UDK: [373.3.091.3:514]:311
001.98-057:[37.016:51]
https://doi.org/10.32728/mo.20.1.2025.02
Izvorni znanstveni rad

UČENIČKE MISKONCEPCIJE O KVADRATU I PRAVOKUTNIKU: UČINAK KRATKE NASTAVNE INTERVENCIJE

Ivana Crnčević
OŠ Marina Držića, Croatia
icrnce24@pmfst.hr

SAŽETAK

Cilj rada bio je ispitati najčešće miskoncepcije učenika šestih razreda o kvadratu i pravokutniku te provjeriti učinkovitost kratke nastavne intervencije u njihovu smanjenju. Istraživanje je provedeno na uzorku od 28 učenika primjenom predtest–intervencija–posttest nacrta. Teorijsko uporište rada čini koncept miskoncepcija, odnos konceptualne slike i definicije te Van Hieleova teorija geometrijskoga mišljenja. Rezultati su pokazali statistički značajno poboljšanje ukupnog postignuća učenika nakon intervencije ($Z = –3,07$; $p = ,002$; $r = 0,58$). Najizraženija miskoncepcija odnosila se na nerazumijevanje inkluzivnog odnosa kvadrata i pravokutnika. Zaključno, i kratke, ciljano osmišljene aktivnosti mogu pridonijeti smanjenju pogrešnih predodžbi i razvoju hijerarhijskog razumijevanja geometrijskih pojmova.

Ključne riječi: miskoncepcije; kvadrat; pravokutnik; Van Hieleova teorija; nastava matematike

UVOD

Geometrija zauzima važno mjesto u osnovnoškolskom obrazovanju jer učenicima pruža osnovu za razumijevanje prostora, oblika i njihovih odnosa. Učenici se još u ranoj dobi susreću s geometrijskim oblicima, a njihovo ispravno razumijevanje ključno je za daljnje oblikovanje geometrijskoga mišljenja. Unatoč tome, brojna istraživanja (Bartolini Bussi i Baccaglini-Frank, 2016; Erez i Yerushalmy, 2007; Loc i sur., 2017; Žilková, 2015) govore kako učenici često razvijaju pogrešne predodžbe i miskoncepcije o geometrijskim likovima. Miskoncepcije su stabilna, ali pogrešna shvaćanja učenika o pojmovima. Za razliku od slučajnih pogrešaka, miskoncepcije su otporne na promjene i mogu dugoročno otežavati učenje. Njihov nastanak objašnjava se kombinacijom osobnoga iskustva, oslanjanja na prototipe i načina na koji se nastavni sadržaj predstavlja (Smith i sur., 1993).

Te opće spoznaje o miskoncepcijama potvrđuju se i u području geometrije gdje se posebno ističe odnos kvadrata i pravokutnika. Učenici često kvadrat doživljavaju potpuno odvojeno od pravokutnika (Bartolini Bussi i Baccaglini-Frank, 2016; Loc i sur., 2017; Ponte i sur., 2023). Takvo je shvaćanje u suprotnosti s inkluzivnom definicijom pravokutnika i kvadrata (Bartolini Bussi i Baccaglini-Frank, 2016) prema kojoj je pravokutnik geometrijski lik kojemu su susjedne stranice okomite, a kvadrat je njegov specijalni slučaj u kojem su te susjedne stranice jednake duljine. Istraživanja provedena u različitim obrazovnim sustavima govore o tome kako su ove miskoncepcije raširene i kako ih je teško iskorijeniti bez sustavnih intervencija (Bartolini Bussi i Baccaglini-Frank, 2016; Erez i Yerushalmy, 2007; Loc i sur., 2017; Ponte i sur., 2023; Žilková, 2015).

Još jedan problem proizlazi iz oslanjanja na prototipne prikaze ovih likova. Učenici u nižim razredima pravokutnik definiraju kao lik koji ima dvije duge i dvije kratke stranice, a kvadrat prepoznaju samo ako stoji u standardnom uspravnom položaju (Loc i sur., 2017). Ako se likovi prikažu u nestandardnim položajima, uspješnost prepoznavanja opada. Time se potvrđuje da učenici svoja znanja temelje isključivo na vizualnoj identifikaciji, a ne na definiciji i poznavanju hijerarhije (Bartolini Bussi i Baccaglini-Frank, 2016; Loc i sur., 2017; Ponte i sur., 2023).

Razumijevanje pogrešnih shvaćanja dodatno je moguće objasniti u okviru van Hieleove teorije geometrijskog mišljenja. Prema toj teoriji, pojedinci prolaze 5 razina razumijevanja geometrijskih pojmova: prepoznavanje likova prema njihovu izgledu (vizualizacija), uočavanja svojstava (analiza), razumijevanje

odnosa među svojstvima i klasama likova (neformalna dedukcija) te naposljetku formalnu dedukciju i rigoroznost (Santos i sur., 2022).

Rezultati istraživanja (Žilková, 2015) provedenog u Slovačkoj u razdoblju 2011. – 2013., na uzorku od 159 studenata preddiplomskoga učiteljskog studija razredne nastave, pokazuju da je većina studenata bila je na prvoj Van Hieleovoj razini geometrijskoga razumijevanja dok je samo mali dio studenata bio na drugoj razini apstrakcije i odnosa. U mnogim slučajevima studenti nisu mogli prepoznati geometrijski oblik (posebno ako je prikazan na drugačiji način od standardnoga horizontalno vertikalnoga). Istaknuli su i kako ti rezultati odgovaraju brojnim već provedenim studijama (Žilková, 2015).

Iako rezultati brojnih istraživanja ukazuju na upornost miskoncepcija, postoje i primjeri uspješnih nastavnih intervencija. U istraživanju provedenom u Izraelu (Erez i Yerushalmy, 2007) korišten je alat dinamičke geometrije u kojem učenici mijenjaju izvorni oblik pomicanjem njegovih vrhova i raspravljaju o novodobivenim oblicima (Erez i Yerushalmy, 2007). Zaključili su da učenici teško mijenjaju već oblikovana mišljenja o geometrijskim oblicima, da je učiteljeva uloga ključna u tom procesu te da alat dinamične geometrije može biti pomoć na tom putu. Slično su zaključili Bartolini Bussi i Baccaglini-Frank (2016) u eksperimentu koji je uključivao maloga robota Bee-Bota, kojemu su učenici davali naredbe za kretanje i na taj način otkrivali odnose među oblicima, kutovima i duljinama stranica (Bartolini Bussi i Baccaglini-Frank, 2016). Za učenike nižih razreda uspješnim se pokazalo korištenje različitih didaktičkih materijala uz aktivnosti koje uključuju slobodnu igru i vođene zadatke (Ponte i sur., 2023). Autori su naglasili važnost fizičkih materijala koji omogućuju multisenzorno iskustvo i olakšavaju prijelaz prema apstraktnom mišljenju.

Polazeći od ovih spoznaja, cilj je ovog rada ispitati koje miskoncepcije o kvadratu i pravokutniku imaju učenici šestih razreda osnovne škole te provjeriti može li se intervencijom u obliku istraživačkih i aktivnosti otkrivanja utjecati na njihovo ispravljanje. Rezultati će se usporediti s nalazima postojećih istraživanja i raspraviti u kontekstu nastave matematike u osnovnoj školi.

TEORIJSKI OKVIR

Miskoncepcije u matematici

Tall i Vinner (1981) istaknuli su da učenici često razvijaju vlastitu konceptualnu sliku matematičkoga pojma, koja se može razlikovati od njegove formalne definicije. Slično tome, Smith i suradnici (1993) naglašavaju da učenici

u nastavu ne dolaze bez prethodno oblikovanih ideja, nego svoja nova znanja grade na temelju ranijih iskustava i postojećih shvaćanja. Kada su ta shvaćanja sustavno neusklađena s matematički prihvaćenim značenjem pojma, mogu se razviti miskoncepcije. Miskoncepcije su opisane kao zablude, odnosno pogrešno shvaćanje koje proizvodi sustavni obrazac pogrešaka. One mogu nastati u prethodnom učenju, bilo u učionici ili iz učenikove interakcije s fizičkim i društvenim svijetom. Miskoncepcije u matematici nastaju uglavnom tijekom nastave jer učenici pogrešno generaliziraju prethodno znanje kako bi mogli rješavati nove zadatke (Smith i sur., 1993).

U svom radu, Smith i suradnici (1993) navode primjer u kojem učenici, kako bi razumjeli poredak u decimalnom dijelu decimalnoga broja, primjenjuju prethodno znanje o cijelim brojevima ili razlomcima pa zanemaruju decimalnu točku i zaključuju da je 3.271 veće od 3.4.

Miskoncepcije su u literaturi opisane kao pogrešna, ali često stabilna učenička shvaćanja koja mogu biti otporna na promjene. Za razliku od slučajnih pogrešaka ili trenutnih nagađanja, miskoncepcije se mogu ponavljati u različitim zadatcima i nakon poučavanja, osobito ako učenik nije imao priliku preispitati vlastito razumijevanje pojma (Smith i sur., 1993). U matematici se takve teškoće mogu povezati i s razlikom između konceptualne slike i konceptualne definicije. Učenik može formalno usvojiti definiciju, ali se pri rješavanju zadataka i dalje oslanjati na ranije oblikovanu sliku pojma, osobito ako ta slika nije usklađena s matematičkom definicijom (Tall i Vinner, 1981). Zbog toga miskoncepcije mogu otežavati daljnje učenje i zahtijevaju nastavne aktivnosti koje učenicima omogućuju uspoređivanje, argumentiranje i restrukturiranje postojećih predodžbi.

Miskoncepcije se mogu pojaviti u različitim područjima matematike i prirodnih znanosti, no njihova stabilnost i otpornost na promjene nisu uvijek jednake. Neke se pogrešne predodžbe mogu relativno brzo preoblikovati, dok se druge zadržavaju dulje, osobito ako učenik nema priliku usporediti vlastito shvaćanje s matematički prihvatljivijim objašnjenjem i preispitati razloge zbog kojih je ono neodgovarajuće (Smith i sur., 1993).

S obzirom na sve navedeno, potrebno je razviti adekvatne strategije kojima će se djelovati na postojeće miskoncepcije. Umjesto da se pokušava zamijeniti postojeće miskoncepcije, poželjniji pristup je formiranje alternativnih mehanizama učenja koji uzimaju u obzir složenost učenikovih ideja i istražuju načine kako bi se te ideje procijenile (Smith i sur., 1993).

Iako se miskoncepcije mogu uočiti u gotovo svim područjima matematike, posebno su izražene u geometriji gdje učenici vrlo često razvijaju pogrešna

shvaćanja o četverokutima. Bartolini Bussi i Baccaglini-Frank (2016) ističu kako teškoća imenovanja i klasificiranja geometrijskih likova prema inkluzivnim kriterijima ovisi o različitim razlozima. Jedan od njih je ograničenje svakodnevnoga jezika, pa tako u pojedinim jezicima riječ za kvadrat i za pravokutnik upućuju na potpuno razdvajanje figura u dvije različite klase, kao npr. u engleskom, hrvatskom i talijanskom jeziku. Za razliku od navedenih jezika, u kineskom jeziku naziv za kvadrat nalazi se u riječi pravokutnik pa je učenicima u tim jezicima lakše razumjeti da je kvadrat specijalni slučaj pravokutnika (Bartolini Bussi i Baccaglini-Frank, 2016).

Drugi razlog koji navode Bartolini Bussi i Baccaglini-Frank (2016) nepravilne su prakse u školi koje pojačavaju razdvajanje kvadrata i pravokutnika u dvije različite klase. Iz toga se da zaključiti kako poučavanje treba usmjeriti prema inkluzivnoj definiciji, a autori tvrde da je to moguće činiti još od ranoga djetinjstva.

Konceptualna slika i konceptualna definicija

Za razliku od drugih područja ljudskoga djelovanja, matematika se često smatra područjem velike preciznosti u kojem se pojmovi mogu jednoznačno definirati. Međutim, psihološka je stvarnost složenija jer su mnogi matematički pojmovi učenicima poznati i prije njihova formalnog definiranja. Učenici ih najprije oblikuju kroz iskustvo, promatranje primjera, svakodnevnu uporabu i nastavne situacije, dok se formalne definicije uvode kasnije, u procesu postupne formalizacije matematičkoga znanja.

Tall i Vinner (1981) razlikuju dva važna pojma: konceptualnu definiciju i konceptualnu sliku. Konceptualna definicija odnosi se na formalno, matematički prihvaćeno određenje pojma ili na osobnu verziju definicije koju učenik koristi pri razmišljanju o tom pojmu. Ona može biti naučena napamet, ali može biti i smisleno povezana s razumijevanjem pojma. S druge strane, konceptualna slika obuhvaća sve mentalne predodžbe, primjere, slike, svojstva i iskustva koja pojedinac povezuje s određenim matematičkim pojmom. Drugim riječima, konceptualna definicija pokazuje kako se pojam definira, dok konceptualna slika pokazuje kako ga učenik stvarno zamišlja, prepoznaje i koristi u različitim situacijama.

U kontekstu ovoga istraživanja ta je razlika posebno važna za razumijevanje učeničkih miskoncepcija o kvadratu i pravokutniku. Učenik, primjerice, može znati definiciju pravokutnika kao četverokuta s četirima pravim kutovima, ali njegova konceptualna slika pravokutnika može biti ograničena na lik koji

ima dvije dulje i dvije kraće stranice. Zbog toga može zaključiti da kvadrat nije pravokutnik, iako prema inkluzivnoj definiciji kvadrat jest poseban slučaj pravokutnika. Slično tome, ako je konceptualna slika kvadrata vezana samo uz prototipski prikaz u vodoravno-okomitom položaju, učenik može imati teškoće s prepoznavanjem kvadrata u zarotiranom položaju.

Razlika između konceptualne slike i konceptualne definicije u geometriji može se dodatno objasniti van Hieleovom teorijom geometrijskoga mišljenja. Usiskin (1982) navodi da se na početnoj razini geometrijskoga mišljenja figure prosuđuju prema njihovu izgledu te da učenik pravokutnik prepoznaje prema obliku, pri čemu mu se pravokutnik i kvadrat mogu činiti kao različiti i nepovezani likovi. To pokazuje da učenikova konceptualna slika može biti snažno vezana uz vizualni prototip lika. Tek na višim razinama učenici počinju uočavati svojstva likova i odnose među njima, pa kvadrat mogu prepoznati kao poseban slučaj pravokutnika. Stoga učeničke pogreške u razlikovanju kvadrata i pravokutnika ne treba promatrati samo kao nepoznavanje definicije, nego i kao posljedicu nesklada između formalne definicije i osobne konceptualne slike pojma.

Budući učitelji trebali bi, osim elementarne matematike, poznavati pedagoške i psihološke aspekte kognitivnih procesa djece mlađe školske dobi. Također bi trebali razumjeti kako se kod učenika razvija geometrijsko mišljenje te koje su faze u učenju svojstava jednostavnih geometrijskih oblika (Žilková, 2015).

Van Hieleova teorija geometrijskog mišljenja

Razvoj geometrijskoga mišljenja može se povezati i s van Hieleovom teorijom, prema kojoj učenici u početnim fazama geometrijske pojmove najprije prepoznaju prema njihovu izgledu, a tek kasnije prema svojstvima i odnosima među pojmovima (Usiskin, 1982). Usiskin (1982) ističe važnost van Hieleovih razina za razumijevanje učeničkih postignuća u geometriji. Van Hieleov model opisuje pet razina geometrijskoga mišljenja: vizualizaciju, analizu, neformalnu dedukciju, dedukciju i rigoroznost. Na razini vizualizacije učenik klasificira i identificira figure na temelju njihova izgleda. Učenik na razini analize klasificira oblike na temelju njihovih svojstava. Na sljedećoj razini, učenici prepoznaju bitne atribute i njihov odnos, što im dodatno pomaže u logičkom organiziranju atributa oblika, dok na razini dedukcije stječu sposobnosti logičkoga zaključivanja i deduktivnog dokazivanja teorema. Konačno, na posljednjoj razini strogosti, učenik demonstrira i proučava teoreme u različitim matematičkim sustavima.



Slika 1. Van Hieleove faze planirane poduke

Van Hiele je zastupao mišljenje da napredovanje kroz razine geometrijskoga mišljenja uvelike ovisi o nastavnoj poduci, a ne samo o sazrijevanju učenika. Prema Van Hieleovu modelu, proces učenja koji može potaknuti prijelaz s jedne razine geometrijskoga mišljenja na drugu može se organizirati kroz pet faza (Slika 1): informaciju, vođenu orijentaciju, eksplicitaciju, slobodnu orijentaciju i integraciju. U prvoj fazi, fazi informacije, učitelj uvodi učenike u temu, potiče početno istraživanje i aktivira njihova prethodna znanja. U toj se fazi kroz razgovor s učenicima otkrivaju početne predodžbe, iskustva i način na koji učenici već razumiju određene geometrijske pojmove. U drugoj fazi, fazi vođene orijentacije, učenici rade na strukturiranim i unaprijed pripremljenim aktivnostima koje ih usmjeravaju prema uočavanju važnih svojstava geometrijskih likova. Učitelj pritom postavlja pitanja, usmjerava opažanja te potiče učenike na uspoređivanje primjera i ne-primjera. U trećoj fazi, fazi eksplicitacije, učenici verbaliziraju svoja opažanja, objašnjavaju zaključke te postupno formaliziraju uočena svojstva koristeći odgovarajuću matematičku terminologiju. U četvrtoj fazi, fazi slobodne orijentacije, učenici rješavaju složenije i manje strukturirane zadatke u kojima samostalnije primjenjuju ranije uočena svojstva i razvijaju vlastite strategije rješavanja. U posljednjoj fazi, fazi integracije, učenici povezuju stečena znanja u cjelinu, sažimaju zaključke i oblikuju jasnije razumijevanje odnosa među geometrijskim pojmovima (Santos i sur., 2022).

Mnoge miskoncepcije o kvadratu i pravokutniku mogu se povezati s nižim razinama geometrijskoga mišljenja prema Van Hieleovu modelu. Učenici koji se

nalaze na razini vizualizacije geometrijske likove prepoznaju ponajprije prema njihovu izgledu i uspoređuju ih s prototipnim prikazima. Zbog toga kvadrat mogu prepoznati samo kada je prikazan u standardnom položaju, a pravokutnik povezivati s likom koji ima jednu dulju i jednu kraću stranicu. Takva konceptualna slika otežava prihvaćanje inkluzivnog odnosa prema kojemu je kvadrat poseban slučaj pravokutnika (Loc i sur., 2017; Žilková, 2015).

Na razini analize učenici počinju uočavati svojstva likova, primjerice broj stranica, jednakost stranica, paralelnost i prave kutove. Međutim, samo poznavanje pojedinačnih svojstava ne znači nužno i razumijevanje odnosa među klasama likova. Za razumijevanje tvrdnje da je svaki kvadrat pravokutnik potrebno je prijeći prema razini neformalne dedukcije, na kojoj učenici mogu povezivati svojstva i razumjeti hijerarhijske odnose među geometrijskim pojmovima. U tom se smislu Van Hieleova teorija izravno povezuje s istraživačkim problemom ovoga rada jer objašnjava zašto učenici mogu točno navesti neka svojstva kvadrata i pravokutnika, a ipak ne razumjeti njihov inkluzivni odnos.

Razumijevanje Van Hieleovih razina omogućuje jasniji uvid u miskoncepcije učenika o kvadratu i pravokutniku koje će biti prikazane u sljedećem potpoglavlju.

Tipične miskoncepcije o kvadratu i pravokutniku

Definicije geometrijskih likova važne su za njihovu klasifikaciju prema odabranim svojstvima, ali i za razumijevanje odnosa među pojedinim klasama likova. U različitim obrazovnim sustavima postoje različiti pristupi definiranju i klasificiranju četverokuta, što može utjecati na način na koji učenici razumiju odnose među njima. Žilková (2015) navodi primjer slovačkoga osnovnoškolskog konteksta u kojem se kvadrat i pravokutnik koji nije kvadrat promatraju kao odvojene klase. Kvadrat se definira kao pravilni četverokut, a pravokutnik koji nije kvadrat kao paralelogram kojemu su svi unutarnji kutovi pravi i koji nije kvadrat. Takav pristup može otežati razumijevanje inkluzivnoga odnosa između kvadrata i pravokutnika.

Nasuprot tome, u češkom se kontekstu pravokutnik definira kao paralelogram kojemu su svi kutovi pravi, što omogućuje razumijevanje kvadrata kao posebnoga slučaja pravokutnika. Ovi primjeri pokazuju da način definiranja i klasificiranja četverokuta može utjecati na to hoće li učenici kvadrat i pravokutnik doživjeti kao odvojene klase ili kao hijerarhijski povezane pojmove.

Žilková (2015) provela je istraživanje u Slovačkoj od 2011. do 2013. godine na uzorku od 159 studenata preddiplomskoga učiteljskog studija razredne nastave. U istraživanju je korišten test znanja o četverokutima koji je sadržavao

14 zadataka, od kojih su neki imali više podzadataka, ukupno 32 bodovane čestice. Zadatci su uključivali tekstualne tvrdnje i slikovne prikaze četverokuta, a rezultati su analizirani u okviru Van Hieleove teorije geometrijskoga mišljenja. Autorica zaključuje da se većina ispitanika zadržavala na prvoj Van Hieleovoj razini geometrijskoga razumijevanja, dok je samo manji dio pokazao obilježja više razine, povezane s razumijevanjem odnosa među svojstvima i klasama likova. U mnogim slučajevima studenti nisu mogli prepoznati geometrijski lik ako je bio prikazan u nestandardnom položaju (Žilková, 2015).

Loc i suradnici (2017) proveli su istraživanje u Vijetnamu na uzorku od 186 učenika 3., 4. i 5. razreda osnovne škole. Učenici su rješavali četiri zadatka tipa točno/netočno kojima se ispitivala sposobnost prepoznavanja kvadrata i pravokutnika pri promjeni boje i orijentacije lika, razumijevanje odnosa između kvadrata i pravokutnika te sposobnost analize i sinteze pri prebrojavanju pravokutnika u složenom prikazu. Rezultati su pokazali da su učenici relativno uspješno prepoznavali oblike u cjelini, ali je njihovo prepoznavanje analizom i sintezom bilo ograničeno. Posebno je važan nalaz da je samo 5 % učenika tvrdnju „Kvadrat je pravokutnik" označilo točnom, što upućuje na teškoće u razumijevanju inkluzivnog odnosa između kvadrata i pravokutnika (Loc i sur., 2017).

Slično navode Erez i Yerushalmy (2007) ističući kako se učenici drže svog stečenog geometrijskog znanja unatoč tome što su u alatu dinamične geometrije vizualno vidjeli suprotne činjenice. Navodi primjer dječaka koji se iznenadio kad se kvadrat nije pretvorio u pravokutnik nakon povlačenja njegovih vrhova jer je mislio da ako može pravokutnik pretvoriti u kvadrat da vrijedi i obratno. Činjenica da to nije bilo moguće nije ga navela da promijeni svoje mišljenje. Slično tome, djevojčica je uspjela pretvoriti romb u kvadrat što je bilo u suprotnosti s njezinim razmišljanjima, a nakon daljnje analize i uz vodstvo ispitivača, tvrdila je da romb također može biti kvadrat. Općenito, Erez i Yerushalmy (2007) navode da se učenici drže postojećega znanja i imaju poteškoća s mijenjanjem istoga, pogotovo kad naiđu na neke poteškoće.

Zajednički nalazi istraživanja Žilkové (2015), Loca i suradnika (2017) te Ereza i Yerushalmy (2007) upućuju na to da se teškoće u razumijevanju četverokuta ne odnose samo na nepoznavanje pojedinačnih svojstava, nego i na oslanjanje na ranije oblikovane mentalne slike likova. Kod Žilkové (2015) to se očituje u problemima prepoznavanja likova u nestandardnom položaju, kod Loca i suradnika (2017) u neprihvaćanju tvrdnje da je kvadrat pravokutnik, a kod Ereza i Yerushalmy (2007) u teškoći učenika da promijene početno shvaćanje i nakon rada u alatu dinamičke geometrije. Ovi nalazi pokazuju da je

za razumijevanje kvadrata i pravokutnika potrebno povezivati vizualne prikaze, svojstva likova i hijerarhijske odnose među njima.

Intervencije za prevladavanje miskoncepcija

U literaturi je opisano nekoliko metoda koje su se koristile za prevladavanje miskoncepcija. Tako su Erez i Yerushalmy (2007) koristili alat dinamične geometrije dajući učenicima mogućnost povlačenja vrhova. Učenici su dobili ili unaprijed konstruiran lik ili su lik trebali samostalno konstruirati. Ako je učenik imao unaprijed konstruiran lik, zadatak je bio istražiti njegova svojstva i odnose koji ga određuju. Ako je učenik sam konstruirao lik, povlačenjem vrhova mogao je provjeriti jesu li svojstva lika očuvana. Primjerice, učenici su mogli konstruirati paralelogram tako da konstruiraju parove paralelnih pravaca ili tako da nacrtaju pravce koji samo izgledaju paralelno. U prvom se slučaju povlačenjem vrhova dobivaju novi paralelogrami jer je očuvano svojstvo paralelnosti, dok se u drugom slučaju povlačenjem najčešće gube svojstva paralelograma. U ovom istraživanju sudjelovalo je desetak odabranih odličnih učenika petoga razreda, a unaprijed su bili upoznati s korištenim alatom dinamične geometrije. Zaključili su da je, zbog složenosti kognitivnoga procesa, učenicima bilo teško pratiti koja svojstva povlačenjem vrhova ostaju nepromijenjena. Naime, učenici su više bili fokusirani na vizualnu promjenu. Predlažu da tijekom povlačenja vrhova, elementi koji se povlače ostavljaju tragove, koji bi onda otvorili prostor za diskusiju. Sukladno tome, stavili su tri različita primjera kako bi tragovi izgledali kao i jedan primjer koji predlažu kao praksu u kojem se četverokuti koji imaju isto svojstvo stavljaju u zajedničku skupinu (Erez i Yerushalmy, 2007).

Kako je već navedeno, miskoncepcije su prisutne još od predškolske dobi pa su Bartolini Bussi i Baccaglini-Frank (2016) proveli eksperiment u prvom razredu osnovne škole koristeći maloga robota Bee-Bota koji se kreće po podu pravokutnim putanjama. Tijekom 15 sesija djeca su programirala Bee-Bota da se kreće po pravokutnim stazama. U procesu su se pojavljivali tzv. pivot znakovi – npr. djeca su govorila o „squarized O" kad bi Bee-Bot napravio putanju s četiri prava kuta. Nastavnici su te pivot znakove prihvatili i koristili ih za prijelaz od spontanih dječjih izraza prema matematičkom jeziku i definicijama. Učenici su postupno uočavali da je ključna zajednička osobina pravokutnika i kvadrata postojanje četiriju pravih kutova (a ne samo izgled/prototip) pa je time započelo formiranje inkluzivne definicije pravokutnika koja uključuje kvadrat čime su se razbijale ranije miskoncepcije (Bartolini Bussi i Baccaglini-Frank, 2016).

U prvom razredu osnovne škole eksperiment su proveli i Ponte i suradnici (2023) tijekom dvaju nastavnih sati. Htjeli su ispitati doprinos manipulativnih materijala (fizičkih oblika koje su djeca mogla slagati, rastavljati, rotirati i uspoređivati) u učenju geometrijskih likova. Aktivnosti su uključivale: prepoznavanje i razlikovanje likova, sastavljanje i rastavljanje složenih oblika od osnovnih figura, povezivanje oblika s pričom ("šuma likova"), a naglasak je bio na igri, eksperimentiranju i istraživanju. Učenici su manipulacijom shvatili da kvadrat pripada pravokutnicima, ali obrnuto ne vrijedi te su pokazali bolju sposobnost razlikovanja oblika (npr. razlika između kvadrata i ostalih pravokutnika). Manipulativi su povećali motivaciju i angažman učenika te potaknuli vizualnu percepciju (uočavanje odnosa među oblicima).

Sličan pristup opisali su autori Tampa i suradnici (2024) koji su proveli eksperiment s učenicima sedmoga razreda u Indoneziji. Razvili su didaktički dizajn s aktivnostima koje uključuju slaganje puzzli. Aktivnosti su uključivale i „brainstorming", rasprave u grupi, postavljanje pitanja i vođeno zaključivanje. Intervencija je pokazala smanjenje miskoncepcija učenika (npr. da samo „uspravni" oblici vrijede kao pravokutnici), povećala matematičku kreativnost – učenici su mogli stvoriti veći broj različitih četverokuta kombiniranjem jednostavnih oblika. Osim toga, pokazalo se da učenici nakon intervencije više koriste svojstva (pravokutnost, paralelnost), a ne samo vizualnu sličnost.

Usporedba navedenih intervencija pokazuje da se one razlikuju prema korištenim sredstvima, dobi učenika i trajanju, pa ih nije moguće izravno usporediti u smislu učinkovitosti. Ipak, zajedničko im je to što učenike usmjeravaju od prepoznavanja likova prema njihovu izgledu prema analizi svojstava i odnosima među klasama likova. Dinamička geometrija pritom omogućuje uočavanje svojstava koja se čuvaju pri promjeni oblika, manipulativi i puzzle potiču uspoređivanje, slaganje i rastavljanje likova, a vođena rasprava i uporaba matematičkoga jezika pomažu učenicima u oblikovanju preciznijih definicija. U kontekstu Van Hieleove teorije, takve aktivnosti mogu podupirati prijelaz s razine vizualizacije prema razini analize, a djelomično i prema neformalnoj dedukciji, osobito kada učenici počinju razumijevati hijerarhijske odnose među četverokutima. Za istraživački problem ovoga rada posebno je važno to što sve opisane intervencije pokazuju potrebu da se učenike ne vodi samo prema prepoznavanju kvadrata i pravokutnika, nego prema razumijevanju svojstava na temelju kojih se kvadrat može shvatiti kao poseban slučaj pravokutnika.

METODOLOGIJA

Cilj istraživanja i istraživačka pitanja

Uzorak istraživanja bio je prigodan jer su u istraživanju sudjelovali učenici šestoga razreda kojima je autorica u vrijeme provedbe istraživanja predavala matematiku. Takav je odabir omogućio provedbu predtesta, nastavne intervencije i posttesta u redovnom nastavnom okruženju. Osim praktičnih razloga, izbor učenika šestoga razreda didaktički je opravdan jer su se učenici s pojmovima kvadrata i pravokutnika već susretali u ranijem školovanju, a u šestom se razredu ti pojmovi mogu sustavnije povezivati sa svojstvima likova, poput stranica, kutova i dijagonala. S obzirom na Van Hieleovu teoriju geometrijskoga mišljenja, ova je dob prikladna za ispitivanje prijelaza s vizualnog prepoznavanja likova prema analizi njihovih svojstava i početnom razumijevanju odnosa među klasama geometrijskih likova.

Cilj je istraživanja bio ispitati najčešće miskoncepcije učenika šestoga razreda osnovne škole vezane za kvadrat i pravokutnik te provjeriti u kojoj mjeri kratka nastavna intervencija može pridonijeti smanjenju tih miskoncepcija.

Temeljem navedenih ciljeva postavljaju se sljedeća istraživačka pitanja:

1. Koje su najčešće miskoncepcije učenika šestog razreda o kvadratu i pravokutniku?
2. Postoji li statistički značajna razlika u uspješnosti učenika između predtesta i posttesta nakon provedene nastavne intervencije?
3. U kojoj se mjeri nakon nastavne intervencije mijenja učestalost pojedinih miskoncepcija o kvadratu i pravokutniku?

Struktura istraživanja i sudionici

Istraživanje je provedeno u svibnju 2025. godine tijekom dvaju školskih satova. Predtest, nastavnu intervenciju i posttest provela je autorica rada, koja je ujedno bila predmetna učiteljica matematike učenicima uključenima u istraživanje. Takav način provedbe omogućio je provedbu istraživanja u redovnom nastavnom okruženju, ali se pri tumačenju rezultata uzima u obzir da je autorica bila istodobno u ulozi učiteljice i istraživačice.

Učenici su prije početka obrade nastavne cjeline pisali predtest koji je uključivao najčešće miskoncepcije vezane za kvadrat i pravokutnik. Nakon toga slijedila je obrada nastavne cjeline, s naglaskom na kvadrat i pravokutnik.

Učenici su radili u skupinama, parovima ili individualno, a aktivnosti su bile usmjerene na otkrivanje miskoncepcija te njihovo preispitivanje i razgradnju. Nakon odrađenih aktivnosti učenici su pisali posttest identičan predtestu s ciljem utvrđivanja učinkovitosti intervencije.

Sudionici istraživanja bili su učenici dvaju šestih razreda jedne osnovne škole, ukupno 32 učenika u dobi od 11 do 12 godina. Uzorak je činilo 19 djevojčica i 13 dječaka.

Etičnost i valjanost

Kako bi se osigurala etičnost istraživanja, Etičko povjerenstvo PMF-a i ravnateljica škole dali su pisanu suglasnost za njegovu provedbu, a roditelji učenika potpisali su informirane suglasnosti. Učenici su bili upoznati s time da sudjeluju u istraživanju te da u bilo kojem trenutku mogu odustati od sudjelovanja bez posljedica. Na početku im nije bilo detaljno objašnjeno da se istraživanje provodi radi ispitivanja miskoncepcija o kvadratu i pravokutniku, nego im je predstavljeno kao ispitivanje novih metoda rada u nastavi matematike. Takav je pristup odabran kako bi se smanjila mogućnost Hawthorneova efekta, odnosno promjene ponašanja sudionika zbog same činjenice da znaju da sudjeluju u istraživanju (McCambridge i sur., 2014).

Četvero učenika koji nastavu matematike prate uz individualizirane postupke ili prilagodbe sudjelovalo je u svim nastavnim aktivnostima zajedno s ostalim učenicima, ali njihovi rezultati nisu uključeni u statističku analizu. Stoga je u statističku analizu uključeno 28 učenika. Ta je odluka donesena jer instrument istraživanja nije bio posebno prilagođen njihovim individualnim obrazovnim potrebama, a cilj je bio analizirati rezultate učenika koji su zadatke rješavali prema istim uvjetima. Identitet sudionika bio je zaštićen: rezultati su obrađeni i prikazani anonimno, a datoteke koje su sadržavale imena učenika bile su zaštićene lozinkom i dostupne samo autorici istraživanja. Roditelji i učenici bit će obaviješteni o općim rezultatima istraživanja.

S obzirom na valjanost istraživanja, predtest, nastavna intervencija i posttest provedeni su u istom nastavnom okruženju i prema istom postupku za sve sudionike. Time se nastojalo osigurati ujednačene uvjete provedbe. Ipak, pri tumačenju rezultata treba uzeti u obzir određena metodološka ograničenja: uzorak je bio prigodan i relativno malen, istraživanje nije uključivalo kontrolnu skupinu, a autorica je istodobno bila u ulozi učiteljice i istraživačice. Zbog toga se rezultati ne mogu generalizirati na širu populaciju učenika, nego ih treba

tumačiti kao pokazatelj mogućeg neposrednog učinka provedene nastavne intervencije.

Instrument istraživanja

Test korišten kao instrument u ovom istraživanju oblikovan je po uzoru na instrument koji je u istraživanju miskoncepcija o četverokutima koristila Žilková (2015). Budući da je cilj ovoga istraživanja bio usmjeren na miskoncepcije o kvadratu i pravokutniku, zadatci su prilagođeni tom užem istraživačkom problemu i dobi učenika šestoga razreda. Instrument je uključivao zadatke prepoznavanja kvadrata i pravokutnika u različitim prikazima, zadatke procjene točnosti tvrdnji o njihovim svojstvima te zadatke koji ispituju razumijevanje inkluzivnog odnosa prema kojemu je kvadrat posebna vrsta pravokutnika. Takvim odabirom zadataka nastojala se osigurati sadržajna usklađenost instrumenta s istraživačkim problemom.

Cronbachova alfa za predtest iznosila je .418, što ukazuje na nisku unutarnju konzistenciju. Međutim, s obzirom na mali broj zadataka i činjenicu da pojedine stavke ciljaju različite miskoncepcije, niska pouzdanost bila je očekivana. Instrument je stoga korišten primarno kao dijagnostičko sredstvo za prepoznavanje pojedinih miskoncepcija, a ne kao homogena skala.

Posttest je bio sadržajno jednak predtestu kako bi se omogućila izravna usporedba odgovora učenika prije i nakon nastavne intervencije. Ipak, takav pristup predstavlja metodološko ograničenje jer se ne može u potpunosti isključiti mogućnost efekta ponavljanja, odnosno da su učenici na posttestu neke zadatke ili odgovore prepoznali iz predtesta. Stoga se dobiveni rezultati trebaju tumačiti kao pokazatelj neposrednog pomaka nakon intervencije, uz oprez pri zaključivanju o trajnoj konceptualnoj promjeni.

Test je konstruiran u obliku Google obrasca pod nazivom *Kvadrati i pravokutnici*. Sastojao se od 11 zadataka (20 tvrdnji), a svaki je bio usmjeren na provjeru razumijevanja osnovnih svojstava kvadrata i pravokutnika te na prepoznavanje najčešćih miskoncepcija koje se javljaju kod učenika.

Zadaci su bili različitoga tipa:

- Mreže tvrdnji (Točno/Netočno) – učenici su procjenjivali vrijedi li određena tvrdnja za prikazani oblik (npr. „Kvadrat ima četiri jednake stranice“, „Pravokutnik ima sve stranice jednake“). Ovim se zadacima provjerava prepoznavanje temeljnih svojstava i uočavanje pogrešnih predodžbi.

- Zadaci višestrukoga izbora – učenici su na temelju slike oblika birali između opcija „Ovo je kvadrat“, „Ovo je pravokutnik“ ili „Ovo nije ni kvadrat ni pravokutnik“. Time se ispitivalo razlikovanje kategorija i klasifikacija oblika.
- Zadaci s višestrukim odgovorima– od učenika se tražilo da odaberu sve tvrdnje koje vrijede za kvadrat ili pravokutnik (npr. „Kvadrat ima četiri prava kuta“, „Kvadrat je vrsta pravokutnika“). Odabir netočnih tvrdnji poput tvrdnje „Pravokutnik ima sve stranice jednake“ pokazuje prisutnost miskoncepcija.
- Zadaci tipa Da/Ne/Nisam siguran – primjerice, pitanje „Je li kvadrat vrsta pravokutnika?“ izravno ispituje razumijevanje odnosa između tih dvaju pojmova.
- Zadaci usporedbe – učenici su označavali vrijedi li tvrdnja za oba oblika (npr. „Oba imaju četiri kuta“, „Oba imaju parove paralelnih stranica“) čime se provjerava razlikovanje zajedničkih i različitih svojstava kvadrata i pravokutnika.

Svaka točna tvrdnja nosila je 1 bod, a ukupni rezultat predstavljao je zbroj svih bodova (raspon 0–20). Test je imao dijagnostičku funkciju: netočni odgovori interpretirani su kao pokazatelji specifičnih miskoncepcija, a ukupni je rezultat služio kao mjera općeg razumijevanja odnosa kvadrata i pravokutnika.

Intervencijske aktivnosti

Intervencija je provedena nakon predtesta, tijekom obrade nastavnih sadržaja o kvadratu i pravokutniku. Osmišljena je kao kratka nastavna intervencija usmjerena na prepoznavanje i smanjenje najčešćih miskoncepcija učenika, osobito onih koje se odnose na prototipno prepoznavanje likova i nerazumijevanje inkluzivnog odnosa između kvadrata i pravokutnika (Bojmić i sur., 2014).

Aktivnosti su bile strukturirane u nekoliko međusobno povezanih faza.

U prvoj fazi učenicima su prikazani različiti primjeri i ne-primjeri kvadrata i pravokutnika, uključujući likove u nestandardnim položajima. Pod nestandardnim prikazima likova u ovom se radu podrazumijevaju prikazi kvadrata i pravokutnika koji odstupaju od uobičajenih prototipnih prikaza u udžbenicima i nastavnoj praksi. To uključuje, primjerice, kvadrate prikazane u zakrenutom položaju, pravokutnike različitih orijentacija te likove koji na prvi pogled sliče kvadratu ili pravokutniku, ali ne zadovoljavaju njihova definirajuća svojstva. Takvi su prikazi korišteni kako bi se ispitalo oslanjaju li se učenici na vizualni dojam i prototipni izgled lika ili na njegova svojstva, poput pravih

kutova, jednakosti stranica i paralelnosti. Cilj ove faze bio je potaknuti učenike da preispitaju početno oslanjanje na izgled lika te da uoče kako vizualni dojam nije dovoljan za ispravnu klasifikaciju geometrijskog pojma.

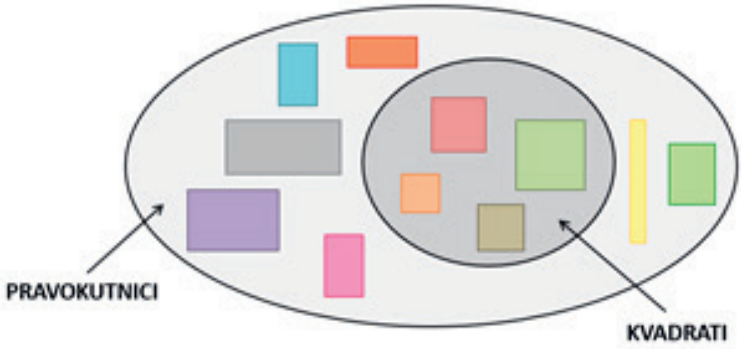
U drugoj fazi učenici su radili u parovima i manjim skupinama te su mjerili duljine stranica zadanih pravokutnika i kvadrata. Na temelju mjerenja i opažanja zapisivali su svojstva svakog lika. Posebna je pozornost bila usmjerena na uočavanje zajedničkih svojstava kvadrata i pravokutnika: četiri prava kuta, dva para paralelnih stranica i jednakost nasuprotnih stranica. Time se učenike usmjeravalo prema analizi svojstava, a ne samo prema prepoznavanju oblika prema njegovu izgledu.

U trećoj fazi provedena je vođena rasprava u kojoj su učenici uspoređivali svojstva kvadrata i pravokutnika. Rasprava je započela pitanjem o kutovima kvadrata, pri čemu su učenici najprije zaključili da kvadrat ima četiri prava kuta te su ga opisali kao četverokut s četirima pravim kutovima i četirima stranicama jednakih duljina. Nakon toga učiteljica je učenike usmjerila pitanjem koji još četverokut ima četiri prava kuta, na što su učenici prepoznali pravokutnik. U daljnjoj raspravi učenici su zaključili da se kvadrat može opisati kao pravokutnik kojemu su sve stranice jednake duljine. Dodatnim pitanjem o tome je li nužno navesti jednakost svih stranica, učenici su, polazeći od svojstva pravokutnika da su mu nasuprotne stranice jednake duljine, zaključili da je dovoljno reći da su susjedne stranice jednake duljine. Završni zaključak rasprave bio je da je kvadrat pravokutnik kojemu su susjedne stranice jednake duljine (Slika 2).

Vođena rasprava:
U(učitelj), S(učenik)
U: Kakvi su kutovi kvadrata?
S: Kvadrat ima sva četiri prava kuta.
Učenici najprije opisuju kvadrat na sljedeći način:
S: Kvadrat je četverokut koji ima 4 prava kuta i 4 stranice jednake duljine.
U: Koji još četverokut ima sva četiri prava kuta?
S: Pravokutnik.
U: Pa kako onda možemo opisati kvadrat?
S: Kvadrat je pravokutnik čije su sve stranice jednake duljine.
U: Moramo li nužno reći da su sve stranice kvadrata jednake duljine?
S: Ne moramo. Zbog paralelnosti nasuprotnih stranica kvadrata dovoljno je reći da su susjedne stranice jednake duljine.
Učenici zaključuju: Kvadrat je pravokutnik čije su susjedne stranice jednake duljine.

Slika 2. Vođena rasprava

Nakon vođene rasprave učenici su izrađivali Vennov dijagram kako bi vizualno prikazali zaključak do kojega su došli tijekom aktivnosti. Učiteljica ih je pitanjima usmjerila na ideju da pravokutnici čine širu skupinu likova, a da su kvadrati dio te skupine jer zadovoljavaju sva svojstva pravokutnika, uz dodatno svojstvo jednakosti susjednih stranica. Učenici su zatim prikazali pravokutnike kao veći skup, a kvadrate kao njegov podskup. Dijagram je služio kao završna aktivnost povezivanja prethodnih opažanja, mjerenja i rasprave s inkluzivnom definicijom kvadrata kao posebne vrste pravokutnika (Slika 3) (Bojmić i sur., 2014).



Slika 3. Vennov dijagram

Intervencija je teorijski utemeljena u Van Hieleovoj teoriji geometrijskog mišljenja. Polazilo se od pretpostavke da dio učenika kvadrat i pravokutnik prepoznaje na razini vizualizacije, odnosno prema prototipnom izgledu lika. Aktivnosti mjerenja, uspoređivanja svojstava, vođene rasprave i izrade Vennova dijagrama bile su usmjerene na poticanje prijelaza prema razini analize, na kojoj učenici likove klasificiraju prema njihovim svojstvima.

Završni zaključak o kvadratu kao posebnoj vrsti pravokutnika predstavlja početak razumijevanja odnosa među klasama geometrijskih likova, što odgovara višim razinama geometrijskog mišljenja prema Van Hieleovu modelu.

Na taj način intervencija nije bila usmjerena samo na usvajanje formalne definicije, nego na postupno restrukturiranje učeničke konceptualne slike kvadrata i pravokutnika. Učenici su kroz aktivnosti trebali uočiti da matematička klasifikacija ne ovisi o položaju ili prototipnom izgledu lika, nego o svojstvima koja lik zadovoljava.

REZULTATI ISTRAŽIVANJA

Prikupljeni podaci obrađeni su pomoću programskoga paketa za statističku obradu podataka SPSS (Statistical Package for Social Science; SPSS 23, IBM).

Deskriptivna statistika

U ovom dijelu prikazani su osnovni deskriptivni pokazatelji ukupnoga rezultata učenika na predtestu i posttestu (Tablica 1). Ukupni rezultat predstavlja zbroj bodova na testu pri čemu je maksimalan broj mogućih bodova bio 20. Rezultati su izračunati na uzorku od 28 učenika.

Tablica 1. Deskriptivna statistika

Komponenta	N	M	SD	Min	Max	Medijan	IQR
Predtest *Kvadrati i pravokutnici*	28	15,54	2,285	11	20	15,50	3
Posttest *Kvadrati i pravokutnici*	28	17,14	2,050	13	20	18,00	3

Deskriptivni pokazatelji prikazani u Tablici 1 upućuju na pomak rezultata prema višim vrijednostima nakon provedene nastavne intervencije. Učenici su na posttestu u prosjeku ostvarili bolje rezultate nego na predtestu, a porast medijana dodatno pokazuje da se poboljšanje ne odnosi samo na pojedine učenike, nego na skupinu u cjelini. Raspon rezultata na posttestu također pokazuje da nakon intervencije nije bilo učenika s izrazito niskim rezultatom kao na predtestu. Sličan interkvartilni raspon u oba mjerenja upućuje na to da je raspršenost rezultata ostala razmjerno ujednačena, ali se cijela raspodjela pomaknula prema boljim postignućima.

Ukupno gledano, deskriptivni podatci sugeriraju neposredno poboljšanje u razumijevanju kvadrata i pravokutnika nakon provedene intervencije. Taj je nalaz dodatno provjeren inferencijalnom analizom prikazanom u nastavku.

Najčešće miskoncepcije na predtestu

Analizom predtesta dobiven je uvid u najčešće miskoncepcije vezane za kvadrat i pravokutnik. Rezultati pokazuju da su učenici većinu testa riješili uspješno, ali postotci točnosti pojedinih tvrdnji govore u prilog postojanju raširenih pogrešnih uvjerenja.

Tablica 2. Najčešće miskoncepcije

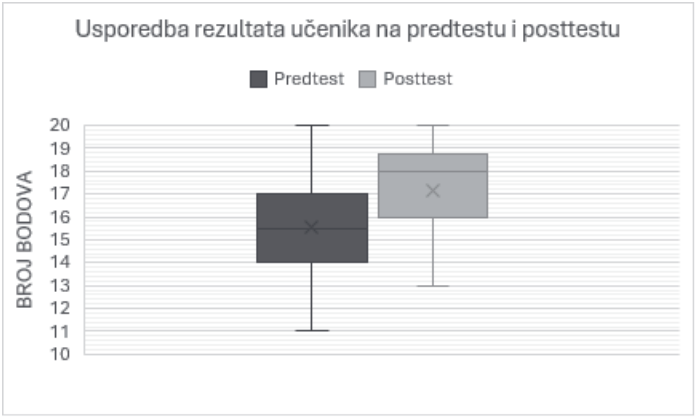
Broj zadatka	Tvrdnja	Netočni odgovori (%)
4	• Ovo je kvadrat • Ovo je pravokutnik • Ovo nije ni kvadrat ni pravokutnik. 	43 %
6	• Ovo je kvadrat • Ovo je pravokutnik • Ovo nije ni kvadrat ni pravokutnik. 	39 %
7c	Kvadrat je vrsta pravokutnika.	50 %
8	Je li kvadrat vrsta pravokutnika? • Da • Ne • Nisam siguran/na	57 %
9	Koja od sljedećih tvrdnji je TOČNA? • Svaki kvadrat je pravokutnik • Svaki pravokutnik je kvadrat. • Kvadrati i pravokutnici nemaju ništa zajedničko.	43%
11d	Kvadrat ima dva para paralelnih stranica.	39 %

Iz tablice (Tablica 2) je vidljivo da se najčešća miskoncepcija odnosi na razumijevanje odnosa između pravokutnika i kvadrata, što je u skladu s nalazima u literaturi (Bartolini Bussi i Baccaglini-Frank, 2016; Loc i sur., 2017; Ponte i sur., 2023; Tampa i sur., 2024).

Promjena u ukupnom rezultatu

Budući da se radi o povezanim uzorcima i relativno malom broju sudionika, za usporedbu ukupnoga postignuća učenika na predtestu i posttestu korišten je neparametrijski Wilcoxonov test predznaka i rangova. Odabir neparametrijskog testa bio je prikladan jer se kod malih uzoraka ne može pouzdano pretpostaviti normalna distribucija razlika između dvaju mjerenja. Medijan ukupnog rezultata na predtestu iznosio je 15,5 bodova, dok je na posttestu porastao na 18 bodova. Aritmetička sredina porasla je s M = 15,54 (SD = 2,29) na M = 17,14 (SD = 2,05). Test je pokazao da je razlika između ukupnog rezultata učenika na predtestu i posttestu statistički značajna, Z = –3,07; p = ,002. Veličina učinka izračunata je prema formuli te je iznosila $r = 0{,}58$, što se prema Cohenovim smjernicama interpretira kao velik učinak (Cohen, 1988). Ovi rezultati upućuju na pozitivan pomak u ukupnom postignuću učenika nakon provedene nastavne intervencije.

Ipak, s obzirom na relativno malen uzorak rezultate treba tumačiti oprezno. Stoga se dobiveni nalaz može promatrati kao pokazatelj mogućeg neposrednog učinka intervencije na ukupno razumijevanje kvadrata i pravokutnika, a ne kao konačan dokaz trajne konceptualne promjene (Grafikon 1).



Grafikon 1. Usporedba rezultata učenika

Promjene na pojedinim pitanjima

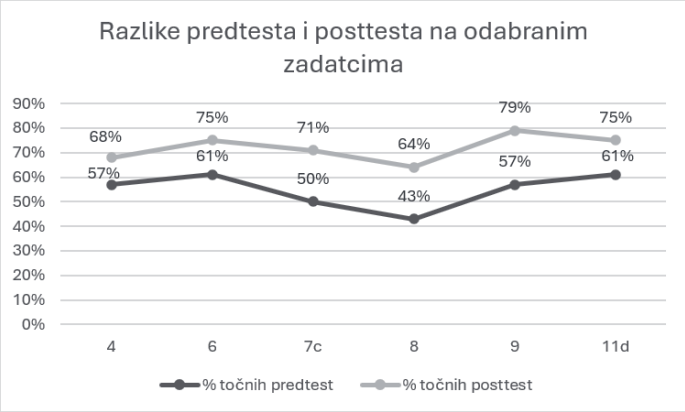
Za detaljniju analizu promjena korišten je McNemarov test koji uspoređuje proporciju točnih i netočnih odgovora na pojedinim zadacima u predtestu i posttestu. Budući da su odgovori učenika na pojedinim tvrdnjama kodirani kao točni ili netočni, McNemarov test bio je prikladan za usporedbu promjena u dvama povezanim mjerenjima (Tablica 3).

Tablica 3. Rezultati McNemarovoga testa

Broj zadatka	% točnih predtest	% točnih posttest	McNemar p
4	57 %	68 %	,375
6	61 %	75 %	,344
7c	50 %	71 %	,180
8	43 %	64 %	,109
9	57 %	79 %	,146
11d	61 %	75 %	,145

Rezultati pokazuju da se u većini zadataka nije pojavila statistički značajna promjena.

U zadatcima koji su na predtestu pokazali najčešće miskoncepcije, vidljiv je pozitivan pomak, no razlika nije dosegla razinu statističke značajnosti (Grafikon 2).



Grafikon 2. Razlike predtesta i posttesta na odabranim zadatcima

DISKUSIJA

Rezultati istraživanja upućuju na pozitivan pomak u razumijevanju odnosa između kvadrata i pravokutnika nakon provedene nastavne intervencije. Pomak ukupnih rezultata prema višim vrijednostima sugerira da su učenici nakon intervencije u većoj mjeri prepoznavali svojstva kvadrata i pravokutnika te njihov međusobni odnos.

Najizraženije teškoće odnosile su se na razumijevanje inkluzivnog odnosa između kvadrata i pravokutnika. To pokazuje da dio učenika kvadrat i pravokutnik ne promatra hijerarhijski, nego kao dvije odvojene kategorije. Takvo shvaćanje može se povezati s prototipnim predodžbama, prema kojima se pravokutnik najčešće zamišlja kao lik s jednom duljom i jednom kraćom stranicom, dok se kvadrat promatra kao zaseban lik. Ovakvi nalazi u skladu su s prethodnim istraživanjima (Bartolini Bussi i Baccaglini-Frank, 2016; Erez i Yerushalmy, 2007; Loc i sur., 2017; Ponte i sur., 2023; Žilková, 2015) koja upozoravaju na stabilnost prototipnih predodžbi i teškoće u prihvaćanju inkluzivnih definicija.

Pozitivni pomaci na posttestu pokazuju da su učenici nakon intervencije češće prepoznavali tvrdnju da je kvadrat vrsta pravokutnika te su bolje uočavali zajednička svojstva tih likova. Ipak, budući da promjene na većini pojedinačnih zadataka nisu dosegnule razinu statističke značajnosti, te nalaze treba tumačiti

oprezno. Oni ne pokazuju potpuno uklanjanje miskoncepcija, nego mogući početni pomak prema hijerarhijskom razumijevanju geometrijskih pojmova.

S obzirom na mali uzorak, kratko trajanje intervencije i izostanak kontrolne skupine, rezultate nije moguće pouzdano pripisati isključivo nastavnoj intervenciji. Stoga ih je primjerenije tumačiti kao pokazatelj mogućega pozitivnog utjecaja ciljano oblikovanih aktivnosti, a ne kao dokaz trajne konceptualne promjene. Unatoč tome, nalazi upućuju na didaktičku vrijednost aktivnosti koje učenike usmjeravaju s vizualnog prepoznavanja likova prema analizi svojstava i razumijevanju odnosa među klasama likova.

Zaključak

Provedeno istraživanje pokazalo je da su najčešće miskoncepcije učenika šestoga razreda povezane s nerazumijevanjem inkluzivnoga odnosa kvadrata i pravokutnika te s oslanjanjem na prototipne prikaze geometrijskih likova. Učenici su osobito teško prihvaćali tvrdnju da je kvadrat posebna vrsta pravokutnika, što upućuje na nesklad između formalne definicije i njihove konceptualne slike pojma.

Nakon kratke nastavne intervencije zabilježen je statistički značajan porast ukupnoga rezultata učenika na posttestu. Iako se ne može govoriti o potpunom uklanjanju miskoncepcija, dobiveni rezultati upućuju na to da ciljano osmišljene aktivnosti mogu potaknuti početno restrukturiranje učeničkih predodžbi. Posebno se korisnima pokazuju aktivnosti koje učenike usmjeravaju od vizualnoga prepoznavanja prema analizi svojstava i razumijevanju odnosa među klasama likova.

Rezultate treba tumačiti oprezno zbog maloga prigodnog uzorka, izostanka kontrolne skupine i kratkoga trajanja intervencije. Buduća istraživanja mogla bi uključiti veći uzorak, kontrolnu skupinu i odgođeni posttest kako bi se provjerilo zadržavaju li se uočeni pomaci tijekom duljega razdoblja.

LITERATURA

1. Bartolini Bussi, M. G., & Baccaglini-Frank, A. (2016). Using pivot signs to reach an inclusive definition of squares and rectangles. U K. Krainer i N. Vondrová (ur.), *Proceedings of the 9th Congress of European Research in Mathematics Education (CERME 9)* (pp. 1891–1897). Charles University in Prague, Faculty of Education.
2. 2. Bojmić, D., Đukić, M., Kralj, T., Vrančić, K., & Čičak, M. (2014). *Četverokuti. Mnogokuti. Vektori* [Neobjavljeni seminarski rad iz kolegija Metodika nastave matematike 4]. Prirodoslovno-matematički fakultet Sveučilišta u Zagrebu.
3. Cohen, J. (1988). Statistical power analysis for the behavioral sciences (2nd ed.). Lawrence Erlbaum Associates.
4. Erez, M. M., & Yerushalmy, M. (2007). "*If You Can Turn a Rectangle into a Square,* You Can Turn a Square into a Rectangle ..." Young Students Experience the Dragging Tool. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *11*(3), 271–299. https://doi.org/10.1007/s10758-006-9106-7
5. Loc, N. P., Tong, D. H., & Hai, N. T. B. (2017). The investigation of primary school students' ability to identify quadrilaterals: A case of rectangle and square. *The International Journal of Engineering and Science, 6*(3), 93–99. https://doi.org/10.9790/1813-0603019399
6. McCambridge, J., Witton, J., & Elbourne, D. R. (2014). Systematic review of the Hawthorne effect: New concepts are needed to study research participation effects. Journal of Clinical Epidemiology, 67(3), 267–277. https://doi.org/10.1016/j.jclinepi.2013.08.015
7. Ponte, R., Viseu, F., Neto, T. B., & Aires, A. P. (2023). Revisiting manipulatives in the learning of geometric figures. *Frontiers in Education*, *8*, 1217680. https://doi.org/10.3389/feduc.2023.1217680
8. Santos, M. S. M. D., Sobretodo, M. L., & Hortillosa, A. D. (2022). The Van Hiele Model in Teaching Geometry. *World Journal of Vocational Education and Training*, *4*(1), 10–22. https://doi.org/10.18488/119.v4i1.3087
9. Smith, J. P., diSessa, A. A., & Roschelle, J. (1993). Misconceptions reconceived: A constructivist analysis of knowledge in transition. *The Journal of the Learning Sciences, 3*(2), 115–163. https://doi.org/10.1207/s15327809jls0302_1
10. Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(2), 151–169. https://doi.org/10.1007/BF00305619
11. Tampa, A., Ja'faruddin, & Firdaus, A. M. (2024). Manipulative interactive didactics with puzzles: An effective solution for overcoming junior high school students' learning obstacles to quadrilateral materials. *International Journal of Education and Practice*, *13*(1), 210–229. https://doi.org/10.18488/61.v13i1.3992
12. Usiskin, Z. (1982). Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry: CDASSG Project. Department of Education, University of Chicago.
13. Žilková, K. (2015). Misconceptions in Pre-service Primary Education Teachers about Quadrilaterals. *Journal of Education, Psychology and Social Sciences, 3(1), 30–37.*

STUDENTS' MISCONCEPTIONS ABOUT SQUARES AND RECTANGLES: THE EFFECT OF A SHORT TEACHING INTERVENTION

The aim of this study was to examine the most common misconceptions of sixth-grade students regarding squares and rectangles and to evaluate the effectiveness of a short instructional intervention in reducing them. The research was conducted on a sample of 28 students using a pre-test–intervention–post-test design. The theoretical framework of the study is based on the concept of misconceptions, the relationship between concept image and concept definition, and the Van Hiele theory of geometric thinking. The results showed a statistically significant improvement in students' overall achievement after the intervention ($Z = –3.07$; $p = .002$; $r = 0.58$). The most pronounced misconception concerned the misunderstanding of the inclusive relationship between the square and the rectangle. In conclusion, even short, carefully designed activities can contribute to reducing misconceptions and fostering the hierarchical understanding of geometric concepts.

Keywords: misconceptions; square; rectangle; Van Hiele theory; mathematics teaching