https://doi.org/10.67252/gl.2026.80.3.2
Pregledni znanstveni članak / Review Article

Tissotova ekvivalentna konusna projekcija sfere

Miljenko LAPAINE – Zagreb[1]

SAŽETAK. N. A. Tissot poznat je u teoriji kartografskih projekcija po elipsi deformacija koja se po njemu naziva Tissotovom indikatrisom. Međutim, vrlo je slabo poznata njegova ekvivalentna konusna projekcija s najmanjom najvećom deformacijom kutova. Ta je projekcija poseban slučaj Lambertove ekvivalentne konusne projekcije. U ovom članku bavimo se tom projekcijom uz dodatnu pretpostavku o samo jednoj standardnoj paraleli. Umjesto da unaprijed zada standardnu paralelu, Tissot postavlja uvjet da područje između dviju zadanih paralela bude preslikano ekvivalentno i s najmanjom najvećom deformacijom kutova. Tissot je dao samo konačne formule, a u ovom članku su detaljno objašnjeni izvodi tih formula. U članku su izrazi za faktore lokalnih linearnih mjerila uzduž meridijana i uzduž paralela ilustrirani odgovarajućim grafovima. Izrađene su karte sjeverne polusfere i cijeloga svijeta u toj projekciji.

Ključne riječi: Tissot, konusna projekcija, ekvivalentna projekcija.

1. Uvod

Nicolas Auguste Tissot (1824 – 1907) školovao se za inženjera u francuskoj vojsci, koju je završio kao kapetan inženjerstva (*capitaine du génie*). Početkom 1860-ih podučavao je geodeziju na École polytechnique u Parizu. Otprilike u isto vrijeme, bavio se istraživanjem određivanja najbolje kartografske projekcije za određenu regiju i svoja otkrića predstavio je francuskoj Akademiji znanosti.

Tissotovo istraživanje kartografskih projekcija za određena područja dovelo ga je do razvoja projekcije koju je smatrao optimalnom. Iako nije ni ekvivalentna ni konformna, njegova projekcija daje male distorzije za mala područja. Naziva se Tissotovom kompenzativnom projekcijom. Tu projekciju usvojila je geografska služba francuske vojske.

1 dr. sc., Miljenko Lapaine, prof. emer., Sveučilište u Zagrebu Geodetski fakultet, Kačićeva 26, HR-10000 Zagreb, Hrvatska, e-mail: miljenko.lapaine@geof.unizg.hr

Dok je svoje prve koncepte u vezi s kartografskim deformacijama razvio sredinom 19. stoljeća, tek je objavljivanjem knjige *Mémoire sur la représentation des surfaces et les projections des cartes géographiques* 1881. godine njegova elipsa deformacija poznata pod imenom Tissotova indikatrisa postala popularna. U toj knjizi Tissot je objasnio da se svako preslikavanje zakrivljene plohe u ravninu može lokalno interpretirati kao afino preslikavanje. Važnost Tissotove knjige prepoznao je njemački kartograf, geodet, astronom i matematičar Ernst Hermann Heinrich von Hammer koji je tu knjigu preveo na njemački i objavio 1887. godine. Knjiga je s francuskog prevedena i na ruski 1889. godine pod naslovom Изображение одной поверхности на другой и составление географических карт. Preveo ju je Дмитрий Петрович Рашков.

U spomenutoj knjizi Tissot je između ostaloga prikazao svoju varijantu ekvivalentne konusne projekcije s najmanjom najvećom deformacijom kutova. Ta je projekcija do današnjih dana vrlo malo prisutna u kartografskoj teoriji i praksi. U literaturi se spominje samo parcijalno (npr. Graur 1956, Kavrayskiy 1959, Snyder 1993, Serapinas 2005).

Tissot (1881) je nakon uvoda u §80 svoje knjige i nekoliko općih formula za konusne ekvivalentne projekcije, u §89 primijenio te opće formule na rješavanje zadatka određivanja konstanti ekvivalentne konusne projekcije uz uvjet minimuma maksimalne deformacije kutova.

S primjenom na ekvivalentne konusne projekcije sfere taj je uvjet prvi postavio i riješio upravo Tissot. Zbog toga Kavrayskiy (1959) tu projekciju naziva Tissotovom. Dakle, ekvivalentnu konusnu projekciju s najmanjom maksimalnom deformacijom kutova zvat ćemo Tissotovom ekvivalentnom konusnom projekcijom i označavati TEKP. Pri tome je obavezno reći da je riječ o ekvivalentnoj konusnoj projekciji, jer je jedna druga, kompenzativna projekcija već prije u literaturi nazvana Tissotovom projekcijom.

Konstatirali smo da je TEKP slabo poznata projekcija. Koji je tome razlog? Pretpostavljam da je osnovni problem u tome što je Tissot predstavio tu projekciju bez detaljnog matematičkog dokaza. Iz Tissotovog životopisa ne može se zaključiti da je bio dobar matematičar. Međutim, na temelju proučene literature zaključujem da je Tissot bio izvrstan matematičar, ali nije bio sklon detaljnom objašnjavanju rezultata. Preferirao je iznošenje svojih rezultata, a međukorake prepuštao čitatelju. Spomenimo da je i Graur (1956) u svojoj Matematičkoj kartografiji pohvalio TEKP, ali je pri njezinu opisivanju svjesno preskočio matematički izvod.

Činjenica je da o toj kartografskoj projekciji koja je stara oko 150 godina u najvećem broju udžbenika i monografija o kartografskim projekcijama nema ni riječi (npr. Hinks 1912, Deetz, Adams 1934, Fiala 1957, Snyder 1987, Kerkovits 2022). Budući da je riječ o zaista dobroj i korisnoj kartografskoj projekciji njome ćemo se baviti u ovome članku. Pri tome ćemo, za razliku od njezina autora, sve matematičke izvode detaljno obraditi.

2. Uvod u TEKP

Evo kako Tissot počinje priču o ekvivalentnim konusnim projekcijama sfere radijusa 1. Kreće od jednadžbe $n(\lambda - \lambda_0)$ za promjenu kuta $\lambda - \lambda_0$ u odnosu na azimutne projekcije i označava:

$$\rho = \rho(\delta) = \frac{2}{\sqrt{n}} \sin \frac{\delta}{2} \tag{1}$$

za radijus slike paralela, kako bi projekcija bila ekvivalentna, uspoređujući ga s radijusom slike paralela kod azimutne ekvivalentne projekcije. Pritom koristi zenitnu daljinu δ umjesto geografske širine φ, a koje su povezane na poznati način:

$$\delta = \frac{\pi}{2} - \varphi \tag{2}$$

Budući da je geografska širina $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$, to je zenitna daljina $\delta \in [0, \pi]$. Uočimo da je riječ o posebnom slučaju ekvivalentne konusne projekcije kod koje se pol preslika u točku. J. H. Lambert predložio je sedam, u to doba novih, kartografskih projekcija (Lambert 1772). U današnje doba, projekcija o kojoj je riječ poznata je pod imenom Lambertova ekvivalentna konusna projekcija (Snyder i Voxland 1989, Snyder 1993). U starijoj literaturi ta se projekcija može naći pod imenom izosferna sužena projekcija (fra. *isosphérique sténotère de Lambert*) (Germain 1866), *isospherical stenoteric projection* (Adams 1945), στενότερος, uži, plus étroit, narrower). Faktori lokalnih linearnih mjerila su (vidi Slika 1):

$$h = \frac{1}{\sqrt{n}} \cos \frac{\delta}{2}, \; k = \sqrt{n} \sec \frac{\delta}{2} \tag{3}$$

Budući da se radi o konusnoj projekciji, pretpostavljamo da je $0 < n < 1$.

Za standardnu paralelu vrijedi $h = k = 1$, a to znači da postoji paralela δ_0 za koju je:

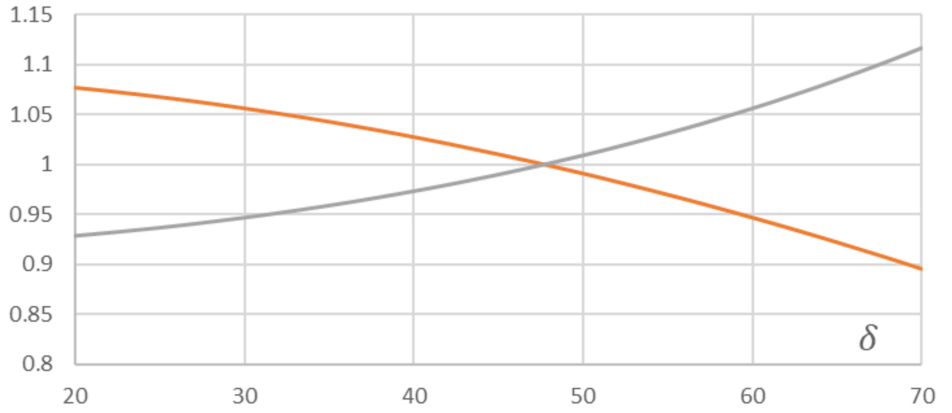
$$\cos \frac{\delta_0}{2} = \sqrt{n} \tag{4}$$

ili

$$n = \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_0}{2} \right) = \frac{1 + \sin \varphi_0}{2} \tag{5}$$

i za tu je paralelu:

$$h(\delta_0) = k(\delta_0) = 1. \tag{6}$$



Slika 1. *Faktori lokalnog linearnog mjerila uzduž meridijana (crveno) i uzduž paralela (sivo) za ekvivalentnu konusnu projekciju s jednom standardnom paralelom,* $n = 0{,}8365$.

tj. za točke na toj paraleli nema deformacije ni duljina ni kutova (Slika 1). Relacija (4) je važna jer daje odnos između zenitne daljine δ_0 standardne paralele i faktora n. Dakle, u opisanoj Lambertovoj ekvivalentnoj konusnoj projekciji postoji jedan parametar koji se može zadati na različite načine.

Ako se odmaknemo od paralele kojoj odgovara zenitna daljina δ_0 (Slika 1) bit će za $\delta < \delta_0$:

$$a = \frac{\cos\frac{\delta}{2}}{\cos\frac{\delta_0}{2}} = h,\ b = \frac{\cos\frac{\delta_0}{2}}{\cos\frac{\delta}{2}} = k,\ \tan\frac{\omega}{2} = \tan\frac{\delta_0-\delta}{4}\tan\frac{\delta_0+\delta}{4} \qquad (7)$$

a za $\delta > \delta_0$:

$$b = \frac{\cos\frac{\delta}{2}}{\cos\frac{\delta_0}{2}} = h,\ a = \frac{\cos\frac{\delta_0}{2}}{\cos\frac{\delta}{2}} = k,\ \tan\frac{\omega}{2} = \tan\frac{\delta-\delta_0}{4}\tan\frac{\delta+\delta_0}{4} \qquad (8)$$

pri čemu je a velika poluos elipse deformacija, b mala poluos elipse deformacija, a ω deformacija kuta. Uočimo da je u Tissotovim formulama najveća deformacija kuta označena s ω, dok je to uobičajeno u drugoj literaturi $\omega/2$.

3. TEKP s jednom standardnom paralelom i najmanjom deformacijom kutova

U prethodnom poglavlju upoznali smo se s Lambertovom ekvivalentnom konusnom projekcijom koja je određena jednim parametrom. Postavlja se pitanje: kako odrediti taj parametar, odnosno prema (4), kako odabrati standardnu paralelu? Jedna od mogućnosti je slijediti Tissotovo razmišljanje koje vodi na takvu ekvivalentnu projekciju koja će imati najmanju najveću deformaciju kutova na razmatranom području ograničenom s dvije paralele.

Neka su δ'i δ'' najmanja i najveća zenitna daljina područja koje se preslikava i neka je δ_0 između njih:

$$\delta' \leq \delta_0 \leq \delta''. \tag{9}$$

Tissot je predložio da parametar δ_0, odnosno n treba tako odabrati da najveće linearne deformacije budu na obje granične paralele δ' i δ''. Vrijednosti od a na graničnim paralelama su:

$$\sqrt{n}sec\frac{\delta'}{2}, \frac{1}{\sqrt{n}}\cos\frac{\delta''}{2}. \tag{10}$$

Veća vrijednost od a bit će najmanja moguća kad se uzme n tako da su obje vrijednosti međusobno jednake, tj. da bude:

$$n = \cos\frac{\delta'}{2}\cos\frac{\delta''}{2}. \tag{11}$$

Tu je primijenjen *minimax* princip. Naime, kad vrijednosti od a na graničnim paralelama ne bi bile međusobno jednake, onda najveća ne bi bila najmanja. Dakle, na obje granične paralele će biti:

$$a = \sqrt{\frac{\cos\frac{\delta'}{2}}{\cos\frac{\delta''}{2}}}, \quad \sin\omega = \tan\frac{\delta''-\delta'}{4}\tan\frac{\delta''+\delta'}{4} \tag{12}$$

Tissotov zaključak koji od (10) vodi na (11) i zatim (12) nije baš očit. Rastumačimo ga. Zadano je δ' i δ'', $0 < \delta' < \delta'' < \pi$. Prisjetimo se relacija (7) i (8). Traži se δ_0 tako da istodobno:

1. za $\delta' \leq \delta \leq \delta_0$ bude $\min\left(\max\frac{\cos\frac{\delta}{2}}{\cos\frac{\delta_0}{2}}\right)$,

2. za $\delta_0 \leq \delta \leq \delta''$ bude $\min\left(\max\frac{\cos\frac{\delta}{2}}{\cos\frac{\delta_0}{2}}\right)$.

Za bilo koji zadani δ_0, $\delta' \leq \delta_0 \leq \delta''$ i bilo koji δ takav da je $\delta' \leq \delta \leq \delta_0$, $\frac{\cos\frac{\delta}{2}}{\cos\frac{\delta_0}{2}}$ će poprimiti najveću vrijednost za najmanji δ, tj. za $\delta = \delta'$. Dakle, tražimo δ_0 tako da bude $\frac{\cos\frac{\delta'}{2}}{\cos\frac{\delta_0}{2}}$ minimum. Uočimo još da je $\frac{\cos\frac{\delta'}{2}}{\cos\frac{\delta_0}{2}} > 1$.

Slično tome, za bilo koji zadani δ_0, $\delta' \le \delta_0 \le \delta''$ i bilo koji δ takav da je $\delta_0 \le \delta \le \delta''$, $\dfrac{\cos\frac{\delta_0}{2}}{\cos\frac{\delta}{2}}$ će poprimiti najveću vrijednost za najveći δ, tj. za $\delta = \delta''$. Dakle, tražimo δ_0 tako da bude $\dfrac{\cos\frac{\delta_0}{2}}{\cos\frac{\delta''}{2}}$ minimum. Uočimo također da je $\dfrac{\cos\frac{\delta_0}{2}}{\cos\frac{\delta''}{2}} > 1$.

Funkcija $f(\delta_0) = \dfrac{\cos\frac{\delta'}{2}}{\cos\frac{\delta_0}{2}}$ je na intervalu (δ', δ'') strogo padajuća, a funkcija $g(\delta_0) = \dfrac{\cos\frac{\delta_0}{2}}{\cos\frac{\delta''}{2}}$ je na istom tom intervalu strogo rastuća. Prema tome, njihov presjek, odnosno zajednička točka je rješenje problema:

$$\frac{\cos\frac{\delta'}{2}}{\cos\frac{\delta_0}{2}} = \frac{\cos\frac{\delta_0}{2}}{\cos\frac{\delta''}{2}} \tag{13}$$

i odatle:

$$n = \cos^2\frac{\delta_0}{2} = \cos\frac{\delta'}{2}\cos\frac{\delta''}{2}. \tag{14}$$

Za takav n možemo izračunati:

$$a(\delta') = \frac{\cos\frac{\delta'}{2}}{\cos\frac{\delta_0}{2}} = \frac{\cos\frac{\delta'}{2}}{\sqrt{n}} = \frac{\cos\frac{\delta'}{2}}{\sqrt{\cos\frac{\delta'}{2}\cos\frac{\delta''}{2}}} = \sqrt{\frac{\cos\frac{\delta'}{2}}{\cos\frac{\delta''}{2}}} \tag{15}$$

$$a(\delta'') = \frac{\cos\frac{\delta_0}{2}}{\cos\frac{\delta''}{2}} = \frac{\sqrt{n}}{\cos\frac{\delta''}{2}} = \frac{\sqrt{\cos\frac{\delta'}{2}\cos\frac{\delta''}{2}}}{\cos\frac{\delta''}{2}} = \sqrt{\frac{\cos\frac{\delta'}{2}}{\cos\frac{\delta''}{2}}} \tag{16}$$

Primijetimo da zbog pretpostavke (9) vrijedi:

$$\cos^2\left(\delta''/2\right) \le \cos^2\left(\delta_0/2\right) = n \le \cos^2\left(\delta'/2\right). \tag{17}$$

Iz (17) možemo zaključiti da n ne može biti bilo koji broj između 0 i 1. Npr. ako je $\delta' = 30^\circ$, a $\delta'' = 60^\circ$, onda mora biti $0.750 < n < 0.933$.

Na Slika 1 prikazani su faktori lokalnih linearnih mjerila h i k ako je zadano $\delta' = 30^\circ, \delta'' = 60^\circ$. U tom slučaju $n = 0.8365, \delta_0 = 47.698^\circ, h(\delta_0) = k(\delta_0) = 1$, $h(\delta') = k(\delta'') = 1.0561$.

Sve zajedno znači da se najmanja vrijednost najvećeg faktora lokalnog linearnog mjerila postiže na rubovima promatranog intervala $\left[\delta', \delta''\right]$ i to za onaj $\left[\delta', \delta''\right]$ za koji je:

$$\cos\frac{\delta_0}{2} = \sqrt{n},\ n = \cos\frac{\delta'}{2}\cos\frac{\delta''}{2}. \tag{18}$$

Za takav izbor parametra n je (vidi primjer na Slika 3):

$$h\left(\delta'\right) = a\left(\delta'\right) = a\left(\delta''\right) = k\left(\delta''\right) = \sqrt{\frac{\cos\frac{\delta'}{2}}{\cos\frac{\delta''}{2}}}. \tag{19}$$

Sad još treba utvrditi vezu između maksimalne deformacije kuta ω i faktora lokalnog linearnog mjerila a (velika poluos elipse deformacija, $a \geq 1$). Ako napišemo:

$$\sin\omega = \frac{a-b}{a+b} = \frac{a-1/a}{a+1/a} = \frac{a^2-1}{a^2+1} = 1 - \frac{2}{a^2+1}, \tag{20}$$

onda iz (20) možemo zaključiti da će maksimalni ω biti to manji, što je a manji. Prema učinjenom izvodu, najmanji a na oba ruba intervala $\left[\delta', \delta''\right]$ određen je formulom (19). Uvrstimo li tu vrijednost za a u (20), dobit ćemo:

$$\sin\omega = \tan\frac{\delta'+\delta''}{4}\tan\frac{\delta''-\delta'}{4}. \tag{21}$$

Dakle, ako želimo ekvivalentnu konusnu projekciju s jednom standardnom paralelom koja će područje na sferi omeđeno zenitnim daljinama δ' i δ' preslikati s najmanjom najvećom distrozijom kutova tada parametar n treba odabrati prema (11), a u tom slučaju najmanja najveća deformacija kutova određena je izrazom (21).

Napomenimo da kod ekvivalentnih azimutnih projekcija ne postoji interval s najmanjom deformacijom kuta, jer pretpostavka $n = 1$ vodi na $\delta' = \delta'' = 0$.

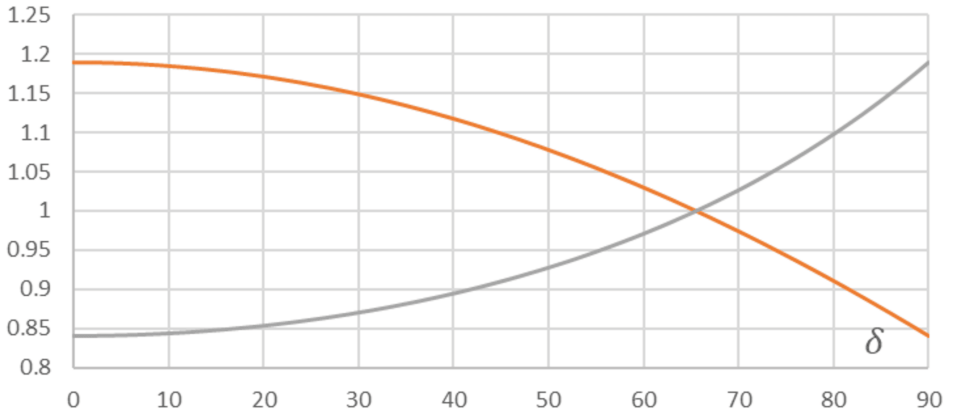
3.1. TEKP s jednom standardnom paralelom za polusferu

Ta takvu projekciju treba odabrati $\delta' = 0$ i $\delta'' = \pi/2$, pa je:

$$n = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \cos\frac{\delta_0}{2} = 1/\sqrt[4]{2}. \tag{22}$$

Za sjevernu polusferu deformacija je jednaka nuli na paraleli kojoj odgovara 24°28' geografske širine ( ).

Najveća vrijednost od a je $\sqrt[4]{2}$, najmanja vrijednost od b je $1/\sqrt[4]{2}$, tako da je odnos najveće i najmanje promjene duljina jednak $\sqrt{2} = 1,414$. Najveća vrijednost od $\sin\omega = \tan^2\pi/8$ i odatle $2\omega = 19^\circ\ 45'$.



Slika 2. *Faktori lokalnih linearnih mjerila za kartu polusfere za TEKP s jednom standardnom paralelom za kartu polusfere prema Tissotu,* $n = 1/\sqrt{2} = 0.7071$ $\delta_0 = 65^\circ\ 32'$, $\varphi_0 = 24^\circ\ 28'$.

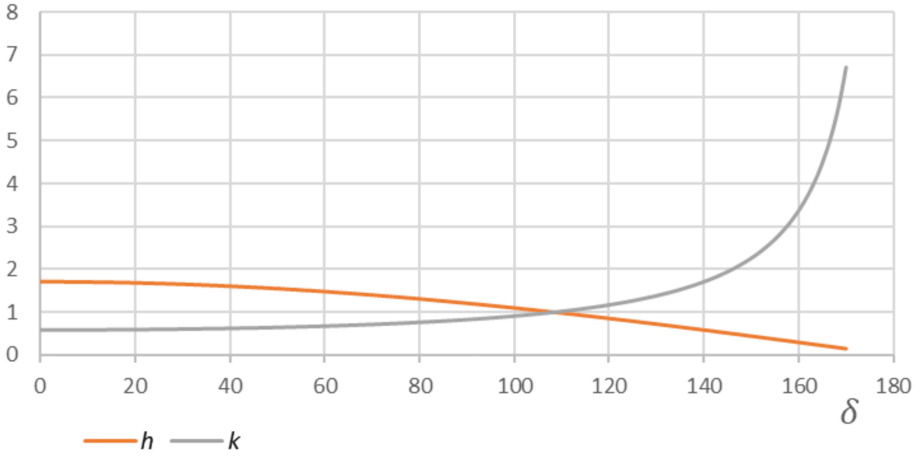


Slika 3. *Karta sjeverne polusfere u Tissotovoj ekvivalentnoj konusnoj projekciji s jednom standardnom paralelom i najmanjom najvećom deformacijom kutova,* $n = 1/\sqrt{2} = 0.7071$, $\delta_0 = 65^\circ\ 32'$, $\varphi_0 = 24^\circ\ 28'$.

3.2. TEKP s jednom standardnom paralelom za kartu svijeta

Ako želimo izraditi kartu svijeta u ekvivalentnoj konusnoj projekciji onda Tissot preporučuje odabir takve projekcije koja za područje između sjevernog pola i paralele −50° daje najmanju deformaciju kutova, kako bi u velikim južnim širinama odnosi deformacija bili podjednaki. Središte karte trebalo bi biti u sjevernom polu.

Toj projekciji odgovara vrijednost $n = 0.342$, deformacija je jednaka nuli na paraleli −18°25', najveće vrijednosti od 2ω i a bit će 58°43' i 1.710. Kod Lambertove azimutne projekcije te su vrijednosti 104°28' i 2.924.



Slika 4. *Faktori lokalnih linearnih mjerila za ekvivalentnu konusnu projekciju s jednom standardnom paralelom za kartu svijeta prema Tissotu,* $n = 0.342$, $\delta_0 = 108^\circ\ 35'$, $\varphi_0 = -18^\circ\ 25'$.



Slika 5. *Karta svijeta u Tissotovoj ekvivalentnoj konusnoj projekciji s jednom standardnom paralelom i najmanjom najvećom deformacijom kutova,* $n = 0.342$, $\delta_0 = 108^\circ\ 35'$, $\varphi_0 = -18^\circ\ 25'$.

4. Zaključak

U članku je detaljno obrađena Tissotova ekvivalentna konusna projekcija s najmanjom najvećom deformacijom kutova i jednom standardnom paralelom. Ta se projekcija može interpretirati kao specijalan slučaj Lambertove ekvivalentne konusne projekcije. Posebnost te Tissotove projekcije je u tome što se unaprijed ne zadaje standardna paralela, nego se do nje dolazi iz uvjeta o najmanjoj najvećoj deformaciji kutova na promatranom području omeđenom dvjema paralelama. Tissot je očito bio odličan matematičar, ali nije dao izvode formula, nego samo ključne i konačne izraze. Zbog toga su u ovom članku dana detaljna objašnjenja i izvodi, a uz to i grafički prikazi faktora lokalnih linearnih mjerila.

S obzirom na navedena svojstva, ta je projekcija pogodna za izradu karata područja koja se protežu u smjeru istok-zapad, ali možda i za karte polusfere ili cijeloga svijeta prema uputama koje je dao Tissot.

Tissotova ekvivalentna konusna projekcija s dvije standardne paralele je specijalan slučaj Albersove projekcije. Izvod odgovarajućih formula za takvu Tissotovu projekciju je složeniji i mogao bi biti predmet daljnjih istraživanja.

Zahvala. Autor zahvaljuje prof. emer. Nedjeljku Frančuli na čitanju rukopisa i korisnim primjedbama te izv. prof. dr. sc. Domagoju Matijeviću na pomoći oko razjašnjavanja minimax problema. Autor zahvaljuje i anonimnim recenzentima na korisnim primjedbama.

Literatura

Adams O. S. (1945): General Theory of Equivalent Projections, U.S. Coast and Geodetic Survey Spec. Pub. 236

Deetz C. H., Adams O. S. (1934): Elements of map projection with applications to map and chart construction (4th ed.): U.S. Coast and Geodetic Survey Spec. Pub. 68.

Fiala, F. (1957): Mathematische Kartographie, Veb Verlag Technik Berlin.

Germain A. (1866): Traité des projections des cartes géographiques, représentation plane de la sphère et du sphéroïde, Paris, A. Bertrand.

Graur A. V. (1956): Matematicheskaya kartografiya Leningrad University, 2nd ed. [Russian. 371 p., revised by A. A. Pavlov, Translated to English as Mathematical cartography: St. Louis, Mo., U.S. Air Force, Aeronautical Chart and Information Center, 1970, 671 p.].

Hinks A. R. (1912): Map projections: Cambridge, Eng., Cambridge Univ. Press, 126 p. [2nd ed., 1921, 158 p.].

Kavrayskiy V. V. (1959): Izbrannye trudy. Tom II, Matematicheskaja kartografija, Vypusk 2, Konicheskie i tsilindricheskie proektsii, ih primenenie, Izdannie Upravlenija nachal'nika Gidrograficheskoj sluzhby VMF.

Kerkovits K. (2022): Map projections, Lecture notes for students in Cartography and Geoinformatics Msc programme, Eotvos Lorand University, Faculty of Informatics, Institute of Cartography and Geoinformatics, Budapest.

Lambert J. H. (1772): 6th Chapter: Anmerkungen und Zusatze zur Entwerfung der Land- und Himmelscharten [Notes and comments on the composition of terrestrial and celestial maps]. In: Beytrage zum gebrauche der mathematik und deren anwendung. dritter theil Berlin: Verlag der Buchhandlung der Realschule.

Serapinas B. B. (2005): Matematicheskaya kartografiya, Moscow, Academa.

Snyder J. P. (1987): Map Projections – A Working Manual. U.S. Geological Survey Prof. Paper 1395, 383 p. Reprinted 1989 and 1994 with corrections. https://doi.org/10.3133/pp1395

Snyder J. P. (1993): Flattening the Earth, Two Thousend Years of Map Projections, The University of Chicago Press, Chicago and London.

Snyder J. P., Voxland M. Ph. (1989): An Album of Map Projections, U.S. Geological Survey, Professional Paper 1453. https://doi.org/10.3133/pp1453

Tissot N. A. (1881): Mémoire sur la représentation des surfaces et les projections des cartes géographiques: Paris, Gauthier Villars, 337 p. +60 p. tables. [Details the use of his indicatrix, introduced earlier. Also presents his version of equal-area conic projection. Note: The preamble and first four chapters of this work, p. 1-126, first appeared in Nouvelles Annales de Mathématiques, series 2, 1878, v. 17; 1879, v. 18; 1880, v. 19.].

Tissot N. A. (1887): Die Netzentwürfe geographischer Karten: Stuttgart, German edition and translation by Ernst Hammer.

Tissot N. A. (1889): Изображение одной поверхности на другой и составление географических карт. Preveo Tissotovu knjigu s francuskog na ruski Дмитрий Петрович Рашков. Moskva.

Tissot Equivalent Conic Projection of the Sphere

ABSTRACT. N. A. Tissot is best known in the theory of map projections for the distortion ellipse, now commonly referred to as Tissot's indicatrix. By contrast, his equal-area conic projection with the smallest maximum angular distortion has received very little attention. This projection is a special case of the Lambert equal-area conic projection. In this article, we examine this projection under the additional constraint of a single standard parallel. Rather than prescribing the standard parallel in advance, Tissot required that the region between two given parallels be mapped with equal area while minimizing the maximum angular distortion. Although Tissot presented only the final formulas, this article provides a detailed derivation of those results. It also illustrates the local linear scale factors along the meridians and parallels with appropriate graphs and presents maps of the Northern Hemisphere and the entire world constructed using this projection.

Keywords: Tissot, conic projection, equivalent projection.

Primljeno / Received: 2026-05-29
Prihvaćeno / Accepted: 2026-07-10