Osječki matematički list 26 (2026), 55–70

Fibonaccijevi i Lucasovi polinomi

Mihaela Ribičić Penava[*], Karla Kajan[†]

Sažetak

U ovome radu definirani su Fibonaccijevi i Lucasovi nizovi i brojevi te su uvedeni pripadni Fibonaccijevi i Lucasovi polinomi. Osim toga proučavana su temeljna svojstva Fibonaccijevih i Lucasovih polinoma, uključujući rekurzivne relacije, eksplicitne formule i identitete koji ih povezuju.

Ključne riječi: *Fibonaccijevi brojevi, Fibonaccijevi polinomi, Lucasovi brojevi, Lucasovi polinomi*

Fibonacci and Lucas polynomials

Abstract

In this paper, the Fibonacci and Lucas sequences and numbers are defined, and the associated Fibonacci and Lucas polynomials are introduced. In addition, the fundamental properties of Fibonacci and Lucas polynomials are studied, including recurrence relations, explicit formulas, and identities connecting them.

Keywords: *Fibonacci numbers, Fibonacci polynomials, Lucas numbers, Lucas polynomials*

[*]Fakultet primijenjene matematike i informatike, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, email: mihaela@mathos.hr

[†]Fakultet primijenjene matematike i informatike, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, email: kkajan@mathos.hr

1 Povijesni pregled



Leonardo Pisano - Fibonacci (*oko 1170.–1250.*)

Leonardo Pisano, poznatiji kao Fibonacci, jedan je od najpoznatijih i najznačajnijih srednjovjekovnih matematičara. Rođen je u Pisi oko 1170. godine. Putovao je s ocem koji je bio diplomatski predstavnik Republike Pise u Sjevernoj Africi te je time imao priliku upoznati različite matematičke sustave, među kojima se najviše isticao arapski brojevni sustav koji je uvelike utjecao na njegov daljnji rad. Povratkom u Pisu, oko 1200. godine, Fibonacci počinje s pisanjem svojih djela čime je znatno pridonio razvoju europske matematike. U njegovom najpoznatijem djelu, *Liber Abaci*, uveden je arapski brojevni sustav u zapadni svijet te je oblikovan Fibonaccijev niz, koji je postao jedan od temeljnih pojmova u povijesti matematike. Niz je definiran rekurzivno i ima veliku primjenu u različitim područjima kao što su računarstvo, statistika, biologija i fizika. Kao generalizacija Fibonaccijevih brojeva nastali su odgovarajući polinomi koji su omogućili dublju algebarsku analizu.



Édouard Lucas (*1842.–1891.*)

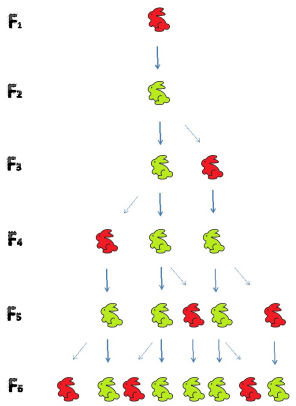
Édouard Lucas bio je francuski matematičar rođen 1842. godine. Tijekom Francusko-pruskog rata (1870.-1871.) služio je kao topnički časnik. Nakon završetka rata postao je profesor matematike na Lycée Charlemagne u Parizu. Lucasov doprinos teoriji brojeva posebno se očituje u njegovim istraživanjima Fibonaccijevog niza, na temelju kojih je uveden Lucasov niz. Formulirao je poznatu eksplicitnu formulu za Fibonaccijeve brojeve te razvio metode za testiranje prostih brojeva. Godine 1876. primijenio je te metode kako bi dokazao da je Mersenneov broj $2^{127} - 1$ prost, to je i dalje najveći prost broj otkriven bez pomoći računala. Lucas je također poznat kao autor zagonetke *Tower of Hanoi* objavljene 1883. godine u djelu *Récréations mathématiques*.

2 Fibonaccijevi polinomi

2.1 Fibonaccijev niz

Leonardo Pisano - Fibonacci je prvi put u knjizi *Liber Abaci* predstavio problem razmnožavanja zečeva iz kojega nastaje Fibonaccijev niz. Pretpostavimo da prvoga siječnja, u ograđenom prostoru, imamo jedan par novorođenih zečeva. Taj par zečeva će 1. ožujka dobiti prvi par potomaka. Svakog sljedećeg prvog dana u mjesecu će dobivati novi par zečeva. Novi parovi zečeva će nakon navršena dva mjeseca dobiti novi par potomaka, itd. Nadalje, pretpostavljamo da imamo idealne uvjete što znači da nema ugibanja zečeva te da svaki par zečeva uvijek dobije jedan novi par potomaka koji čine mužjak i ženka. Zanima nas koliko će parova zečeva biti u ograđenom

prostoru na početku n-tog mjeseca. Rješenje problema je n-ti Fibonaccijev broj F_n. Na slici 1 možemo vidjeti grafički prikaz razmnožavanja zečeva. Par novorođenih zečeva obojen je crvenom bojom, a zelenom bojom je obojan par zečeva starih barem jedan mjesec.



Slika 1. Razmnožavanje zečeva [1]

Time dobivamo beskonačni niz brojeva:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$$

koji se naziva **Fibonaccijev niz** ([1]).

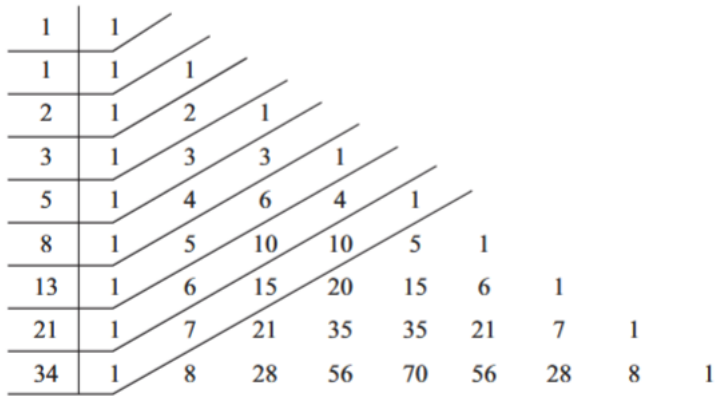
Definicija 2.1. *Neka je $F_1 = 1$ i $F_2 = 1$. Niz (F_n) definiran rekurzivnom relacijom:*

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geq 3, \tag{1}$$

*naziva se **Fibonaccijev niz**, a član toga niza F_n naziva se **n-ti Fibonaccijev broj**.*

Za početne uvjete mogu se uzeti i vrijednosti $F_0 = 0$ i $F_1 = 1$. Zadovoljavat će istu rekurzivnu relaciju, jedina razlika će biti u indeksiranju.
Fibonaccijevi brojevi imaju brojne primjene, a jedna od njih ogleda se u njihovoj povezanosti s Pascalovim trokutom, koja je objašnjena u [2, str. 166.]. Ako pogledamo sumu elemenata na rastućim dijagonalama uočit ćemo da su to upravo Fibonaccijevi brojevi. Na sljedećoj slici prikazano je prvih nekoliko vrijednosti Pascalovog trokuta te suma elemenata na rastućim dijagonalama.
Općenito vrijedi:

$$F_{n+1} = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \binom{n-3}{3} + \cdots = \sum_{i \geq 0} \binom{n-i}{i}.$$



Slika 2. Pascalov trokut i Fibonaccijevi brojevi [2, str. 166.]

U nastavku ćemo izvesti funkciju izvodnicu za Fibonaccijev niz koja je objašnjena u [2, str. 118.]. Pomnožimo rekurzivnu relaciju (1) s x^n i zbrojimo pa dobivamo

$$\sum_{n=2}^{\infty} F_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2} x^n.$$

Svaku od navedenih suma možemo povezati s funkcijom izvodnicom $F(x)$ ovog niza, pri čemu je $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n$. Stoga imamo

$$F(x) - F_0 - F_1 x = x[F(x) - F_0] + x^2 F(x).$$

Time dobivamo sljedeću funkciju izvodnicu Fibonaccijevog niza:

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

2.2 Fibonaccijevi polinomi

Proširimo li Fibonaccijeve brojeve na Fibonaccijeve polinome dobivamo sljedeću definiciju preuzetu iz [7].

Definicija 2.2. *Rekurzivnom relacijom:*

$$F_n(x) = xF_{n-1}(x) + F_{n-2}(x), \quad n \geq 2, \tag{2}$$

gdje su $F_0(x) = 0$ *i* $F_1(x) = 1$, *definirani su* ***Fibonaccijevi polinomi****.*

Uočimo, za $x = 1$ dobiva se $F_n(1) = F_n$, a to je n-ti Fibonaccijev broj.
Za negativne indekse vrijedi:

$$F_{-n}(x) = (-1)^{n-1}F_n(x).$$

Dokaz jednakosti može se vidjeti u [9, str. 2.].

Primjer 2.1. *Koristeći jednakost* (2) *napišimo prvih osam Fibonaccijevih polinoma, krenuvši od* F_1*, te ih prikažimo grafički.*

i) $F_1(x) = 1$

ii) $F_2(x) = x$

iii) $F_3(x) = x^2 + 1$

iv) $F_4(x) = x^3 + 2x$

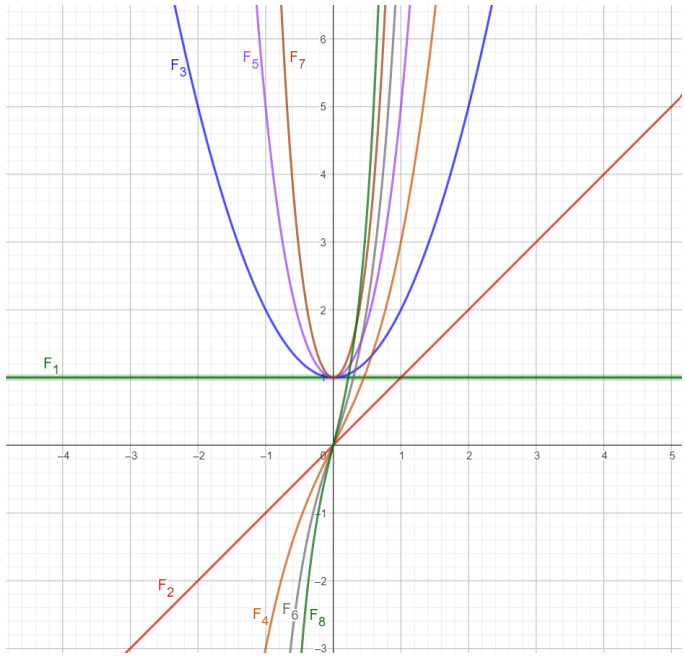
v) $F_5(x) = x^4 + 3x^2 + 1$

vi) $F_6(x) = x^5 + 4x^3 + 3x$

vii) $F_7(x) = x^6 + 5x^4 + 6x^2 + 1$

viii) $F_8(x) = x^7 + 6x^5 + 10x^3 + 4x$.

Uočimo da je stupanj polinoma $F_n(x)$ *jednak* $n - 1$, $n \geq 1$. *Pogledajmo u nastavku grafički prikaz tih polinoma.*



Slika 3. Grafički prikaz Fibonaccijevih polinoma $F_n(x)$, $n = 1, \ldots, 8$.

Fibonaccijeve polinome možemo prikazati pomoću funkcije izvodnice na sljedeći način (vidi [9, str. 7.])

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n(x)t^n = \frac{t}{1 - xt - t^2}.$$

Izvedimo formulu kojom ćemo pojednostaviti računanje n-tog Fibonaccijevog polinoma, bez računanja prethodnog polinoma. Karakteristični polinom rekurzivne relacije (2) dan je kao (vidi [4]):

$$r^2 - xr - 1 = 0. \tag{3}$$

Označimo s $r_1 = \alpha$ i $r_2 = \beta$ rješenja te kvadratne jednadžbe, pa imamo

$$\alpha = \frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2} \quad \text{i} \quad \beta = \frac{x-\sqrt{x^2+4}}{2}.$$

Stoga $F_n(x)$ možemo zapisati kao $F_n(x) = A\alpha^n + B\beta^n$, gdje su A i B realni parametri. Sada uvrštavanjem $F_0(x) = 0$ i $F_1(x) = 1$ u prethodnu jednakost

dobijemo $A = \frac{1}{\alpha-\beta}$ i $B = -\frac{1}{\alpha-\beta}$, odnosno

$$F_n(x) = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}. \tag{4}$$

Izraz (4) nazivamo **Binetova formula** za Fibonaccijeve polinome. Formulom se pojednostavljuje računanje n-tog Fibonaccijevog polinoma bez računanja prethodnog polinoma. Za $x = 1$, dobiva se Binetova formula za Fibonaccijeve brojeve i ona je oblika (vidjeti [2]):

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

U nastavku ćemo pokazati kako možemo generirati Fibonaccijeve polinome pomoću kvadratne matrice drugoga reda, odnosno $\mathbb{Q}_2$ matrice (vidi [8]).

Teorem 2.1. *Neka je dana matrica*

$$\mathbb{Q}_2 = \begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tada za $n \geq 1$ vrijedi

$$\mathbb{Q}_2^n = \begin{bmatrix} F_{n+1}(x) & F_n(x) \\ F_n(x) & F_{n-1}(x) \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Dokaz. Dokazujemo tvrdnju metodom matematičke indukcije.
Jednakost (5) za $n = 1$ slijedi iz definicije Fibonaccijevih polinoma.
Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za n, odnosno

$$\mathbb{Q}_2^n = \begin{bmatrix} F_{n+1}(x) & F_n(x) \\ F_n(x) & F_{n-1}(x) \end{bmatrix}.$$

Pomoću baze i pretpostavke indukcije, pokažimo da tvrdnja vrijedi za n+1

$$\begin{aligned}
\mathbb{Q}_2^{n+1} &= \mathbb{Q}_2 \cdot \mathbb{Q}_2^n, \\
\mathbb{Q}_2^{n+1} &= \begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_{n+1}(x) & F_n(x) \\ F_n(x) & F_{n-1}(x) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} F_{n+1}(x) \cdot x + F_n(x) & F_n(x) \cdot x + F_{n-1}(x) \\ F_{n+1}(x) & F_n(x) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} F_{n+2}(x) & F_{n+1}(x) \\ F_{n+1}(x) & F_n(x) \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Time smo dokazali da jednakost (5) vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$. □

U nastavku donosimo nekoliko identiteta koji vrijede za Fibonaccijeve polinome (vidi [3]).

Teorem 2.2. *Za bilo koja dva pozitivna cijela broja m i n vrijede sljedeće jednakosti*

$$F_{m+n+1}(x) = F_{m+1}(x)F_{n+1}(x) + F_m(x)F_n(x), \tag{6}$$
$$F_{m+n}(x) = F_{m+1}(x)F_n(x) + F_m(x)F_{n-1}(x), \tag{7}$$
$$F_{m+n}(x) = F_m(x)F_{n+1}(x) + F_{m-1}(x)F_n(x), \tag{8}$$
$$F_{m+n-1}(x) = F_m(x)F_n(x) + F_{m-1}(x)F_{n-1}(x). \tag{9}$$

Dokaz. Dokazat ćemo jednakost (6), jer se preostale jednakosti dokazuju analogno. Desnu stranu jednakosti (6) izrazimo pomoću Binetove formule za Fibonaccijeve polinome (4), potom elementarnim računom dobijemo

$$\begin{aligned}
&F_{m+1}(x)F_{n+1}(x) + F_m(x)F_n(x)\\
&= \frac{\alpha^{m+1} - \beta^{m+1}}{\alpha - \beta} \cdot \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} + \frac{\alpha^m - \beta^m}{\alpha - \beta} \cdot \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\\
&= \frac{(\alpha^{m+1} - \beta^{m+1}) \cdot (\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}) + (\alpha^m - \beta^m) \cdot (\alpha^n - \beta^n)}{(\alpha - \beta)^2}\\
&= \frac{(\alpha^{m+n+2} + \alpha^{m+n} + \beta^{m+n+2} + \beta^{m+n}) - \alpha^m\beta^n(\alpha\beta + 1) - \alpha^n\beta^m(\beta\alpha + 1)}{(\alpha - \beta)^2}.
\end{aligned}$$

Iz kvadratne jednadžbe (3), po Viètеovim formulama, znamo da je

$$\alpha\beta = -1,$$

pa vrijede sljedeće jednakosti

$$\begin{aligned}
F_{m+1}(x)F_{n+1}(x) + F_m(x)F_n(x) &= \frac{\alpha^{m+n+1}\alpha + \alpha^{m+n} + \beta^{m+n+1}\beta + \beta^{m+n}}{(\alpha - \beta)^2}\\
&= \frac{(\alpha^{m+n+1} - \beta^{m+n+1})(\alpha - \beta)}{(\alpha - \beta)^2}\\
&= \frac{\alpha^{m+n+1} - \beta^{m+n+1}}{\alpha - \beta}\\
&= F_{m+n+1}(x).
\end{aligned}$$

Time je jednakost (6) dokazana. □

Napomena 2.1. *Može se pokazati da jednakosti (6), (7), (8) i (9) direktno slijede iz pravila za množenje kvadratnih matrica drugoga reda i jednakosti* $\mathbb{Q}_2^n\mathbb{Q}_2^m = \mathbb{Q}_2^{n+m}$*, pri čemu su matrice* $\mathbb{Q}_2^n$ *i* $\mathbb{Q}_2^m$ *dane u teoremu 2.1.*

3 Lucasovi polinomi

3.1 Lucasov niz

Lucasov niz, iako manje poznat, u uskoj je vezi s Fibonaccijevim nizom te dijeli s njim brojna svojstva.
Beskonačan niz kojeg čine sljedeći brojevi:

$$2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, \ldots$$

nazivamo **Lucasov niz**. Fibonaccijev i Lucasov niz razlikuju se u početnim uvjetima. U nastavku slijedi definicija Lucasovog niza preuzeta iz [2].

Definicija 3.1. *Rekurzivnom relacijom*

$$L_n = L_{n-2} + L_{n-1}, \quad n \geq 2, \tag{10}$$

gdje su $L_0 = 2$ *i* $L_1 = 1$ *početni uvjeti, definiran je* ***Lucasov niz****. Član toga niza* L_n *nazivamo* ***n-ti Lucasov broj****.*

Usporedimo li prvih deset Fibonaccijevih i Lucasovih brojeva, primijetit ćemo da su Lucasovi brojevi veći od odgovarajućih Fibonaccijevih brojeva, a to smo mogli i pretpostaviti da će vrijediti jer je $L_2 > F_2$.

3.2 Lucasovi polinomi

Lucasove brojeve možemo proširiti na Lucasove polinome. Više o Lucasovim polinomima može se naći u [7].

Definicija 3.2. *Rekurzivnom relacijom*

$$L_n(x) = xL_{n-1}(x) + L_{n-2}(x), \quad n \geq 2, \tag{11}$$

gdje su $L_0(x) = 2$ *i* $L_1(x) = x$*, definirani su* ***Lucasovi polinomi****.*

Uočimo, Fibonaccijevi i Lucasovi polinomi definirani su jednakom rekurzivnom relacijom, ali imaju različite početne uvjete.
U slučaju kada imamo negativne indekse vrijedi:

$$L_{-n}(x) = (-1)^n L_n(x).$$

Dokaz te jednakosti možete pronaći u [9, str. 2.].

Primjer 3.1. *Koristeći relaciju (11) napišimo prvih osam Lucasovih polinoma, počevši od L_1, te ih prikažimo grafički.*

i) $L_1(x) = x$

ii) $L_2(x) = x^2 + 2$

iii) $L_3(x) = x^3 + 3x$

iv) $L_4(x) = x^4 + 4x^2 + 2$

v) $L_5(x) = x^5 + 5x^3 + 5x$

vi) $L_6(x) = x^6 + 6x^4 + 9x^2 + 2$

vii) $L_7(x) = x^7 + 7x^5 + 14x^3 + 7x$

viii) $L_8(x) = x^8 + 8x^6 + 20x^4 + 16x^2 + 2.$

Uočimo da je stupanj polinoma $L_n(x)$ jednak n. Na slici 4 možemo pogledati grafički prikaz tih polinoma.
Funkcija izvodnica za Lucasove polinome je dana kao (vidjeti [9, str. 7.]):

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^n = \frac{2 - xt}{1 - xt - t^2}.$$

Binetova formula za Lucasove polinome je oblika (vidjeti [10]):

$$L_n(x) = \alpha^n + \beta^n, \tag{12}$$

pri čemu je

$$\alpha = \frac{x + \sqrt{x^2+4}}{2} \quad \text{i} \quad \beta = \frac{x - \sqrt{x^2+4}}{2}.$$

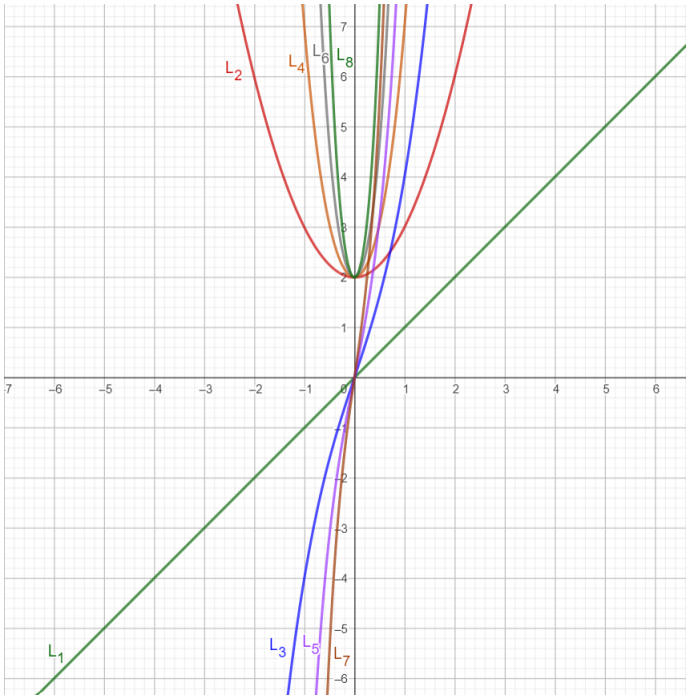
Za $x = 1$, dobit ćemo Binetovu formulu za Lucasove brojeve i ona je oblika

$$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Slično kao Fibonaccijeve, i Lucasove polinome možemo generirati pomoću matrice $\mathbb{Q}_2$. Detaljnije o tome možete pročitati u [8].

Teorem 3.1. *Neka su dane matrice*
Tada za $n \geq 1$ vrijedi jednakost

$$\varphi_{n,2} = \varphi_{n-1,2} \cdot \mathbb{Q}_2 = \begin{bmatrix} L_n(x) & L_{n-1}(x) \\ L_{n-1}(x) & L_{n-2}(x) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{n+1}(x) & L_n(x) \\ L_n(x) & L_{n-1}(x) \end{bmatrix}. \tag{13}$$



Slika 4. Grafički prikaz Lucasovih polinoma $L_n(x)$, za $n = 1, \ldots, 8$.

$$\mathbb{Q}_2 = \begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \varphi_{0,2} = \begin{bmatrix} L_1(x) & L_0(x) \\ L_0(x) & L_{-1}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 2 \\ 2 & -x \end{bmatrix} .$$

Dokaz. Metodom matematičke indukcije pokažimo da vrijedi jednakost (13). Za $n = 1$ imamo

$$\varphi_{1,2} = \varphi_{0,2} \cdot \mathbb{Q}_2 = \begin{bmatrix} x & 2 \\ 2 & -x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2+2 & x \\ x & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_2(x) & L_1(x) \\ L_1(x) & L_0(x) \end{bmatrix} .$$

Sada pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za n, odnosno

$$\varphi_{n,2} = \varphi_{n-1,2} \cdot \mathbb{Q}_2.$$

Primjenom pretpostavke indukcije i definicije Lucasovih polinoma, elemen-

tarnim računom dokažimo istinitost tvrdnje za n+1:

$$\begin{aligned}
\varphi_{n,2}\cdot\mathbb{Q}_2=\varphi_{n-1,2}\cdot\mathbb{Q}_2\cdot\mathbb{Q}_2 &= \begin{bmatrix} L_n(x) & L_{n-1}(x)\\ L_{n-1}(x) & L_{n-2}(x)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix} L_n(x)\cdot x+L_{n-1}(x) & L_n(x)\\ L_{n-1}(x)\cdot x+L_{n-2}(x) & L_{n-1}(x)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix} L_{n+1}(x) & L_n(x)\\ L_n(x) & L_{n-1}(x)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix} L_{n+1}(x)\cdot x+L_n(x) & L_{n+1}(x)\\ L_n(x)\cdot x+L_{n-1}(x) & L_n(x)\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix} L_{n+2}(x) & L_{n+1}(x)\\ L_{n+1}(x) & L_n(x)\end{bmatrix}\\
&= \varphi_{n+1,2}.
\end{aligned}$$

Time je polazna tvrdnja dokazana. □

U nastavku ćemo dokazati identitet iz [10] koji vrijedi za Lucasove polinome.

Teorem 3.2. *Za bilo koja dva pozitivna cijela broja m i n vrijedi*

$$L_m(x)L_n(x)=L_{m+n}(x)+(-1)^nL_{m-n}(x),$$

pri čemu su $L_m(x)$, $L_n(x)$, $L_{m+n}(x)$ i $L_{m-n}(x)$ Lucasovi polinomi.

Dokaz. Iz Binetove formule (12) za Lucasove polinome, primjenom elementarnog računa slijedi

$$\begin{aligned}
L_m(x)L_n(x) &= (\alpha^m+\beta^m)\cdot(\alpha^n+\beta^n)\\
&= \alpha^{m+n}+\beta^{m+n}+\alpha^m\beta^n+\alpha^n\beta^m\\
&= L_{m+n}(x)+(-1)^nL_{m-n}(x).
\end{aligned}$$

4 Povezanost Fibonaccijevih i Lucasovih polinoma

U radu je već uočeno da su Fibonaccijevi i Lucasovi polinomi definirani istom rekurzivnom relacijom te da se razlikuju jedino u početnim uvjetima. Zbog brojnih sličnosti ovih dvaju polinoma, izvedene su i jednakosti koje ih međusobno povezuju. U nastavku rada dokazat ćemo neke od tih jednakosti, preuzete iz izvora [8] i [10].

Teorem 4.1. *Za bilo koji pozitivan cijeli broj n vrijedi*

$$L_n(x) = F_{n-1}(x) + F_{n+1}(x), \tag{14}$$

pri čemu su $L_n(x)$ Lucasovi, a $F_{n-1}(x)$ i $F_{n+1}(x)$ Fibonaccijevi polinomi.

Dokaz. U dokazu teorema koristit ćemo definicije za Fibonaccijeve i Lucasove polinome te metodu matematičke indukcije.
Lako se pokaže da je tvrdnja zadovoljena za $n = 1$.
Pretpostavimo da jednakost vrijedi za n, odnosno

$$L_n(x) = F_{n-1}(x) + F_{n+1}(x).$$

Primjenom pretpostavke indukcije te definicije za Lucasove i Fibonaccijeve polinome, elementarnim računom dokažimo da jednakost vrijedi za n+1:

$$\begin{aligned} L_{n+1}(x) &= x \cdot L_n(x) + L_{n-1}(x) \\ &= x \cdot (F_{n-1}(x) + F_{n+1}(x)) + F_{n-2}(x) + F_n(x) \\ &= (x \cdot F_{n-1}(x) + F_{n-2}(x)) + (x \cdot F_{n+1}(x) + F_n(x)) \\ &= F_n(x) + F_{n+2}(x). \end{aligned}$$

Time je teorem u potpunosti dokazan. □

Teorem 4.2. *Za bilo koja dva pozitivna cijela broja m i n vrijedi*

$$F_m(x)F_n(x) = \frac{1}{x^2+4}(L_{m+n}(x) - (-1)^n L_{m-n}(x)), \tag{15}$$

gdje su $L_{m+n}(x)$ i $L_{m-n}(x)$ Lucasovi, a $F_m(x)$ i $F_n(x)$ Fibonaccijevi polinomi.

Dokaz. Koristeći Binetovu formulu (4) za Fibonaccijeve polinome raspišimo lijevu stranu:

$$\begin{aligned} F_m(x)F_n(x) &= \frac{\alpha^m - \beta^m}{\sqrt{x^2+4}} \cdot \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{x^2+4}} \\ &= \frac{(\alpha^m - \beta^m)(\alpha^n - \beta^n)}{x^2+4} \\ &= \frac{(\alpha^{m+n} + \beta^{m+n} - \alpha^n\beta^m - \alpha^m\beta^n)}{x^2+4} \\ &= \frac{1}{x^2+4}(L_{m+n}(x) - (-1)^n L_{m-n}(x)). \end{aligned}$$

Elementarnim računom pokazali smo da vrijedi jednakost (15). □

Teorem 4.3. *Za bilo koja dva pozitivna cijela broja m i n vrijedi*

$$F_m(x)L_n(x) = F_{m+n}(x) + (-1)^n F_{m-n}(x),$$

pri čemu je $L_n(x)$ Lucasov polinom, a $F_m(x)$, $F_{m+n}(x)$ i $F_{m-n}(x)$ Fibonaccijevi polinomi.

Dokaz. Koristeći Binetove formule (4) i (12) za Fibonaccijeve i Lucasove polinome raspišimo lijevu stranu jednakosti:

$$\begin{aligned} F_m(x)L_n(x) &= \frac{\alpha^m - \beta^m}{\sqrt{x^2+4}} \cdot (\alpha^n + \beta^n) \\ &= \frac{\alpha^{m+n} - \beta^{m+n} + \alpha^m\beta^n - \alpha^n\beta^m}{\sqrt{x^2+4}} \\ &= \frac{\alpha^{m+n} - \beta^{m+n}}{\sqrt{x^2+4}} + \frac{\alpha^m\beta^n - \alpha^n\beta^m}{\sqrt{x^2+4}} \\ &= F_{m+n}(x) + (-1)^n F_{m-n}(x). \end{aligned}$$

Time je teorem dokazan. □

Teorem 4.4. *Za bilo koji pozitivan cijeli broj n, vrijedi sljedeća relacija između Fibonaccijevih i Lucasovih polinoma*

$$F_{2n+1}(x) + F_{2n-1}(x) = L_{2n}(x).$$

Dokaz. Pomoću definicije 2.2 za Fibonaccijeve polinome dobivamo sljedeće jednakosti

$$\begin{aligned} F_{2n+1}(x) &= xF_{2n}(x) + F_{2n-1}(x), \\ F_{2n-1}(x) &= xF_{2n-2}(x) + F_{2n-3}(x). \end{aligned}$$

Ako zbrojimo ta dva izraza i grupiramo članove imamo

$$\begin{aligned} F_{2n+1}(x) + F_{2n-1}(x) &= xF_{2n}(x) + F_{2n-1}(x) + xF_{2n-2}(x) + F_{2n-3}(x) \\ &= F_{2n-1}(x) + F_{2n-3}(x) + x(F_{2n}(x) + F_{2n-2}(x)). \end{aligned}$$

Sada po jednakosti (14) vrijedi

$$F_{2n+1}(x) + F_{2n-1}(x) = L_{2n-2}(x) + xL_{2n-1}(x),$$

pa primjenom definicije 3.2 dobijemo traženu jednakost

$$F_{2n+1}(x) + F_{2n-1}(x) = L_{2n}(x).$$

Teorem 4.5. *Za bilo koji pozitivan cijeli broj n vrijedi sljedeća relacija između Fibonaccijevih i Lucasovih polinoma*

$$F_{2n+2}(x) + F_{2n}(x) = L_{2n+1}(x).$$

Dokaz je analogan dokazu teorema 4.4.

Teorem 4.6. *Za bilo koji pozitivan cijeli broj n vrijedi sljedeća jednakost*

$$L_n(x) = xF_n(x) + 2F_{n-1}(x).$$

Dokaz. Polazeći od desne strane jednakosti primjenom definicije 2.2 i teorema 4.1 dobivamo

$$\begin{aligned} xF_n(x) + 2F_{n-1}(x) &= xF_n(x) + F_{n-1}(x) + F_{n-1}(x) \\ &= F_{n+1}(x) + F_{n-1}(x) \\ &= L_n(x), \end{aligned}$$

čime je teorem dokazan. □

Literatura

[1] B. Bakula, Z. Franušić, *Matrice s Fibonaccijevim brojevima*, Math.e, **26**(1) (2014), 18-30.

[2] N. Elezović, *Diskontna matematika 1*, Element, Zagreb, 2019.

[3] R. Florez, N. McAnally, A. Mukherjee, *Identities for the generalized Fibonacci polynomial*, Integers 18B (2018)

[4] S. Harne, V. H. Badshah, V. Verma, *Fibonacci Polynomial Identities, Binomial coefficients and Pascal's Triangle*, Advances in Applied Science Research, **6**(2) (2015), 103-106.

[5] D. Jukić, R. Scitovski, *Matematika I*, Odjel za matematiku, Osijek, 2017.

[6] K. Kajan, *Fibonaccijevi i Lucasovi polinomi*, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, završni rad, 2025.

[7] A. Nalli, P. Haukkanen, *On generalized Fibonacci and Lucas polynomials*, Chaos, Solitons & Fractals **42**(2009), 3179–3186.

[8] E. Özkan, I. Altun, *Generalized Lucas polynomials and relationships between the Fibonacci polynomials and Lucas polynomials*, Communications in Algebra **47**(10) (2019), 4020-4030.

[9] L. Peliti, *Fibonacci and Lucas numbers*, SMRI, Italy, 2018.

[10] Z. Wu, W. Zhang, *Several identities involving the Fibonacci polynomials and Lucas polynomials*, Journal of Inequalities and Applications **2013**, 205 (2013). https://doi.org/10.1186/1029-242X-2013-205