nekomutativnost predstavlja karakterističnо obilježje neabelovske statistike.

Upravo to svojstvo čini Majoranine sustave osobito privlačnima za topološko kvantno računalstvo.

8.6. Ponovna pojava grupe pletenica

Operatori pletenja zadovoljavaju relacije oblika

$$U_iU_{i+1}U_i = U_{i+1}U_iU_{i+1}, \quad (8.12)$$

koje predstavljaju definirajuće relacije grupe pletenica.

Tako se ista matematička struktura koja se izvorno pojavila u proučavanju anyona prirodno ponovno javlja u kvantnom računalstvu temeljenom na Majoraninim modovima. To ponovno pojavljivanje nije slučajno. Ono odražava duboku povezanost između topologije i kvantne informacije.

Bez obzira polazi li se od anyona u frakcijskom kvantnom Hallovu učinku ili od Majoraninih nultih modova u topološkim supravodičima, strukture pletenica neizbježno se pojavljuju.

8.7. Konceptualni lanac

Stoga se rad BDM može smjestiti u sljedeći konceptualni lanac:

$$U_{ij} = \exp\left(\frac{\pi}{4}\gamma_i\gamma_j\right). \quad (8.10)$$

Unlike ordinary exchange phases, these operators generally do not commute:

$$U_{12}U_{23} \neq U_{23}U_{12}. \quad (8.11)$$

This noncommutativity is the hallmark of non-Abelian statistics.

It is precisely this property that makes Majorana systems attractive for topological quantum computation.

8.6 The Braid Group Reappears

The braid operators satisfy relations

$$U_iU_{i+1}U_i = U_{i+1}U_iU_{i+1}, \quad (8.12)$$

of the form group.

Thus, the same mathematical structure that originally appeared in the study of anyons reappears naturally in Majorana-based quantum computing. This recurrence is not accidental. It reflects a deep connection between topology and quantum information.

Whether one begins with anyons in the fractional quantum Hall effect or with Majorana zero modes in topological superconductors, braid structures inevitably emerge.

8.7 A Conceptual Chain

One may therefore place the BDM paper within the following conceptual chain:

Kvoni → Anyonski algebarski operatori → Pletene strukture → Majoranini kubiti → Topološko kvantno računalstvo (8.13)

Taj se lanac ne smije tumačiti kao izravna povijesna izvedba. Naprotiv, on izražava strukturni kontinuitet. I rad BDM i suvremeni modeli isprepletenih Majoraninih kubita dovode u pitanje tradicionalnu klasifikaciju na bozone i fermione te upućuju na bogatiji algebarski krajolik kvantne statistike.

8.8. Zašto je ta povezanost važna

Povezanost između BDM anyona i Toppanovih Majoraninih kubita nije samo bibliografske naravi [15,18]. Ona je konceptualna.

Oba pristupa bave se istim temeljnim pitanjem: *Može li se topološko i statističko ponašanje kvantnih sustava kodirati u algebarskim strukturama prikladnima za opis kvantne informacije?* Promatrano iz te perspektive, *Anyons as Quon Particles* može se tumačiti kao rano operatorsko-algebarsko istraživanje ideja koje su kasnije postale središnje za topološko kvantno računalstvo.

Suvremena teorija isprepletenih Majoraninih qubita daje tim idejama novo fizikalno okruženje, u kojem poopćena statistika više nije samo predmet matematičke fizike, nego i mogući sastojak budućih topološki otpornih kvantnih računala.

Quons → Anyonic Operator Algebras → Braid Structures → Majorana Qubits → Topological Quantum Computation (8.13)

This chain should not be interpreted as a direct historical derivation. Rather, it expresses a structural continuity. Both the BDM work and modern braided Majorana-qubit models challenge the traditional boson–fermion classification and point toward a richer algebraic landscape of quantum statistics.

8.8 Why the Connection Matters

The connection between BDM anyons and Toppan's Majorana qubits is not merely bibliographical [15,18]. It is conceptual.

Both concern the same fundamental question: *Can the topological and statistical be encoded in algebraic structures suitable for describing quantum information?* Seen from this perspective, *Anyons as Quon Particles* may be interpreted as an early operator-algebraic exploration of ideas that later became central to topological quantum computation.

The modern theory of braided Majorana qubits provides these ideas with a new physical setting, one in which generalized statistics is no longer only a subject of mathematical physics but also a possible ingredient of future fault-tolerant quantum computers.

8.9 Toward the Final Synthesis

By the mid-2020s, several intellectual traditions had converged:

– quantum foundations,
– Bell inequalities,

8.9. Prema završnoj sintezi

Do sredine 2020-ih godina nekoliko se intelektualnih tradicija spojilo u jedinstvenu cjelinu:

– Bellove nejednakosti,
– kvantna spregnutost,
– anyoni,
– Chern–Simonsova topologija,
– *q*-deformirane algebre,
– Majoranini modovi,
– topološko kvantno računalstvo.

Ono što se nekoć činilo kao skup odvojenih grana fizike sve više nalikuje različitim aspektima jedinstvenoga konceptualnog okvira.

Posljednje poglavlje objedinjuje ta dostignuća i razmatra iznimno intelektualno putovanje koje vodi od Einsteinova osporavanja kvantne mehanike do suvremene znanosti o kvantnoj informaciji. To je putovanje koje je promijenilo naše razumijevanje lokalnosti, statistike, topologije i informacije – i koje bi u konačnici moglo promijeniti i samu tehnologiju.

9. OD EINSTEINA DO MARTINISA

9.1. Kako su kvantna spregnutost, anyoni i topologija promijenili naše razumijevanje informacije

Povijest moderne fizike često se prikazuje kao niz revolucionarnih otkrića. Međutim, put od Einsteinovih prigovora kvantnoj mehanici do današnjih kvantnih procesora otkriva nešto još dublje. Ono što se na prvi pogled čini skupom nepovezanih razvoja postupno se pokazuje kao koherentno intelektualno putovanje koje mijenja naše razumijevanje lokalnosti, statistike, topologije i informacije – i koje bi u konačnici moglo promijeniti i samu tehnologiju.

– entanglement,
– anyons,
– Chern–Simons topology,
– *q*-deformed algebras,
– Majorana modes,
– topological quantum computation.

What once appeared to be separate branches of physics increasingly resembles different aspects of a single conceptual framework.

The final chapter brings these developments together and examines the remarkable intellectual journey that leads from Einstein's challenge to quantum mechanics to modern quantum-information science. It is a journey that transformed our understanding of locality, statistics, topology, and information–and may ultimately transform technology itself.

9 FROM EINSTEIN TO MARTINIS

9.1 How Entanglement, Anyons, and Topology Changed Our Understanding of Information

The history of modern physics is often presented as a succession of revolutionary discoveries. Yet the path from Einstein's objections to quantum mechanics to today's quantum processors reveals something deeper. What appears at first glance to be a collection of unrelated developments gradually emerges as a coherent intellectual journey. The story begins with a question about the nature of reality. It ends with machines capable of exploiting that reality in ways that would have seemed impossible only a few decades ago. The path from Einstein to Martinis is

nje. Ta priča započinje pitanjem o prirodi stvarnosti. Završava strojevima sposobnima iskorištavati tu stvarnost na načine koji bi se još prije samo nekoliko desetljeća činili nemogućima. Stoga put od Einsteina do Martinisa nije samo povijest tehnološkog napretka. On predstavlja preobrazbu našeg razumijevanja same informacije.

9.2. Einsteinovo pitanje

Godine 1935. Albert Einstein, Boris Podolsky i Nathan Rosen objavili su rad koji će postati jedan od najutjecajnijih u povijesti fizike. Njihov cilj nije bio obraniti kvantnu mehaniku, nego je dovesti u pitanje.

Argument EPR-a nastojao je pokazati da kvantna mehanika ne može pružiti potpun opis fizikalne stvarnosti. Einstein je vjerovao da toj teoriji, unatoč njezinoj izvanrednoj prediktivnoj moći, nedostaje nešto bitno. Iza kvantnih vjerojatnosti, smatrao je, mora postojati dublja deterministička stvarnost. Paradoks se usredotočio na ono što danas nazivamo kvantnom spregnutošću. Dvije čestice mogu ostati međusobno korelirane čak i kada su razdvojene proizvoljno velikim udaljenostima. Za Einsteina se takvo ponašanje činilo nespojivim s načelom lokalnosti.

Zaključak se činio očitim: kvantna mehanika mora biti nepotpuna.

Povijest će, međutim, krenuti drugim putem.

9.3. Bellova revolucija

Gotovo trideset godina rasprava je ostala pretežito filozofske naravi. Zatim je John Bell iz temelja promijenio tijek rasprave. Bell je pokazao da se Einsteinova

therefore not merely a technological history. It is a transformation in our understanding of information itself.

9.2 Einstein's Question

In 1935, Albert Einstein, Boris Podolsky, and Nathan Rosen published what would become one of the most influential papers in the history of physics. Their objective was not to defend quantum mechanics but to challenge it.

The EPR argument sought to demonstrate that quantum mechanics could not provide a complete description of physical reality. Einstein believed that the theory, despite its extraordinary predictive power, lacked something essential. Behind quantum probabilities, he suspected the existence of a deeper deterministic reality. The paradox centered on what we now call quantum entanglement. Two particles could remain correlated even when separated by arbitrarily large distances. For Einstein, such behavior appeared incompatible with locality.

The conclusion seemed obvious: quantum mechanics must be incomplete.

History would take a different path.

9.3 Bell's Revolution

For nearly thirty years the debate remained largely philosophical. Then John Bell transformed the discussion. Bell showed that Einstein's intuition could be tested experimentally. The resulting Bell inequalities created a clear distinction between local hidden-variable theories and quantum mechanics. Experiments performed by John Clauser, Alain Aspect, Anton Zeilinger and many others demonstrated that nature violates Bell inequalities.

intuicija može eksperimentalno provjeriti. Iz toga su proizašle Bellove nejednakosti, koje su omogućile jasno razlikovanje između lokalnih teorija sa skrivenim varijablama i kvantne mehanike. Pokusi koje su proveli John Clauser, Alain Aspect, Anton Zeilinger i mnogi drugi pokazali su da priroda narušava Bellove nejednakosti.

Presuda je bila nedvojbena. Kvantni svijet posjeduje korelacije koje se ne mogu objasniti lokalnim realizmom. Kvantna spregnutost nije bila paradoks. Ona je temeljno svojstvo stvarnosti.

Ta je spoznaja označila jednu od najvažnijih prekretnica u fizici dvadesetoga stoljeća.

9.4. Informacija postaje fizikalni pojam

Nakon što je kvantna spregnutost eksperimentalno potvrđena, fizičari su je postupno počeli promatrati na drukčiji način. U početku se smatralo da je riječ tek o konceptualnoj zanimljivosti. Kasnije je postalo jasno da kvantna spregnutost predstavlja vrijedan resurs. Iz tog je uvida nastala teorija kvantne informacije.

Po prvi put sama je informacija postala središnji fizikalni pojam. Ta je promjena duboko preoblikovala znanstveno razmišljanje. Tradicionalno se fizika usredotočivala na materiju i energiju. Kvantna informacija uvela je treću temeljnu perspektivu. Korelacije između sustava postale su jednako važne kao i sami sustavi.

Pitanje više nije bilo samo: *Što postoji?*

Novo je pitanje postalo: *Kako se informacija pohranjuje, obrađuje i štiti u prirodi?*

The verdict was decisive. The quantum world possesses correlations that cannot be explained by local realism. Entanglement was not a paradox. It was a fundamental feature of reality.

This realization marked one of the most important turning points in twentieth-century physics.

9.4 Information Becomes Physical

Once entanglement had been experimentally confirmed, physicists gradually began to view it differently. Initially, entanglement had been regarded as a conceptual curiosity. Later it became clear that entanglement represents a resource. Quantum information theory emerged from this insight.

For the first time, information itself became a central physical concept.This shift profoundly altered scientific thinking. Traditionally, physics focused on matter and energy. Quantum information introduced a third fundamental perspective. The correlations between systems became just as important as the systems themselves.

The question was no longer simply: *What exists?*

The new question became: *How is information stored, processed, and protected in nature?*

9.5 The Discovery of Anyons

While quantum information was developing, another revolution was taking place in condensed-matter physics. Frank Wilczek's discovery of anyons revealed that quantum statistics is richer than previously imagined.

9.5. Otkriće anyona

Dok se razvijala teorija kvantne informacije, u fizici kondenzirane tvari odvijala se još jedna revolucija. Otkriće anyona Franka Wilczeka pokazalo je da je kvantna statistika bogatija nego što se dotad zamišljalo. Gotovo cijelo stoljeće fizičari su vjerovali da identične čestice mogu biti ili bozoni ili fermioni. Anyoni su pokazali da ta pretpostavka vrijedi samo u trodimenzionalnom prostoru. U dvodimenzionalnim sustavima pojavljuju se posve nove statističke mogućnosti.

Važnost tog otkrića teško je procijeniti. Anyoni su pokazali da topologija može izravno utjecati na fizikalno ponašanje. Zamjena čestica postala je topološka operacija. Geometrija više nije bila dovoljna. Globalna struktura postala je presudna. Taj će uvid naposljetku preobraziti i fiziku kondenzirane tvari i kvantno računalstvo.

9.6. Topologija ulazi u fiziku

Chern–Simonsova teorija pružila je fizikalni mehanizam koji leži u osnovi anyonske statistike. Topologija je prestala biti tek grana matematike. Postala je dinamički sastojak fizikalne teorije.

Po prvi put fizičari su se susreli sa situacijom u kojoj:

– globalna svojstva imaju veću važnost od lokalnih pojedinosti,

– pletenice su važnije od samih putanja,

– topologija određuje opažljive fizikalne učinke.

To je predstavljalo duboku konceptualnu promjenu. Tradicionalni jezik čestica i sila proširio se tako da obuhvati posve no-

For nearly a century, physicists believed that identical particles must be either bosons or fermions. Anyons demonstrated that this assumption is true only in three dimensions. In two-dimensional systems, entirely new statistical possibilities emerge.

The importance of this discovery cannot be overstated. Anyons showed that topology can influence physical behavior directly. The exchange of particles became a topological operation. Geometry was no longer sufficient. Global structure mattered. This insight would eventually transform both condensed-matter physics and quantum computation.

9.6 Topology Enters Physics

Chern–Simons theory provided the physical mechanism underlying anyonic statistics. Topology ceased to be merely a branch of mathematics. It became a dynamical ingredient of physical theory.

For the first time, physicists encountered a situation in which:

– global properties matter more than local details,

– braids matter more than trajectories,

– topology determines observable physical effects.

This represented a profound conceptual shift. The traditional language of particles and forces expanded to include entirely new forms of organization.

9.7 Generalized Statistics and Algebraic Structures

At the same time, researchers explored whether generalized statistics could be described algebraically. The development of q-deformed al-

ve oblike organizacije. Informacija se sada mogla kodirati topološki.

9.7. Poopćena statistika i algebarske strukture

Istodobno su istraživači proučavali može li se poopćena statistika opisati algebarski. Razvoj *q*-deformiranih algebri i statistike kvona ponudio je alternativnu perspektivu. Umjesto da se izravno usredotoči na topologiju, bilo je moguće istraživati algebarske strukture koje leže u osnovi zamjene čestica. Rad *Anyons as Quon Particles* bio je dio toga šireg nastojanja. Njegovo središnje pitanje ostaje aktualno:

Može li se topologija anyona prevesti na jezik operatora?

To pitanje odražava dublju temu koja se neprestano provlači kroz modernu fiziku. Iznova i iznova pokazuje se da su geometrijske i algebarske ideje komplementarni opisi iste stvarnosti. Odnos između topologije i operatorske algebre i danas je aktivno područje istraživanja, osobito u kontekstu kvantne informacije i topoloških faza tvari.

9.8. Kitajevljeva vizija

Sljedeći odlučujući korak načinio je Aleksej Kitajev. On je shvatio da topologija može učiniti više od samog opisivanja egzotičnih čestica. Ona može štititi informaciju.

Torički kod uveo je novu paradigmu u kojoj se logički kubiti pohranjuju u globalnim topološkim svojstvima, a ne u lokalnim fizikalnim stanjima. Ta je ideja trajno promijenila područje istraživanja.

Po prvi put fizičari su raspolagali uvjerljivom strategijom za svladavanje de-

gebras and quon statistics offered an alternative perspective. Instead of focusing on topology directly, one could investigate the algebraic structures underlying particle exchange. The work *Anyons as Quon Particles* formed part of this broader effort. Its central question remains relevant:

Can the topology of anyons be translated into operator language?

This question reflects a deeper theme running throughout modern physics. Again and again, geometric ideas and algebraic ideas reveal themselves to be complementary descriptions of the same reality. The relationship between topology and operator algebra remains an active area of research, particularly in the context of quantum information and topological phases of matter.

9.8 Kitaev's Vision

The next decisive step came from Alexei Kitaev. He recognized that topology could do more than describe exotic particles. It could protect information.

The toric code introduced a new paradigm in which logical qubits are stored in global topological properties rather than local physical states. This idea changed the field permanently.

For the first time, physicists possessed a plausible strategy for overcoming decoherence, the greatest obstacle facing quantum computation. Information became a topological object. Errors became anyons. Computation became geometry. The boundaries between mathematical physics and information science began to disappear.

koherencije, najveće preprjeke razvoju kvantnog računalstva. Informacija je postala topološki objekt. Pogrješke su postale anyoni. Računanje je postalo geometrija. Granice između matematičke fizike i znanosti o informaciji počele su nestajati.

9.9. Martinis i eksperimentalna stvarnost

Teorija, ma koliko elegantna bila, na kraju se mora suočiti s eksperimentom. Taj su izazov prihvatili John Martinis i njegovi suradnici. Martinis je desetljećima radio na supravodljivim kvantnim sklopovima razvijajući tehnologije sposobne upravljati kvantnim stanjima s dotad nedostižnom preciznošću.

Izazov je bio golem. Kvantna koherencija morala se održati. Vjernost kvantnih vrata morala se povećati. Šum je trebalo smanjiti ispod praga potrebnog za topološki otporno kvantno računanje. Postupno su ti ciljevi ostvareni. Arhitekture površinskog koda, nadahnute Kitajevljevim idejama, postale su eksperimentalno izvedive.

Kvantno ispravljanje pogrješaka prešlo je iz područja teorijske mogućnosti u laboratorijsku stvarnost. Taj je razvoj kulminirao sve sofisticiranijim supravodljivim kvantnim procesorima i demonstracijom da se kvantno računanje može provoditi na razmjerima koji su se prije smatrali nedostižnima. Put od apstraktne topologije do stvarnoga fizikalnoga hardvera bio je dovršen.

9.10. Skriveno jedinstvo

Promatrani iz povijesne perspektive, događaji opisani u ovom radu mogu se činiti međusobno neovisnima. Einste-

9.9 Martinis and Experimental Reality

A theory, however elegant, must eventually confront experiment. This challenge was taken up by John Martinis and his collaborators. For decades, Martinis worked on superconducting quantum circuits, developing technologies capable of controlling quantum states with unprecedented precision.

The challenge was immense. Quantum coherence had to be maintained. Gate fidelities had to be improved. Noise had to be reduced below the threshold required for fault-tolerant computation. Gradually, these goals were achieved. Surface-code architectures inspired by Kitaev's ideas became experimentally viable.

Error correction moved from theoretical possibility to laboratory reality. The development culminated in increasingly sophisticated super-conducting quantum processors and in the demonstration that quantum computation could be performed on scales previously thought unattainable. The path from abstract topology to physical hardware was complete.

9.10 The Hidden Unity

Viewed historically, the developments described in this work may seem independent. Einstein studied the foundations of quantum mechanics. Bell studied locality. Wilczek studied low-dimensional quantum systems. Kitaev studied topology. Martinis built superconducting processors. Yet beneath these differences lies a remarkable unity. Each step concerns information.

Einstein asked how information about physical reality is represented.

in je proučavao temelje kvantne mehanike. Bell je proučavao lokalnost. Wilczek je proučavao kvantne sustave u malom broju dimenzija. Kitajev je proučavao topologiju. Martinis je izgradio supravodljive kvantne procesore. Ipak, ispod tih razlika krije se iznimno jedinstvo. Svaki od tih koraka odnosi se na informaciju.

Einstein je postavio pitanje kako je informacija o fizikalnoj stvarnosti predstavljena.

Bell je postavio pitanje kako su informacije međusobno korelirane. Kvantna spregnutost otkrila je nove oblike dijeljenja informacije. Anyoni su pokazali kako se informacija može kodirati topološki.

Kitajev je pokazao kako topologija može štititi informaciju.

Martinis je pokazao kako se zaštićenom kvantnom informacijom može eksperimentalno upravljati.

Središnja tema ostaje ista kroz cijelu ovu priču. Informacija je postala jedan od temeljnih pojmova moderne fizike.

9.11. Nova slika stvarnosti

Intelektualno putovanje od Einsteina do Martinisa odražava širu preobrazbu znanstvenog mišljenja. Klasična fizika naglašavala je:

– čestice,
– putanje,
– sile.

Suvremena kvantna fizika naglašava:

– korelacije,
– topologiju,
– informaciju.

To ne znači da su materija i energija postale manje važne. Naprotiv, naše se razumijevanje tih pojmova produbilo. In-

Bell asked how information is correlated. Entanglement revealed new forms of information sharing. Anyons showed how information can be encoded topologically.

Kitaev showed how topology can protect information.

Martinis demonstrated how protected quantum information can be manipulated experimentally.

The central theme remains the same throughout. Information has become one of the fundamental concepts of modern physics.

9.11 A New Picture of Reality

The intellectual journey from Einstein to Martinis reflects a broader transformation in scientific thought. Classical physics emphasized:

– particles,
– trajectories,
– forces.

Modern quantum physics emphasizes:

– correlations,
– topology,
– information.

This does not mean that matter and energy have become less important. Rather, our understanding of them has deepened. Information is no longer viewed merely as an abstract human construct. It appears to be woven into the fabric of physical reality itself. The emergence of quantum information science may therefore represent a conceptual revolution comparable to those initiated by Newton, Maxwell, Einstein, and quantum mechanics itself.

formacija se više ne promatra samo kao apstraktna tvorevina ljudskog uma. Čini se da je utkana u samo tkivo fizikalne stvarnosti. Stoga se pojava znanosti o kvantnoj informaciji može smatrati konceptualnom revolucijom usporedivom s onima koje su pokrenuli Newton, Maxwell, Einstein i sama kvantna mehanika.

9.12. Pogled u budućnost

Priča ispričana u ovom radu još nije završena. Velika topološki otporna kvantna računala još uvijek nisu izgrađena. Eksperimentalna realizacija neabelovskih anyona još nije u potpunosti ostvarena. Mnoga teorijska pitanja vezana uz topologiju, poopćenu statistiku i kvantnu informaciju i dalje su otvorena.

Ipak, smjer razvoja je jasan. Put koji je započeo EPR paradoksom nastavlja se i danas u laboratorijima diljem svijeta.

Budući razvoj može uključivati:

– skalabilna kvantna računala,

– topološke kvantne procesore,

– nove faze kvantne tvari,

– dublje povezanosti između informacije i temeljne fizike.

Hoće li ta dostignuća u konačnici preobraziti tehnologiju jednako dramatično kao što je tranzistor preobrazio dvadeseto stoljeće, tek treba vidjeti.

No jedna je činjenica već sada jasna. Intelektualno putovanje od Einsteinovih dvojbi do Martinisovih kvantnih procesora iz temelja je promijenilo naše razumijevanje prirode.

9.12 Looking Forward

The story told in this work is not finished. Large-scale fault-tolerant quantum computers have not yet been built. The experimental realization of non-Abelian anyons remains incomplete. Many theoretical questions concerning topology, generalized statistics, and quantum information remain open.

Yet the direction is clear. The path that began with the EPR paradox continues today in laboratories around the world.

Future developments may include:

– scalable quantum computers,

– topological quantum processors,

– new phases of quantum matter,

– deeper connections between information and fundamental physics.

Whether these developments ultimately transform technology as dramatically as the transistor transformed the twentieth century remains to be seen.

But one fact is already clear. The intellectual journey from Einstein's doubts to Martinis's quantum processors has fundamentally changed our understanding of nature.

10 CONCLUDING REMARKS: FROM QUANTUM FOUNDATIONS TO QUANTUM TECHNOLOGY

The development of quantum physics over the past century illustrates one of the most remarkable transformations in the history of science. Questions that initially appeared philosophical gradually became experimental.

Experimental discoveries evolved into mathematical structures. Mathematical structures eventually became technological principles. The

10. ZAVRŠNE NAPOMENE: OD TEMELJA KVANTNE MEHANIKE DO KVANTNE TEHNOLOGIJE

Povijesni razvoj kvantne fizike tijekom protekloga stoljeća ilustrira jednu od najizvanrednijih preobrazbi u povijesti znanosti. Pitanja koja su se u početku činila filozofskima postupno su postala predmetom eksperimentalnog istraživanja.

Eksperimentalna otkrića razvila su se u matematičke strukture. Matematičke strukture naposljetku su postale tehnološka načela. Put prikazan u ovom radu vjerno odražava upravo taj razvoj.

EPR paradoks doveo je u pitanje potpunost kvantne mehanike.

Bellov teorem pretvorio je taj izazov u tvrdnju koju je moguće eksperimentalno provjeriti. Kvantna spregnutost pojavila se kao temeljni fizikalni resurs.

Otkriće anyona pokazalo je da kvantna statistika može imati topološko podrijetlo. Chern–Simonsova teorija pokazala je da sama topologija može stvarati opažljive fizikalne učinke. Poopćena statistika i q-deformirane algebre ponudile su alternativne algebarske perspektive na te pojave. Kitajevljev rad pokazao je da topologija može štititi kvantnu informaciju. Martinis i njegovi suradnici pokazali su da se te ideje mogu ostvariti u stvarnim kvantnim uređajima.

Promatraju li se kao cjelina, ta dostignuća otkrivaju izniman kontinuitet. Središnji pojam koji ih povezuje nisu ni čestice ni sile. To je informacija. Sve više se čini da moderna fizika sugerira kako in-

path traced in this work reflects precisely this progression.

The EPR paradox challenged the completeness of quantum mechanics.

Bell's theorem transformed that challenge into an experimentally testable proposition. Entanglement emerged as a fundamental physical resource.

The discovery of anyons revealed that quantum statistics could possess a topological origin. Chern–Simons theory demonstrated that topology itself could generate observable physical effects. Generalized statistics and q-deformed algebras provided alternative algebraic perspectives on these phenomena. Kitaev's work showed that topology could protect quantum information. Martinis and his collaborators demonstrated that these ideas could be implemented in real quantum devices.

Viewed as a whole, these developments reveal a remarkable continuity. The central concept connecting them is neither particles nor forces. It is information. Increasingly, modern physics suggests that information is not merely something that observers extract from nature. Rather, information appears to be embedded within the structure of reality itself. Quantum entanglement, topological order, and fault-tolerant quantum computation all point toward this conclusion.

Whether future generations will ultimately regard information as a concept as fundamental as matter, energy, space, and time remains an open question. Yet the developments described throughout this book strongly suggest that such a possibility should be taken seriously.

The history of science repeatedly teaches us that the deepest revolutions often begin with ap-

formacija nije samo nešto što promatrači izdvajaju iz prirode. Naprotiv, čini se da je informacija utkana u samu strukturu fizikalne stvarnosti. Kvantna spregnutost, topološki uređena stanja i topološki otporno kvantno računanje upućuju upravo na takav zaključak.

Hoće li budući naraštaji na kraju smatrati informaciju jednako temeljnim pojmom kao što su materija, energija, prostor i vrijeme, ostaje otvoreno pitanje. Ipak, razvoj opisan u ovom radu snažno sugerira da takvu mogućnost treba ozbiljno razmotriti.

Povijest znanosti više nas je puta poučila da najdublje revolucije često započinju naizgled jednostavnim pitanjima. Einstein je postavio pitanje je li kvantna mehanika potpuna. Gotovo stoljeće poslije to pitanje i dalje oblikuje samu granicu suvremene fizike.

Potraga za odgovorom dovela je od temelja kvantne teorije do praga nove tehnološke ere.

IZJAVA O SUKOBU INTERESA

Ovaj rad nije objavljen u istom obliku, niti ponuđen za objavljivanje u bilo kojoj drugoj periodičnoj ili neperiodičnoj publikaciji. Autor izjavljuje da nije u sukobu interesa.

FINANCIRANJE

Za ovaj rad autor nije primio nikakva sredstva.

parently simple questions. Einstein asked whether quantum mechanics was complete. Nearly a century later, that question continues to shape the frontier of physics.

The search for its answer has led from the foundations of quantum theory to the threshold of a new technological era.

CONFLICT OF INTERESTS STATEMENT

This work has not been published in the same form, nor offered for publishing in any other periodical or non-periodical publication. The author declares that he has no conflict of interests.

FUNDING

For this work, the author did not receive any funding.

LITERATURA / *REFERENCES*

[1] Einstein A, Podolsky B, Rosen N: *Can quantummechanical description of physical reality be considered complete?,* Physical Review **1935**;47:777–780.

[2] Bell JS: *On the Einstein Podolsky Rosen Paradox*, Physics **1964**;1:195–200.

[3] Clauser JF, Horne MA, Shimony A, Holt RA: *Proposed experiment to test local hidden-variable theories*, Physical Review Letters **1969**;23:880–884.

[4] Aspect A, Grangier P, Roger G: *Experimental Realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm. Gedankenexperiment: A New Violation of Bell's Inequalities*, Physical Review Letters **1982**;49: 91–94.

[5] Wilczek F: *Quantum Mechanics of Fractional Spin Particles*, Physical Review Letters **1982**;49:957–959.

[6] Chern SS, Simons J: *Characteristic forms and geometric invariants*, Annals of Mathematics **1974**;99:48–69.

[7] Witten E: *Quantum field theory and the Jones polynomial*, Communications in Mathematical Physics **1989**;121:351–399.

[8] Greenberg OW: *Example of infinite statistics*, Physical Review Letters **1990**;64:705–708.

[9] Bardek V, Dorešić M, Meljanac S: *Anyons as quon particles*, Physical Review D **1994;**49:3059–3062.

[10] Kitaev AJ: *Fault-tolerant quantum computation by anyons*, Annals of Physics **2003**;303:2–30.

[11] Fowler AG, Mariantoni M, Martinis JM, Cleland AN: *Surface codes: Towards practical large-scale quantum computation*, Physical Review A **2012**;86:032324.

[12] Arute F et al.: *Quantum Supremacy using a Programmable Superconducting Processor*, Nature **2019**;574:505–510.

[13] Toppan F: *First quantization of braided Majorana fermions*, Nuclear Physics B **2022**;980:115834.

[14] Toppan F: *The parastatistics of braided Majorana fermions*, SciPost Physics Proceedings **2023**;14:046.

[15] Toppan F: *Volichenko-type metasymmetry of braided Majorana qubits*, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, **2024**;57:435203.

[16] Toppan F: *On braid statistics versus parastatistics*, **2024**;arXiv.2411.14261.

[17] Toppan F: *On the detectability of paraparticles beyond bosons and fermions*, International Journal of Geometric Methods in Modern Physics **2025**;2540042.

[18] Toppan F: *Braided Majorana qubits as a minimal setting for Topological Quantum Computation?*, Proceedings of Science, PoS(CORFU2024) **2024**;347, 202.