UDK: 001.98-057:[373.3.091.3:51]
373.3.091.3:511.12
37.016:51
https://doi.org/10.32728/mo.20.1.2025.03
Izvorni znanstveni rad

UČINAK KRATKE INTERVENCIJE NA MISKONCEPCIJE UČENIKA PRI UČENJU I RAČUNANJU S CIJELIM BROJEVIMA

Marjana Kuliš
Veleučilište Velika Gorica, Croatia
marjana.kulis@vvg.hr

SAŽETAK

Ovo istraživanje ispituje razinu razumijevanja učenika pri radu s cijelim brojevima te učinak kratke ciljane didaktičke intervencije usmjerene na otklanjanje miskoncepcija i na poboljšanje konceptualnog razumijevanja. Provedeno je na uzorku od 55 učenika sedmog razreda četiri mjeseca nakon formalnog poučavanja. Rezultati pokazuju da učenici pojmovne elemente zadržavaju teže od proceduralnih znanja. Poteškoće su zabilježene u zadatcima s apsolutnom vrijednosti, određivanjem prethodnika i sljedbenika na negativnom dijelu pravca, razlikovanjem unarnog minusa od oduzimanja te u prevođenju tekstualnih zadataka u matematičke izraze. Zabilježene miskoncepcije imaju tendenciju održavanja i multipliciranja u složenijim matematičkim situacijama, stoga rezultati sugeriraju potrebu za daljnjim sustavnim istraživanjima i razvojem didaktičkih intervencija usmjerenih na konceptualnu promjenu te razumijevanje poteškoća koje učenici imaju u prijelazu od aritmetičkog prema algebarskom mišljenju.

Ključne riječi: miskoncepcije, cijeli brojevi, apsolutna vrijednost, predznak broja, didaktička intervencija

UVOD

S cijelim brojevima, s predznakom broja i s pojmom apsolutne vrijednosti učenici se u hrvatskom obrazovnom sustavu po prvi puta susreću u šestom razredu osnovne škole. Cijeli brojevi predstavljaju jednu od temeljnih, ali i konceptualno najzahtjevnijih cjelina u matematičkom obrazovanju. Unatoč ranom uvođenju negativnih brojeva, razumijevanje njihovih ključnih svojstava često ostaje nestabilno i nakon poučavanja (Gallardo, 2008; Vlassis, 2004). Poteškoće u ovom području ne odnose se isključivo na aritmetiku, već imaju dugoročne posljedice za razumijevanje racionalnih brojeva, rješavanje linearnih jednadžbi i razvoj algebarskog mišljenja (Vlassis i Demonty, 2022).

Razvoj stabilnih pojmovnih struktura vezanih za ovu nastavnu cjelinu predstavlja temelj i presudan je za cjelokupnu kasniju matematičku pismenost (Bofferding i Wessman-Enzinger, 2017). Učenici nerijetko apsolutnu vrijednost shvaćaju instrumentalno, kao tehnički postupak za „uklanjanje minusa", bez razumijevanja njezina konceptualnog značenja kao udaljenosti broja od nule (Vlassis, 2004; Vlassis i Demonty, 2022). Upravo ta nepovezanost temeljnih pojmova smatra se jednim od glavnih uzroka trajnih teškoća u učenju matematike na višim razinama obrazovanja (Gallardo, 2008). Novija istraživanja dodatno potvrđuju da bez jasne integracije predznaka, apsolutne vrijednosti i poretka brojeva učenici teško razvijaju dugoročno stabilno razumijevanje cijelih brojeva (Acosta i Soliba, 2024; Vlassis i Demonty, 2022). Bez stabilnog konceptualnog razumijevanja tih pojmova teško je izgraditi sigurnost proceduralnih znanja (Makonye i Fakude, 2016; Mohyuddin i Khalil, 2016; Rittle-Johnson i Schneider, 2015) u računanju s cijelim brojevima ili kasnije s racionalnim brojevima, rješavanju linearnih jednadžbi te prepoznati algebru kao generalizaciju aritmetike. U tom se kontekstu javlja potreba za istraživanjima koja se ne usmjeravaju isključivo na trenutačnu uspješnost učenika, već i na razinu zadržanog znanja te učinkovitost ciljano osmišljenih didaktičkih intervencija (Schoenherr i sur., 2024).

Učenje cijelih brojeva često zahtijeva dubinsku konceptualnu promjenu jer se nova znanja moraju integrirati u postojeće mentalne strukture oblikovane kroz iskustvo s prirodnim brojevima (Bofferding i Wessman-Enzinger, 2017). Miskoncepcije predstavljaju koherentne, ali pogrešne mentalne modele koje učenici aktivno konstruiraju i koriste za tumačenje novih iskustava. One mogu ometati učenje jer učenici postojeće koncepcije koriste kao okvir za tumačenje novih iskustava (Posner i sur., 1982).

Analiza učeničkih pogrešaka ključan je alat u procesu konceptualne promjene jer otkriva načine razmišljanja i logiku na koju se učenici oslanjaju, a koja može biti u suprotnosti s matematičkim konceptima (Bofferding, 2014; Makonye i Fakude, 2016). Kada postoje miskoncepcije u vezi s preduvjetnim konceptima (što je cijeli broj, kako čitati predznak, što doista znači apsolutna vrijednost), usvajanje novih sadržaja postaje otežano (Makonye i Fakude, 2016) jer nova pravila mogu ući u konflikt s postojećim usvojenim „pravilima" učenika, što dovodi do povećanog broja pogrešaka i osjećaja frustracije (Posner i sur., 1982; Vosniadou, 2013).

Polazeći od navedenih teorijskih i empirijskih spoznaja, ovo preliminarno istraživanje predstavlja inicijalni korak u širem istraživanju retencije znanja i učinkovitosti didaktičkih intervencija u području cijelih brojeva (Rittle-Johnson i Schneider, 2015). Istraživanje analizira retenciju znanja o cijelim brojevima nakon proteka četiriju mjeseca od pisanog ispita znanja i ispituje učinak didaktičke intervencije na konceptualno razumijevanje. Nalazi ovog preliminarnog istraživanja služe kao temelj za izgradnju opsežnijeg, sustavnijeg istraživanja te kao smjernica za razvoj učinkovitijih pristupa poučavanju ove kompleksne i konceptualno zahtjevne cjeline. Cijeli brojevi stoga nisu samo jedna od nastavnih cjelina, nego su osnova za razumijevanje brojnih matematičkih koncepata koji slijede u obrazovanju. Stoga, pravodobno prepoznavanje i ispravljanje miskoncepcija nije samo korektivna mjera, nego strateški pristup razvoju matematičke pismenosti.

POGREŠKE, MISKONCEPCIJE I KONCEPTUALNI IZAZOVI U UČENJU CIJELIH BROJEVA

Istraživanja o usvajanju nastavnih sadržaja i računanja s cijelim brojevima dosljedno ukazuju na to da učenici često postižu slabija postignuća u ovom području, što se kasnije odražava i na uspješnost u drugim cjelinama matematičkog obrazovanja te u područjima poput fizike, kemije, računovodstva i financijske pismenosti (Makonye i Fakude, 2016; Owusu i sur., 2023; Rittle-Johnson i Schneider, 2015; Vlassis i Demonty, 2022; Young i Booth, 2020). U navedenim se istraživanjima naglašava da razumijevanje broja s predznakom i smisla operacija s takvim brojevima nije samo aritmetička vještina, nego konceptualni prijelaz prema apstraktnijim matematičkim strukturama koje čine nužan temelj za algebru i daljnje matematičko učenje.

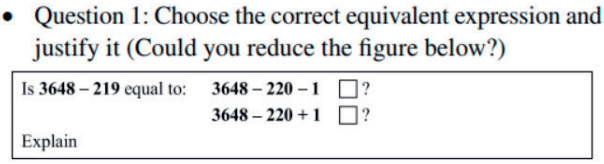
Cijeli brojevi predstavljaju jedno od najzahtjevnijih konceptualnih područja u razvoju matematičkog mišljenja jer uvode brojeve koji nisu ukorijenjeni

u svakodnevnom iskustvu brojanja. Oni zahtijevaju apstraktnije mentalne reprezentacije i razumijevanje odnosa među brojevima pa se tako javljaju potpuno novi zahtjevi u pogledu razumijevanja značenja predznaka, odnosa među brojevima i operacija (Gallardo, 2008; Vlassis, 2004; Young i Booth, 2020). Predznak cijelog broja daje informaciju o smjeru broja, to jest nalazi li se taj broj ispod ili iznad nule, odnosno lijevo ili desno od nule, te se tako cijeli brojevi često nazivaju usmjerenim brojevima (Gallardo, 2008; Vlassis, 2004). Pozitivni cijeli brojevi često su povezani s konkretnim iskustvom brojanja pa učenici lako usvajaju kardinalno načelo brojeći stvarne objekte, dok negativni cijeli brojevi nemaju usporediv perceptivni oslonac i stoga zahtijevaju apstraktniju, konceptualno bogatiju interpretaciju i razvoj novih mentalnih modela (Sfard, 2008; Young i Booth, 2020). Učenici nova znanja o cijelim brojevima često interpretiraju oslanjajući se na pravila usvojena u radu s prirodnim brojevima, što dovodi do pogrešnih generalizacija i trajnih miskoncepcija (Bofferding, 2014; Gallardo, 2008; Makonye i Fakude, 2016; Mohyuddin i Khalil, 2016).

Znanstvena istraživanja koja analiziraju učeničke pogreške upućuju na to da učenici često miješaju pravila, oslanjaju se na površno proceduralno znanje i prenose obrasce iz prirodnih brojeva, što može rezultirati pogreškama kao što su „dva minusa daju plus“ ili neispravno uspoređivanje negativnih brojeva (Khalid i Embong, 2020b; Makonye i Fakude, 2016). Takve pogrešne generalizacije dovode do trajnih poteškoća, osobito pri oduzimanju koje uključuje negativne brojeve (Bofferding i Wessman-Enzinger, 2017). Poteškoće u radu s negativnim brojevima i apsolutnim vrijednostima perzistentne su i ne odnose se samo na učenike mlađe dobi, već zahvaćaju i više razine obrazovanja, uključujući buduće učitelje matematike na način da su skloni proceduralnom, ali ne i konceptualnom razumijevanju cijelih brojeva, što otežava stabilno usvajanje novih operacija i dovodi do poteškoća i nekonzistentnih rješenja u novim kontekstima te prevođenju verbalnih uputa u matematički izraz (Owusu i sur., 2023; Steiner, 2009).

U istraživanju provedenom među učenicima šestog razreda u Luksemburgu koji još nisu imali formalnu nastavu o negativnim brojevima pokazalo se da učenici mogu intuitivno prihvatiti mogućnost negativnog rezultata, ali im izvođenje operacija s negativnim brojevima predstavlja značajne poteškoće (Vlassis i Demonty, 2022). U tom su istraživanju učenici rješavali dva tipa zadataka; zadatke zbrajanja i oduzimanja s negativnim brojevima u formi jednostavnih izraza poput $a \pm b = c$ te zadatke s prirodnim brojevima kod kojih se mogla primijeniti strategija kompenzacije u oduzimanju (Slika 1). Takve aktivnosti, iako izvorno namijenjene prirodnim brojevima, mogu pripremiti

učenike za kasniji rad s negativnim brojevima i smanjiti učestalost pogrešaka, neovisno o činjenici što rezultati pokazuju da samo manji broj učenika spontano primjenjuje holistički pristup izrazu u kojem se svi brojevi promatraju zajedno sa svojim predznacima (Vlassis, 2004).



Slika 1. Primjer zadatka za ispitivanje konceptualne fleksibilnosti u oduzimanju cijelih brojeva (preuzeto iz Vlassis i Demonty, 2022)

Ovakve poteškoće i obrasci učenja dobro se objašnjavaju u okviru relacijskog i instrumentalnog razumijevanja (Skemp, 1976) te teorije konceptualne promjene, prema kojoj mehaničko korištenje pravila bez konceptualne podloge dovodi do konfliktnih koncepcija i nestabilnog razumijevanja (Posner i sur., 1982; Vosniadou, 2013). Drugim riječima, uspješno učenje zahtijeva restrukturiranje postojećih mentalnih modela, a ne puko dodavanje novih informacija (Posner i sur., 1982).

Kod instrumentalnog razumijevanja učenici tretiraju računanje s cijelim brojevima kao niz mehaničkih koraka ili „matematičkih recepata", što može rezultirati točnim odgovorima u jednostavnijim situacijama, ali često dovodi do pogrešaka u novim ili složenijim zadatcima (Bofferding, 2014). Istraživanja pokazuju da proceduralna znanja o cijelim brojevima često nastaju ranije i izgledaju stabilnije, ali bez konceptualne podloge ostaju krhka te se raspadaju u netipičnim ili apstraktnijim situacijama (Jacobs i sur., 2007; Lin, 2024; Steiner, 2009). Učenici pritom često primjenjuju niz nepovezanih procedura umjesto da grade relacijski organizirano znanje, što se očituje u pogreškama poput pogrešnog tretiranja predznaka, odvajanja predznaka od broja, ignoriranja dvostrukog minusa ili zaključivanja o veličinama negativnih brojeva (Bofferding i Wessman-Enzinger, 2017; Young i Booth, 2020).

Dodatni izvor teškoća jest višeznačnost minusa gdje se minus pojavljuje kao znak operacije (binarno značenje) i kao predznak broja (unarno značenje), a nerazlikovanje tih uloga povećava vjerojatnost pogrešnih postupaka, osobito u izrazima sa zagradama i dvostrukim predznakom (Vlassis, 2004; Young i Booth, 2020). Ovakva višeznačnost matematičkih simbola zahtijeva eksplicitnu didaktičku obradu zato što implicitno usvajanje pravila često rezultira pogrešnim interpretacijama i nestabilnim strategijama rješavanja zadataka (Vlassis, 2004).

Tako, primjerice, u zadatcima poput 4 − (−1) učenici često navode pogrešan rezultat −3 zbog nerazumijevanja dvostrukog predznaka, uloge zagrada i razlike između unarnog i binarnog minusa (Kurniasi i sur., 2024; Lin, 2024; Makonye i Fakude, 2016; Young i Booth, 2020). Slično, u izrazu 0 − (+2) u kojem se nula pojavljuje u ulozi umanjenika učenici ponekad zapisuju rješenje +2 umjesto −2, što upućuje na pogrešno intuitivno shvaćanje oduzimanja od nule i neprepoznavanje toga da rezultat mora biti smješten u negativnom dijelu brojevne crte (Khalid i Embong, 2020a; Vlassis i Demonty, 2022).

Pojava koja rezultira sustavnim pogreškama u računskim izrazima, poznata kao DFMS (Detachment From the Minus Sign) sindrom, opisuje kako učenici često ne doživljavaju znak minus kao sastavni dio broja, već ga tretiraju kao odvojeni operator (Vlassis, 2004; Vlassis i Demonty, 2022). Izraz poput −12 − 8 često tretiraju kao 12 − 8 te tek naknadno dodaju svom rezultatu predznak minus, proizvodeći tako rezultat −4 umjesto −20 (Bofferding, 2014).

Poučavanje koje računanje s negativnim brojevima svodi na mehanička pravila učenicima često ne pruža priliku za izgradnju stabilnih i povezanih pojmova, čime se povećava vjerojatnost nastanka miskoncepcija jer razumijevanje operacija s cijelim brojevima zahtijeva aktivnu izgradnju značenja i sudjelovanje učenika u matematičkom diskursu (Sfard, 2008). Pri tome su dijeljenje objašnjenja, opravdavanje postupaka i verbalizacija matematičkog mišljenja ključni za razgradnju pogrešnih predodžbi i razvoj konceptualno utemeljenih strategija (Makonye i Fakude, 2016). S druge strane, poučavanje koje aktivno povezuje više reprezentacija i omogućuje učenicima izgradnju smislenih relacijskih veza - primjerice korištenje vizualnih modela, brojnih crta, algebarskih pločica ili modela duga - značajno unapređuje konceptualno razumijevanje cijelih brojeva i smanjuje učestalost miskoncepcija (Acosta i Soliba, 2024; Khalid i Embong, 2020a; Rittle-Johnson i Schneider, 2015; Schoenherr i sur., 2024).

Analiza pisanih radova i intervjua pokazuje da učenici pri radu s cijelim brojevima iskazuju raznolike pogreške, koje se u literaturi opisuju kao konceptualne, proceduralne, strateške i logičke (Acosta i Soliba, 2024; Bofferding, 2014; Khalid i Embong, 2020a; Lin, 2024; Owusu i sur., 2023; Vlassis i Demonty, 2022). Ovakva klasifikacija odražava nalaze istraživanja koja pokazuju da poteškoće obuhvaćaju nerazumijevanje pojmova, pogrešnu primjenu pravila, neadekvatne strategije rješavanja zadataka te zaključivanja koja nisu u skladu s matematičkim definicijama. Semantičke i jezične pogreške jedan su od ključnih prediktora teškoća u radu s cijelim brojevima (Owusu i sur., 2023). Učenici često doslovno prate redoslijed riječi te, primjerice iskaz „oduzmi

6 od 8“ interpretiraju kao 6 – 8, što je posljedica linearne jezične obrade umjesto razumijevanja matematičke strukture zadatka (Makonye i Fakude, 2016).

Poteškoće u učenju cijelih brojeva ne iscrpljuju se u proceduralnim pogreškama, već one upućuju na dublje probleme u konceptualnom razumijevanju temeljnih pojmova (Kurniasi i sur., 2024; Vlassis i Demonty, 2022). Posebno zahtjevan pojam u učenju cijelih brojeva jest apsolutna vrijednost jer učenici apsolutnu vrijednost često shvaćaju instrumentalno, kao tehničku operaciju uklanjanja negativnog predznaka, bez razumijevanja njezina konceptualnog značenja kao udaljenosti broja od nule na brojevnoj crti (Permata i sur., 2019; Vlassis, 2004; Vlassis i Demonty, 2022).

U okviru ovog preliminarnog istraživanja, navedeni teorijski uvidi služe kao polazište za inicijalnu empirijsku provjeru u razrednom kontekstu te za jasnije definiranje smjera budućih, opsežnijih istraživanja usmjerenih na retenciju znanja i učinke ciljane didaktičke intervencije.

METODOLOGIJA

Cilj istraživanja i istraživačka pitanja

Cilj je ovog istraživanja ispitati razinu zadržanog razumijevanja cijelih brojeva kod učenika sedmog razreda nakon proteka četiriju mjeseca od pisanog ispita znanja bez formalne nastave o cijelim brojevima te procijeniti učinak ciljane didaktičke intervencije usmjerene na poboljšanje njihova konceptualnog razumijevanja.

U skladu s ciljem, istraživanje je usmjereno na sljedeća istraživačka pitanja:

Q1. Kolika je razina zadržanog znanja na predtestu nakon proteka četiriju mjeseca od pisanog ispita znanja bez formalne nastave o cijelim brojevima ($\bar{p}$, distribucija postignuća)?

Q2. Dovodi li ciljana didaktička intervencija do statistički značajnog poboljšanja i razlikuje li se taj učinak po sadržanim područjima (apsolutna vrijednost, množenje i dijeljenje te zbrajanje i oduzimanje cijelih brojeva)?

Hipoteze

Na temelju pregleda literature i cilja istraživanja postavljene su sljedeće hipoteze:

H1.Učenici će na posttestu postići statistički značajno više rezultate nego na predtestu.

H2.Ciljana didaktička intervencija dovest će do statistički značajnog poboljšanja u svakom sadržajnom području (apsolutna vrijednost; množenje i dijeljenje; zbrajanje i oduzimanje).

H3.Učinak intervencije veći je u konceptualnom znanju (apsolutna vrijednost) nego u proceduralnom znanju (zbrajanje i oduzimanje; množenje i dijeljenje).

Sudionici

U istraživanju je sudjelovalo N = 55 učenika sedmih razreda jedne gradske osnovne škole u Velikoj Gorici (30 učenica, 25 učenika). Sudionici istraživanja bili su učenici triju razrednih odjela. Učenici su odabrani prigodnim uzorkom, a sedmi razredi odabrani su namjerno jer su sadržaji cijelih brojeva obrađeni u prethodnoj školskoj godini, što omogućuje mjerenje retencije znanja i identifikaciju stabilnih miskoncepcija nakon proteka četiriju mjeseca.

Mjerni instrument

Za potrebe ovog istraživanja konstruiran je dijagnostički test znanja za cjelinu „Cijeli brojevi" koji je oblikovan u skladu s ishodima učenja kurikula Matematike. Zadatci su ciljano odabrani kako bi provjerili: razumijevanje poretka cijelih brojeva i pojma apsolutne vrijednosti (kao udaljenosti od 0 i razlikovanje unarnog minusa od operacije), usvojenost izvođenja računskih operacija s cijelim brojevima (zbrajanje i oduzimanje, množenje i dijeljenje, redoslijed računskih operacija) te prevođenje svakodnevnog jezika u matematički izraz.

Jedan dio zadataka preuzet je iz udžbeničke literature i materijala za ponavljanje nastavnih sadržaja te je prilagođen prema njima, dok je drugi dio razvijen autorski u skladu s najčešće dokumentiranim učeničkim miskoncepcijama. Za predtest i posttest korištene su paralelne verzije testa, sadržajno ekvivalentne, ali s različitim numeričkim vrijednostima kako bi se izbjegao učinak prisjećanja.

Zadatak Z5 (računanje izraza $(-3)^2$ i -3^2) nije u skladu sa sadržajima koji su učenici obradili do trenutka provedbe predtesta te je on izuzet iz instrumenta prije provedbe statističke analize. Izostavljanje ovog zadatka osigurava da rezultati odražavaju stvarno razumijevanje obrađenih sadržaja, a ne odsutnost izloženosti sadržaju.

Kako se radi o novokonstruiranom instrumentu koji prethodno nije standardiziran, njegove su metrijske karakteristike procijenjene na prikupljenim podacima. Provedena *item*-analiza (p, D, pbis) i visoki koeficijenti pouzdanosti ($\alpha_{pre} = 0,94$; $\alpha_{post} = 0,88$) daju uvid u njegove metrijske karakteristike na stvarnom uzorku učenika te podupiru procjenu njegove konstrukcijske valjanosti, uz napomenu da ekstremno visok α na predtestu može biti pokazatelj potencijalne redundantnosti zadataka.

Test se (Prilog 1) provodi u papirnatom obliku, tijekom jednog školskog sata bez uporabe kalkulatora.

Postupak istraživanja

Istraživanje je provedeno za vrijeme redovne nastave matematike u trima razrednim odjelima sedmog razreda osnovne škole, a provođeno je tijekom razdoblja od četiriju tjedana, u skladu s kvazieksperimentalnim predtest-posttest dizajnom bez randomizacije. Procedura istraživanja sastojala se od triju međusobno povezanih faza: početnog ispitivanja (predtest), ciljane didaktičke intervencije i završnog ispitivanja (posttest).

Predtest je proveden u jednom školskom satu i ispitivao je razinu znanja i prisutnost miskoncepcija u području cijelih brojeva nakon četveromjesečnog razdoblja bez formalne nastave o toj nastavnoj cjelini. Cilj predtesta bio je kvantitativno procijeniti retenciju znanja po sadržajnim domenama te identificirati tipične pogreške i miskoncepcije. Didaktička intervencija osmišljena je kao strukturirana instrukcija usmjerena na recipročni razvoj proceduralnog i konceptualnog znanja (Rittle-Johnson i Siegler, 1998), prema kojem napredak u jednoj vrsti znanja potiče napredak u drugoj. Aktivnosti su bile usmjerene na povezivanje matematičkog sadržaja s postupcima rješavanja te na razjašnjavanje temeljnih pojmova kroz usporedbu rješenja i analizu tipičnih učeničkih pogrešaka. Struktura intervencije bila je izravno povezana s vrstama pogrešaka otkrivenih u predtestu. Za sat intervencije pripremljena su i popisana netočna rješenja zadataka s predtesta. Kroz strukturiranu raspravu učenici su obrazlagali zašto je prikazano rješenje netočno, što im je omogućilo razvoj metakognicije o vlastitim pogreškama. Intervencija je provedena za vrijeme redovne nastave matematike i trajala je jedan školski sat. Cilj intervencije nije bio pripremiti učenike za posttest, nego isključivo ispraviti pogrešna shvaćanja i razviti konceptualno razumijevanje. Od provedbe predtesta do provedbe posttesta nije provođena dodatna formalna nastava sadržaja vezanih uz cijele brojeve izvan planirane intervencije.

Posttest je proveden dva tjedna nakon intervencije. Posttest je proveden jednako kao i predtest, tijekom jednog školskog sata i bez uporabe kalkulatora. Sadržajno je jednak predtestu, ali s promijenjenim numeričkim vrijednostima, čime je omogućena pouzdana usporedba rezultata prije i nakon intervencije. Posttest osigurava: provjeru učinka intervencije na ukupnu uspješnost, uvid u napredak po pojedinim sadržajnim područjima, identifikaciju smanjenja (ili opstanka) specifičnih miskoncepcija te usporedbu rezultata predtesta i posttesta primjenom odgovarajućih statističkih testova. Svi sudionici prolaze predtest, ciljano poučavanje te posttest, što omogućuje procjenu promjene znanja nakon intervencije.

Etika istraživanja

Istraživanje je provedeno u skladu s etičkim načelima u obrazovnim istraživanjima, što uključuje poštivanje dobrovoljnog sudjelovanja te zaštitu privatnosti i anonimnosti sudionika.

Prije provedbe istraživanja pribavljena je suglasnost ravnatelja škole te su prikupljeni potpisani pristanci roditelja/staratelja učenika. Sudjelovanje učenika bilo je dobrovoljno, a učenicima je pojašnjeno da je testiranje anonimno, da se od istog može odustati u bilo kojem trenutku te da neće biti ocijenjeni. Prikupljeni podatci korišteni su isključivo u istraživačke svrhe, a rezultati su obrađeni i prikazani na skupnoj razini, bez mogućnosti identifikacije pojedinih sudionika.

Valjanost i pouzdanost instrumenta

Sadržajna valjanost instrumenta osigurana je povezivanjem svake stavke s pripadajućim odgojno-obrazovnim ishodima kurikula matematike za šesti razred te s teorijskim nalazima o tipičnim pogreškama i miskoncepcijama u području računanja s cijelim brojevima. Konstruktna valjanost poduprta je činjenicom da su zadatci oblikovani povezivanjem s kurikularnim ishodima te s teorijskim spoznajama o pogreškama i konceptualnim teškoćama (Makonye i Fakude, 2016; Permata i sur., 2019). Pouzdanost instrumenta procijenjena je pomoću standardnih metrijskih pokazatelja: Cronbachova alfa koeficijenta, težine čestica (p-vrijednost), diskriminacije čestica (D-indeks) te korelacije stavke s ukupnim rezultatom (pbis). Zajednički obrasci ovih pokazatelja potvrđuju da instrument ima dobru dijagnostičku vrijednost i osjetljivost na promjenu, što podupire njegovu konstrukcijsku valjanost. Uporabom paralelne verzije testa u posttestu nastoji se povećati ekvivalentnost instrumenta i osigurati da obje verzije mjere

isti konstrukcijski sadržaj, čime se omogućuje pouzdana procjena promjene u znanju.

REZULTATI ISTRAŽIVANJA

Podaci su nakon obaju testiranja analizirani na razini uparenih mjerenja. Bodovi rješenja uneseni su u Microsoft Excel tablicu. U zadatcima u kojima je trebalo napraviti više koraka pri rješavanju dodijeljeno je i više bodova. Zadatci predtesta (Prilog 1) i posttesta (Prilog 2) u prilozima su ovog rada.

Pouzdanost instrumenta procijenjena je Cronbachovim α koeficijentom. Koeficijent pouzdanosti posttesta iznosi α = 0,88 što pokazuje visoku unutarnju konzistentnost posttesta, dok koeficijent pouzdanosti predtesta iznosi α = 0,94. Ovako visok Cronbachov alfa koeficijent (> 0.90) može biti pokazatelj redundancije, što je dijelom očekivano jer instrument obuhvaća usko definirano područje konceptualnog razumijevanja cijelih brojeva, ali takav rezultat istovremeno predstavlja i metodološko ograničenje koje treba uzeti u obzir pri interpretaciji rezultata. Analiza čestica provedena je pomoću p-vrijednosti (indeks težine), indeksa diskriminacije (D; top–bottom 27%), korelacije stavke s ukupnim rezultatom (pbis) te pokazatelja *alpha if item deleted* (Tablica 1 i Tablica 2).

Tablica 1. Tablica zadataka na predtestu

Zadatak	Max	p̃	pbis	D	Alpha_if_ deleted	Težina zadatka	Skupina 1	Skupina 2
Z1A	1	0.473	0.543	0.094	0.938	srednje težak	prav	
Z1B	1	0.273	0.412	0.230	0.939	težak	AV	
Z1C	1	0.073	0.221	0.414	0.940	vrlo težak	AV	
Z1D	1	0.309	0.292	0.258	0.940	težak	AV	
Z21ZB	1	0.491	0.756	-0.258	0.936	srednje težak	prav	poz
Z21SB	1	0.582	0.783	0.226	0.936	srednje težak	SB	poz
Z21NS	1	0.491	0.785	0.387	0.936	srednje težak	prav	poz
Z21AV	1	0.218	0.507	0.129	0.938	težak	AV	poz
Z22SB	1	0.673	0.661	0.226	0.937	lagan	SB	poz
Z22NP	1	0.618	0.675	0.194	0.937	lagan	prav	poz
Z22NS	1	0.582	0.679	0.258	0.937	srednje težak	prav	poz
Z22AV	1	0.256	0.514	-0.064	0.938	težak	AV	poz
Z23SB	1	0.655	0.680	0.323	0.937	lagan	SB	neg
Z23NP	1	0.218	0.517	0.032	0.938	težak	prav	neg

Z23NS	1	0.218	0.517	0.064	0.938	težak	prav	neg
Z23AV	1	0.273	0.619	0.000	0.937	težak	AV	neg
Z24ZB	1	0.2	0.343	0.033	0.940	vrlo težak	prav	neg
Z24SB	1	0.473	0.731	0.226	0.936	srednje težak	SB	neg
Z24NP	1	0.164	0.328	0.064	0.940	vrlo težak	prav	neg
Z24AV	1	0.182	0.429	0.032	0.939	vrlo težak	AV	neg
Z3A	1	0.8	0.495	-0.226	0.938	lagan	ZO	
Z3B	1	0.655	0.586	0.226	0.938	lagan	ZO	
Z3C	1	0.4	0.273	0.322	0.940	srednje težak	ZO	
Z3D	1	0.527	0.529	-0.032	0.938	srednje težak	ZO	
Z3E	1	0.618	0.524	-0.065	0.938	lagan	MD	
Z3F	1	0.655	0.539	0.000	0.938	lagan	MD	
Z3G	1	0.582	0.608	0.258	0.937	srednje težak	MD	
Z3HRED	1	0.291	0.486	0.226	0.939	težak		red
Z3HRAC	1	0.163	0.434	0.064	0.939	vrlo težak		red
Z4A	1	0.618	0.641	0.291	0.937	lagan	ZO	
Z4B	1	0.582	0.612	0.226	0.937	srednje težak	ZO	
Z4C	1	0.127	0.254	0.096	0.940	vrlo težak	AV	
Z4D	1	0.036	0.321	0.064	0.940	vrlo težak	AV	
Z4E	1	0.291	0.597	0.161	0.938	težak	MD	
Z4FRED	1	0.236	0.449	0.033	0.939	težak		red
Z4FRAC	1	0.145	0.375	0.032	0.939	vrlo težak		red
Z6RAC	1	0.072	0.236	0.097	0.940	vrlo težak		TZ
Z6ZAP	1	0.091	0.397	0.194	0.939	vrlo težak		TZ
Z6ODG	1	0.418	0.415	0.162	0.939	srednje težak		TZ
Z7ZAP	1	0.073	0.385	0.065	0.939	vrlo težak	AV	TZ
Z7RAC	1	0.055	0.327	0.000	0.940	vrlo težak	AV	TZ

Analiza čestica predtesta (Tablica 1) pokazuje da su zadatci s apsolutnom vrijednosti (AV) i tekstualni zadatci (TZ) najzahtjevniji za učenike, a najniži indeksi težine upućuju na postojanost tipičnih miskoncepcija vezanih za koncepte apsolutne vrijednosti i prevođenje jezičnih enoncija u matematički zapis. Negativne vrijednosti pbis ili D-indeksa ($D \leq 0$) mogu ukazivati na nedovoljnu razlikovnost zadatka ili na to da je stavka bila prelagana, preteška ili potencijalno dvosmisleno formulirana. Takve su čestice interpretirane oprezno te predstavljaju važnu informaciju za buduću reviziju instrumenta.

Tablica 2. Tablica zadataka na posttestu

Zadatak	Max	p̃	pbis	D	Alpha_if_deleted	Težina zadatka	Skupina 1	Skupina 2
Z1A	1	0.745	0.381	0.470	0.877	lagan	prav	
Z1B	1	0.036	0.341	0.130	0.878	vrlo težak	AV	
Z1C	1	0.382	0.260	0.470	0.879	težak	AV	
Z1D	1	0.164	0.231	0.270	0.879	vrlo težak	AV	
Z21ZB	1	0.855	0.501	0.270	0.875	vrlo lagan	prav	poz
Z21SB	1	0.927	0.444	0.470	0.877	vrlo lagan	SB	poz
Z21NS	1	0.836	0.579	0.530	0.874	vrlo lagan	prav	poz
Z21AV	1	0.345	0.348	0.200	0.877	težak	AV	poz
Z22SB	1	0.945	0.418	0.470	0.877	vrlo lagan	SB	poz
Z22NP	1	0.818	0.520	0.470	0.875	vrlo lagan	prav	poz
Z22NS	1	0.818	0.520	0.530	0.875	vrlo lagan	prav	poz
Z22AV	1	0.345	0.331	0.200	0.878	težak	AV	poz
Z23SB	1	0.945	0.418	0.730	0.877	vrlo lagan	SB	neg
Z23NP	1	0.473	0.481	0.600	0.875	srednje težak	prav	neg
Z23NS	1	0.382	0.403	0.670	0.876	težak	prav	neg
Z23AV	1	0.582	0.475	0.800	0.875	srednje težak	AV	neg
Z24ZB	1	0.400	0.511	0.470	0.874	srednje težak	prav	neg
Z24SB	1	0.836	0.434	0.730	0.876	vrlo lagan	SB	neg
Z24NP	1	0.364	0.501	0.800	0.874	težak	prav	neg
Z24AV	1	0.491	0.559	0.330	0.873	srednje težak	AV	neg
Z3A	1	0.800	0.308	0.140	0.878	lagan	ZO	
Z3B	1	0.727	0.108	0.400	0.882	lagan	ZO	
Z3C	1	0.764	0.390	0.140	0.877	lagan	ZO	
Z3D	1	0.564	0.028	0.660	0.884	srednje težak	ZO	
Z3E	1	0.600	0.520	0.070	0.874	srednje težak	MD	
Z3F	1	0.745	0.098	0.600	0.882	lagan	MD	
Z3G	1	0.655	0.439	0.930	0.876	lagan	MD	
Z3HRED	1	0.473	0.663	0.800	0.871	srednje težak		red
Z3HRAC	1	0.418	0.598	0.400	0.872	srednje težak		red
Z4A	1	0.709	0.338	0.460	0.878	lagan	ZO	
Z4B	1	0.673	0.369	0.200	0.877	lagan	ZO	
Z4C	1	0.091	0.138	0.130	0.880	vrlo težak	AV	
Z4D	1	0.145	0.105	0.530	0.881	vrlo težak	AV	

Z4E	1	0.709	0.461	0.800	0.875	lagan	MD	
Z4FRED	1	0.436	0.585	0.330	0.873	srednje težak		red
Z4FRAC	1	0.200	0.290	0.330	0.878	vrlo težak		red
Z6RAC	1	0.182	0.281	0.000	0.878	vrlo težak		TZ
Z6ZAP	1	0.036	0.012	0.130	0.881	vrlo težak		TZ
Z6ODG	1	0.600	0.092	0.330	0.883	srednje težak		TZ
Z7ZAP	1	0.200	0.322	0.270	0.878	vrlo težak	AV	TZ
Z7RAČ	1	0.164	0.217	0.400	0.879	vrlo težak	AV	TZ

Analiza posttesta (Tablica 2) pokazuje očekivano povećanje indeksa težine ($\tilde{p}$), a to se posebno očituje u zadatcima u kojima se ispituju proceduralna znanja što je u skladu s teorijskim nalazima o bržoj stabilizaciji proceduralnog znanja. Međutim, nekoliko konceptualno zahtjevnih čestica ostaje izrazito teško i nakon provedene intervencije, što upućuje na sporije usvajanje dubinskog konceptualnog razumijevanja (npr. čestice Z4C, Z4D, Z6ZAP, Z6RAC, Z7RAČ). Ovakvi rezultati posebno su važni u kontekstu pilot-istraživanja jer jasno izdvajaju konceptualna područja koja se najsporije usvajaju, potvrđuju da kratkotrajna intervencija ne može ukloniti duboko ukorijenjene miskoncepcije te upućuju na potrebu za sustavnim i vremenski duljim poučavanjem u idućim istraživačkim fazama. Diskriminacijske vrijednosti na posttestu općenito su više nego na predtestu, što upućuje na veću ujednačenost i stabilizaciju znanja nakon intervencije (npr. Z23AV i Z24NP). S druge strane, čestice se koje imaju ograničenu razlikovnost (npr. Z4C, Z6ZAP), u kontekstu preliminarnog istraživanja, ne uklanjaju, već se promatraju kao ključni pokazatelji za daljnju izradu i poboljšanje instrumenta.

Normalnost distribucije ispitana je Shapiro-Wilkovim testom (Razali i Yap, 2011) koji pokazuje (Tablica 3) da distribucija posttesta nije ukazala na odstupanje od normalnosti ($W = 0.969$, $p = 0.166$), dok je normalnost predtesta na granici statističke značajnosti ($W = 0.958$, $p = 0.051$).

Tablica 3. Rezultati Shapiro–Wilkovog testa za predtest i posttest

Test	**W (koeficijent podudarnosti)**	**p-vrijednost**
Predtest	0.958	0.051
Posttest	0.969	0.166

Kako bi se potvrdila stabilnost nalaza, proveden je i Wilcoxonov test za zavisne uzorke (Tablica 4) kao neparametrijska provjera. Rezultati Wilcoxonova testa pokazuju statistički izrazito značajnu razliku između predtesta i posttesta

(Z = –6.455, p < .001). Od ukupno 55 učenika, njih 54 ostvarilo je viši rezultat na posttestu.

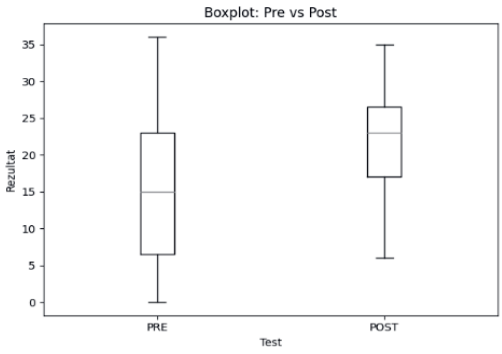
Tablica 4. Rezultati Wilcoxonovog testa (Z, p, r) za predtest i posttest

Usporedba	Z	p	r	Zaključak
TOTAL_POST – TOTAL_PRE	–6.455	< .001	0.87	Posttest značajno > predtest

Glavni efekt intervencije

Hipoteza H1. Učenici će na posttestu postići statistički značajno bolje rezultate u odnosu na predtest.

Za testiranje hipoteze H1 korišten je Wilcoxonov test rangova. Rezultati testa (Tablica 4) pokazuju statistički značajno povećanje rezultata na posttestu u odnosu na predtest. Veličina efekta (r = 0.87) predstavlja iznimno velik učinak, znatno iznad uobičajenog praga za veliki efekt (r ≥ 0.50). Važno je razmotriti i specifičan vremenski kontekst provedbe predtesta što, osim provedene didaktičke intervencije, može biti jedan od razloga velike razlike uspješnosti učenika na predtestu i posttestu. Predtest je proveden na samom početku školske godine, kada učenici često postižu niži uspjeh zbog „povratnog efekta" i ponovnog uspostavljanja radnih navika nakon ljetnih praznika (Bailey i sur., 2017; Fairchild i Boulay, 2002).



Slika 2. Dijagram raspodjele rezultata predtesta i posttesta

Radi provjere robusnosti proveden je t-test za zavisne uzorke, koji je pokazao statistički značajnu razliku (t(54) = –16.55, p < .001). 95%-tni interval pouzdanosti (5.8 - 7.7) i Cohenov d (d = 2.23) ukazuju na iznimno velik učinak intervencije. Slika 2 prikazuje raspodjelu rezultata učenika. Medijan posttesta vidljivo je viši, a interkvartilni raspon je uži, što ukazuje na veće i ujednačenije

postignuće učenika nakon intervencije. Dobivenim je rezultatima hipoteza **H1 potvrđena**.

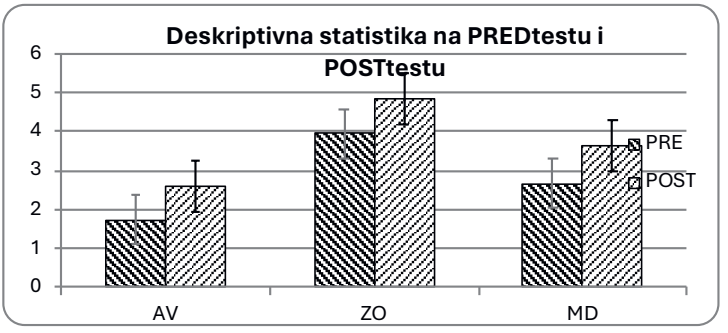
Postojanje poboljšanja didaktičke intervencije po sadržajnim područjima

Hipoteza H2. Ciljana didaktička intervencija dovest će do statistički značajnog poboljšanja u svakom sadržajnom području (apsolutna vrijednost; množenje i dijeljenje; zbrajanje i oduzimanje).

Inicijalna uspješnost (Tablica 5, Slika 3) bila je najniža u području apsolutne vrijednosti (M = 1,75), a najviša u zbrajanju i oduzimanju (M = 3,95). Nakon intervencije, prosječna postignuća viša su u svim trima područjima (AV, ZO i MD), što sugerira pozitivan učinak ciljane didaktičke aktivnosti.

Tablica 5. Deskriptivna statistika po sadržajnim područjima na predtestu i posttestu u području apsolutne vrijednosti (AV), zbrajanja/oduzimanja (ZO) i množenja/dijeljenja (MD)

Test	N	M (PRE)	SD (PRE)	M (POST)	SD (POST)	Min	Max
AV	55	1.75	2.08	2.58	2.05	0	8
ZO	55	3.95	2.32	4.85	2.26	0	8
MD	55	2.67	2.06	3.62	1.97	0	6



Slika 3. Deskriptivna statistika po sadržajnim područjima na predtestu i posttestu u području apsolutne vrijednosti (AV), zbrajanja/oduzimanja (ZO) i množenja/dijeljenja (MD)

Za ispitivanje razlika u uspješnosti na predtestu i posttestu među trima navedenim sadržajnim područjima korišten je Friedmanov test za ponovljena mjerenja koji je pokazao statistički značajne razlike među područjima na

predtestu ($\chi^2(2) = 42.41, p < 0.001$) i na posttestu ($\chi^2(2) = 40.27, p < .001$). Učenici ponovno postižu najslabije rezultate u području AV (Mean Rank = 1.47), dok su najuspješniji u ZO (Mean Rank = 2.61).

Tablica 6. Rezultati Wilcoxonovog testa (Z, p, r) po sadržajnim područjima na predtestu i posttestu u području apsolutne vrijednosti (AV), zbrajanja/oduzimanja (ZO) i množenja/dijeljenja (MD)

Usporedba	Z	p	r	Zaključak
POST_AV – PRE_AV	–2.557	.011	**0.34**	Posttest značajno > predtest (mali–srednji efekt)
POST_ZO – PRE_ZO	–2.789	.005	**0.38**	Posttest značajno > predtest (srednji efekt)
POST_MD – PRE_MD	–3.456	< .001	**0.47**	Posttest značajno > predtest (srednje–veliki efekt)

Za svaku od navedenih domena, provedeni su Wilcoxonovi testovi za zavisne uzorke. Veličine efekata (r = 0.34 – 0,47) predstavljaju srednje do velike učinke. Uočljiv, iako ne univerzalan napredak, sugerira da su proceduralni aspekti učenja (MD, ZO) osjetljiviji na kratkotrajne ciljane intervencije nego konceptualne komponente (AV). Umjeren, ali pozitivan utjecaj na razumijevanje apsolutne vrijednosti uz navedeni udio negativnih rangova i relativno velik broj jednakih rezultata upućuju na to da je ovo područje i dalje jedno od konceptualno najzahtjevnijih te da zahtijeva dugoročnije i sustavnije poučavanje.

Rezultati svih triju Wilcoxonovih testova pokazuju da su učenici ostvarili statistički značajan napredak u svim ispitivanim područjima (Tablica 6), čime je hipoteza **H2 potvrđena**.

Razlike u učinku intervencije između područja

Hipoteza H3. Učinak intervencije veći je u konceptualnom znanju (apsolutna vrijednost) nego u proceduralnom znanju (zbrajanje i oduzimanje; množenje i dijeljenje).

Radi provjere razlikuju li se promjene rezultata u trima sadržajnim područjima, proveden je Friedmanov test rangova za ponovljena mjerenja. Iako je najveći prosječni rang zabilježen za područje MD (Mean Rank = 2,10), razlike među područjima nisu bile statistički značajne, $\chi^2(2) = 0,925$, $p = 0,630$. U Tablici 7 prikazane su razlike u napretku između područja AV i MD (Z = –0,032, p = 0,974), MD i ZO (Z = –0,032, p = 0,974) te ZO i AV (Z = –0,032, p = 0,974). Ovi

rezultati upućuju na to da učenici napreduju u svim analiziranim područjima, ali veličina tog napretka nije međusobno značajno različita.

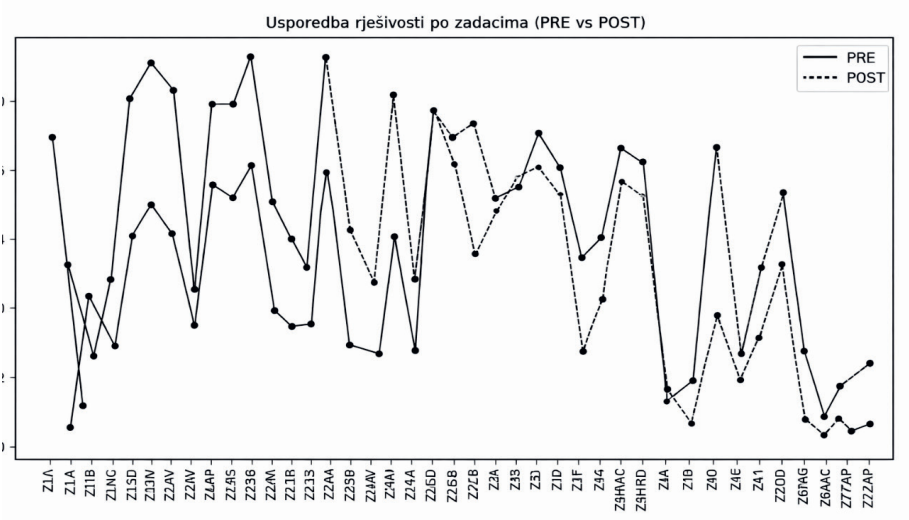
Tablica 7. Rezultati Wilcoxonovih parnih testova za usporedbu napretka po sadržajnim područjima

Usporedba razlika	N (negativni)	N (pozitivni)	N (ties)	Mean Rank (neg.)	Mean Rank (pos.)	Z	p (2-tailed)	Interpretacija
POST_AV – PRE_AV	26	25	4	24,38	27,68	–0,273	0,785	Nema značajne razlike između napretka u ZO i AV
POST_ZO – PRE_ZO	20	28	7	28,95	21,32	–0,093	0,926	Nema značajne razlike između napretka u AV i MD
POST_MD – PRE_MD	22	25	8	25,50	22,68	–0,032	0,974	Nema značajne razlike između napretka u ZO i MD

Wilcoxonovi testovi nisu pokazali statistički značajnu prednost napretka u konceptualnom području (AV) u odnosu na proceduralna područja (MD i ZO; svi $p > .05$). Na osnovu dobivenih podataka zaključuje se da intervencija nije proizvela veći učinak u konceptualnom znanju nego u proceduralnom, čime se hipoteza **H3 odbacuje**.

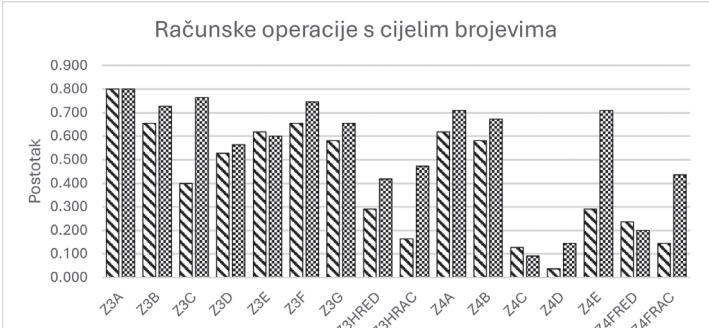
RASPRAVA

Ovo preliminarno istraživanje pruža inicijalni uvid u retenciju znanja iz cjeline „Cijeli brojevi" četiri mjeseca nakon formalne nastave te učinak ciljane didaktičke intervencije usmjerene na konceptualno i proceduralno razumijevanje (Rittle-Johnson i Schneider, 2015; Vlassis, 2004). Slika 4 omogućuje detaljnu analizu učeničkih postignuća po pojedinim vrstama zadataka i jasno ilustrira obrasce pogrešaka zabilježenih u dosadašnjim istraživanjima (Khalid i Embong, 2020b; Makonye i Fakude, 2016; Permata i sur., 2019). Opći obrazac dobivenih nalaza pokazuje da se proceduralne vještine stabiliziraju brže od konceptualnih struktura znanja, dok se miskoncepcije povezane s predznakom, apsolutnom vrijednošću i brojevnom crtom zadržavaju i nakon završetka poučavanja (Bofferding, 2014; Vlassis, 2004).

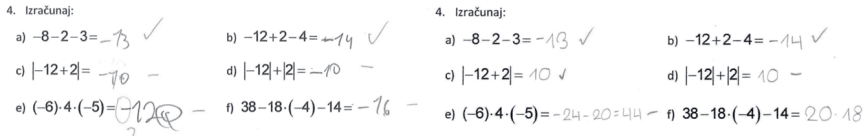


Slika 4. Usporedba rješivosti po zadatcima

Rezultati (Slika 5) prikazuju uspješnost izvođenja računskih operacija s cijelim brojevima. Nižu rješivost imaju zadatci u kojima je trebalo poštivati redoslijed računskih radnji (Z3H i Z4F), dok su najlošije riješeni zadatci bili zadatci zbroja apsolutnih vrijednosti i apsolutne vrijednosti zbroja dvaju brojeva (zadatci Z4C i Z4D).



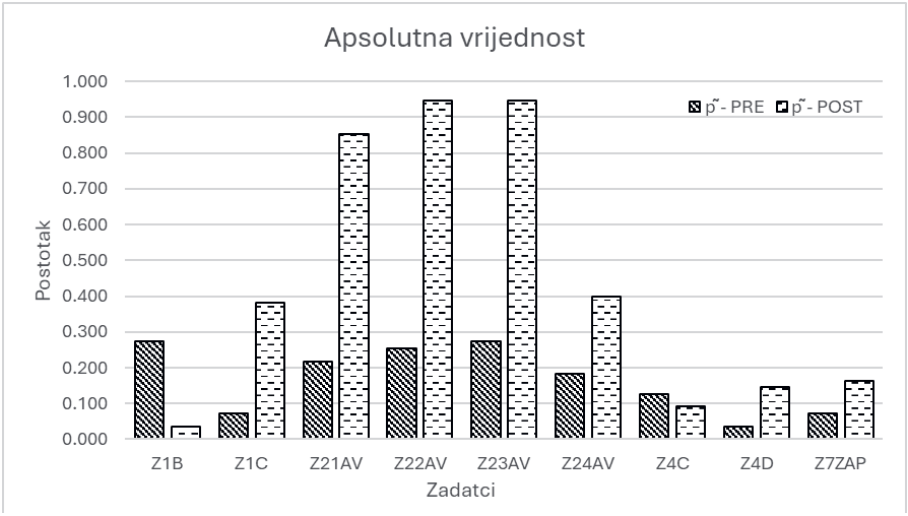
Slika 5. Računske operacije s cijelim brojevima



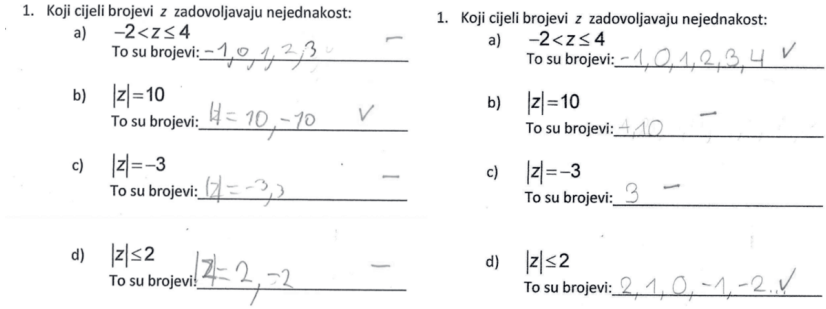
Slika 6. Zadatak 4.

Analiza rješenja pokazuje da učenici u velikoj mjeri poistovjećuju pojmove „apsolutna vrijednost zbroja" i „zbroj apsolutnih vrijednosti" ne razlikujući ih konceptualno (Slika 6). Takve pogreške upućuju na instrumentalno shvaćanje apsolutne vrijednosti kao „postupka uklanjanja minusa", bez konceptualnog razumijevanja apsolutne vrijednosti kao udaljenosti od nule i razlikovanja zapisa apsolutne vrijednosti broja od zapisa apsolutne vrijednosti izraza (Vlassis, 2004; Vlassis i Demonty, 2022). Rezultati posttesta pokazuju da intervencija u ovom dijelu nastavnog sadržaja nije imala željeni učinak, što potvrđuje da duboke miskoncepcije zahtijevaju dulji period konceptualne promjene.

Analiza rezultata (Slike 7 i 8) pokazuje da su učenici uspješnije određivali apsolutnu vrijednost zadanog broja nego broj prema zadanoj apsolutnoj vrijednosti, što ukazuje na perzistentne miskoncepcije. Različitost napretka u rješivosti zadataka Z1C i Z1B djelomično je opravdana činjenicom da su ovi zadatci na predtestu i posttestu imali zamijenjen redoslijed. Povećanje točnosti u dijelu zadataka nakon intervencije potvrđuje da vizualne reprezentacije i eksplicitne rasprave o značenju i pojašnjenju novih pojmova, mogu ublažiti dio miskoncepcija, no da ih ne uklanjaju u potpunosti (Khalid i Embong, 2020a; Schoenherr i sur., 2024).

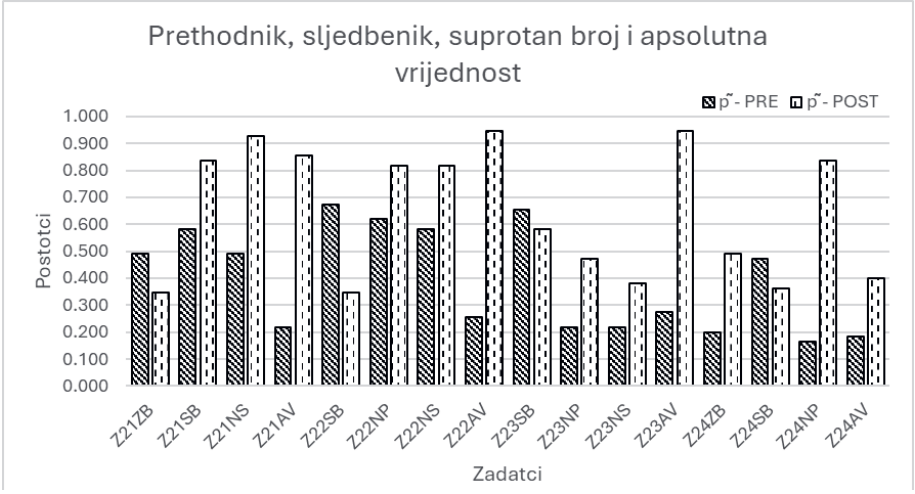


Slika 7. Apsolutna vrijednost



Slika 8. Zadatak 1.

Na Slici 9 prikazana je uspješnost rješivosti zadatka 2. iz testa (Prilog 1 i Prilog 2). Najslabija rješivost tog zadatka jesu zadatci u kojima je trebalo odrediti neposredni prethodnik i sljedbenik negativnog cijelog broja (zadatci s oznakom NP i NS) na predtestu. To upućuje na poteškoće s orijentacijom na negativnom dijelu brojevne crte razlikovanjem „pomaka za −1" i „pomaka za +1" od konkretnog broja (Bofferding i Wessman-Enzinger, 2017). Primjer najčešćih pogrešaka rješenja prikazan je na Slici 10.



Slika 9. Prethodnik, sljedbenik, suprotan broj i apsolutna vrijednost

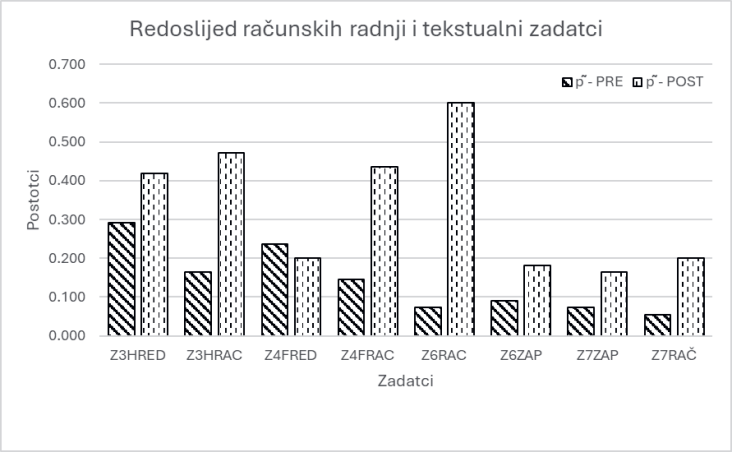
2. U svakom retku je zadan jedan broj. Popuni tablicu tako da :

ZADANI BROJ *z*	SUPROTAN BROJ BROJA *z*	NEPOSREDNI PRETHODNIK BROJA *z*	NEPOSREDNI SLJEDBENIK BROJA *z*	APSOLUTNA VRIJEDNOST BROJA *z*
22	-22	21	23 ✓	~~-22~~
7	-7	6	8 ✓	-7
−5	5	-4	-6 −	5
-21	21	-20	−22 −	21

Slika 10. Zadatak 2.

Učenici su nakon intervencije bolje razumjeli strukturu brojevnog pravca, preciznije razlikovali operacije s negativnim brojevima te rjeđe primjenjivali intuitivne pogrešne strategije, što potvrđuje da intervencije koje kombiniraju vizualne modele, metakognitivne aktivnosti i vođeno rješavanje imaju dobru učinkovitost (Posner i sur., 1982).

Vidljiv uspjeh u točnom odgovoru na zadatak Z6RAC u odnosu na potreban zapis računa (Slika 11) pokazatelj je prevođenja tekstualnog izraza u matematički zapis. Učenicima je nakon intervencije bilo jasnije što je rješenje zadatka, ali ne i kako tekst u zadatku pretvoriti u matematički točan izraz. Problemi u rješavanju tekstualnih zadataka, kako na predtestu tako i na posttestu, snažna su potvrda velikih miskoncepcija koje se odnose na prevođenje tekstualnih enoncija u matematički izraz.



Slika 11. Redoslijed računskih radnji i tekstualni zadatci

Ciljana intervencija pokazala se učinkovitom jer je rezultirala značajnim porastom ukupnih postignuća. Učenici su nakon intervencijskog ciklusa ostvarili više rezultate u svim skupinama zadataka, a posebno u onima koje uključuju rad s negativnim brojevima. Napredak se očitovao i kroz povećanu homogenost rješavanja i veće korelacije među zadacima, što ukazuje na stabilizaciju konceptualnog znanja. Neovisno o općem napretku, tekstualni zadatci i nakon intervencije ostaju među najzahtjevnijima. To jasno potvrđuje da promjena temeljnih mentalnih modela zahtijeva dulji vremenski period i kontinuirano izlaganje konceptualnim konfliktima, vizualizacijama i problemskim situacijama. Napredak je bio neznatno izraženiji u proceduralnim nego u konceptualnim zadacima, što ukazuje na potrebu dugoročnijeg i sustavnijeg rada na relacijskom razumijevanju brojeva.

Buduća istraživanja trebala bi obuhvatiti veći uzorak različitih škola i učitelja radi veće generalizabilnosti rezultata i provjere stabilnosti učinka intervencije. Korisnim se pokazuje i dublje proučavanje misaonih procesa učenika, osobito u vezi s održavanjem ili transformacijom specifičnih miskoncepcija. Primjena kvalitativnih metoda poput intervjua i analize učeničkih objašnjenja omogućila bi uvid u načine na koje učenici interpretiraju postupke i odnose među brojevima, što bi pomoglo u razumijevanju razloga zbog kojih se pojedine pogrešne predodžbe zadržavaju unatoč intervenciji. Dodatni prostor za razvoj predstavlja uvođenje longitudinalnog dizajna. Sustavno praćenje učenika kroz dulji period omogućilo bi procjenu stabilnosti konceptualnih promjena i dugoročnih učinaka didaktičkih intervencija te bi pokazalo ostaju li novousvojene strategije i razumijevanja trajni dio učenikova znanja ili zahtijevaju dulju podršku i ponavljanje.

Napokon, rezultati ove studije ukazuju na potrebu za daljnjim razvojem i validacijom proširene verzije mjernog instrumenta. Provedena analiza čestica sugerira smjerove u kojima je instrument moguće unaprijediti, čime bi se osigurala njegova veća pouzdanost i širina primjene. Sustavna standardizacija instrumenta pridonijela bi kvalitetnijem i preciznijem mjerenju konceptualnog razumijevanja cijelih brojeva, što predstavlja smjernicu za buduće intervencije gdje je potrebno posebnu pozornost posvetiti najdubljim konceptualnim strukturama.

OGRANIČENJA I PREDNOSTI ISTRAŽIVANJA

Ovo istraživanje ima nekoliko metodoloških i sadržajnih prednosti relevantnih za interpretativnu vrijednost dobivenih rezultata. Predtest-posttest dizajn osigurao je precizno praćenje promjene znanja kod istih učenika, kao i

objektivnu procjenu učinka intervencije. Paralelne verzije testa minimizirale su utjecaj prisjećanja, čime je povećana valjanost i objektivnost mjerenja. Zadatci temeljeni na teorijskim modelima te podjela na konceptualne, proceduralne i tekstualne tipove omogućili su preciznu dijagnozu miskoncepcija. Uključivanje različitih tipova zadataka, to jest konceptualnih, proceduralnih i tekstualnih zadataka, omogućilo je sveobuhvatan uvid u više dimenzija matematičke kompetencije.

Unatoč vrijednim uvidima koje ovo istraživanje pruža, potrebno je istaknuti nekoliko njegovih ograničenja. Ograničenja uključuju mali prigodni uzorak iz jedne škole, specifičan nastavni kontekst, što ograničava generalizaciju nalaza, provedbu predtesta na početku školske godine te kratko trajanje intervencije (jedan školski sat), što je moglo utjecati na dubinu konceptualnih promjena.

Izostanak kvalitativne analize ograničio je dublji uvid u misaone strategije i pozadinu pogrešaka učenika. Zadatak Z5 izuzet je iz mjernog instrumenta jer nije odgovarao obrađenim sadržajima. Naposljetku, iako su numeričke vrijednosti u testovima mijenjane, neki su se zadatci djelomično preklapali s prethodnim nastavnim materijalima što je moglo utjecati na rezultate, osobito kod učenika koji se dobro sjećaju strukture zadataka, što predstavlja još jedno metodološko ograničenje.

ZAKLJUČAK

Ovim istraživanjem dobiven je uvid u razinu zadržanog konceptualnog i proceduralnog razumijevanja cijelih brojeva četiri mjeseca nakon formalne obrade ove nastavne cjeline. Rezultate ne promatramo kao pokazatelje trenutačno uvježbanih postupaka, već ih promatramo kao pokazatelje zadržanog znanja i načina na koji učenici organiziraju ključne pojmove i računske postupke. Uočene su promjene u načinu rješavanja zadataka, koje se očituju u rjeđoj primjeni intuitivnih pogrešnih strategija i boljoj orijentaciji na brojevnoj crti, pri čemu se ne mogu donositi zaključci o razlikama između konceptualnog i proceduralnog napretka. Nakon provedene intervencije temeljene na vizualnim modelima i raspravi o pogreškama uočeno je poboljšanje rezultata na posttestu. Sama intervencija nije u potpunosti uklonila najdublje miskoncepcije, posebice one povezane s apsolutnom vrijednosti i prevođenjem teksta u matematički izraz, što je u skladu s pretpostavkom da konceptualna promjena zahtijeva dulji i sustavniji rad.

Posebno se ističu poteškoće razlikovanja unarnog minusa od oduzimanja, poistovjećivanje pojmova „apsolutna vrijednost zbroja“ i „zbroj apsolutnih

vrijednosti“ te pogrešno razumijevanje pomaka na brojevnoj crti. Rješivost zadataka u kojima je trebalo odrediti neposredni prethodnik i sljedbenik negativnog cijelog broja ukazuje na poteškoće s orijentacijom na negativnom dijelu brojne crte, a niska rješivost zadataka s apsolutnom vrijednosti i tekstualnih zadataka ukazuje na duboke konceptualne teškoće.

Ovo istraživanje pruža uvid u prirodu učeničkog razumijevanja cijelih brojeva, u moguće učinke ciljane didaktičke intervencije te otvara prostor za daljnje, opsežnije i longitudinalne studije. Unatoč ograničenom uzorku i kratkom trajanju intervencije, rezultati upućuju na to da ovako strukturirana, konceptualno usmjerena nastava može biti povezana s mjerljivim napretkom. Ovom se poboljšanju, s obzirom na istraživački dizajn, ne može jednoznačno pripisati uzročni učinak same intervencije. Preporuka za buduća istraživanja jest uključiti veće i metodološki raznolikije uzorke te kombinirati kvantitativne i kvalitativne pristupe radi dubljeg razumijevanja učeničkih miskoncepcija. S obzirom na važnost cijelih brojeva kao temelja za kasnije matematičke sadržaje, ovi rezultati upućuju na važnost daljnjeg razvoja didaktičkih pristupa koji istovremeno jačaju konceptualno i proceduralno razumijevanje te ciljano adresiraju najotpornije miskoncepcije.

LITERATURA

1. Acosta, C. P., & Soliba, B. L. (2024). Pedagogical approach of grade 7 teachers in teaching the learning competency of integers. *Educational Technology Quarterly*, *2024*(1), 38–55. https://doi.org/10.55056/etq.652
2. Bailey, D., Duncan, G. J., Odgers, C. L., & Yu, W. (2017). Persistence and Fadeout in the Impacts of Child and Adolescent Interventions. *Journal of Research on Educational Effectiveness*, *10*(1), 7–39. https://doi.org/10.1080/19345747.2016.1232459
3. Bofferding, L. (2014). Negative Integer Understanding: Characterizing First Graders' Mental Models. *Journal for Research in Mathematics Education*, *45*(2), 194–245. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.45.2.0194
4. Bofferding, L., & Wessman-Enzinger, N. (2017). Subtraction involving negative numbers: Connecting to whole number reasoning. *The Mathematics Enthusiast*, *14*(1), 241–262. https://doi.org/10.54870/1551-3440.1396
5. Fairchild, R. A., & Boulay, M. (2002). *What if Summer Learning Loss Were an Education Policy Priority?* Johns Hopkins University.
6. Gallardo, A. (2008). Historical Epistemological Analysis in Mathematical Education: Negative Numbers and the Nothingness. *Proceedings of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME 32) and PME-NA XXX*, 201–208.
7. Jacobs, V. R., Franke, M. L., Carpenter, T. P., Levi, L., & Battey, D. (2007). Professional Development Focused on Children's Algebraic Reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*(3), 258–288.
8. Khalid, M., & Embong, Z. (2020a). Emphasizing Concrete Representation to Enhance Students' Conceptual Understanding of Operations on Integers. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, *11*(3), 762–773. https://doi.org/10.16949/turkbilmat.775605
9. Khalid, M., & Embong, Z. (2020b). Sources and Possible Causes of Errors and Misconceptions in Operations of Integers. *International Journal of Academic Research in Progressive Education and Development*, *9*(1), 1–15. https://doi.org/10.6007/IJARPED/v9-i1/6265
10. Kurniasi, R., Nurjanah, N., & Cahya, E. (2024). Students' learning obstacle in operations of integer. *Educenter: Jurnal Ilmiah Pendidikan*, *3*(1), 59–67. https://doi.org/10.55904/educenter.v3i1.1107
11. Lin, T.-H. (2024). *Understanding Error Patterns in Integer Operations for Students with and without Specific Learning Disabilities: A Descriptive Analysis* [Doctoral dissertation]. The Pennsylvania State University.
12. Makonye, J. P., & Fakude, J. (2016). A Study of Errors and Misconceptions in the Learning of Addition and Subtraction of Directed Numbers in Grade 8. *SAGE Open*, *6*(4), 1–10. https://doi.org/10.1177/2158244016671375
13. Mohyuddin, R. G., & Khalil, U. (2016). Misconceptions of Students in Learning Mathematics at Primary Level. *Bulletin of Education and Research*, *38*(1), 133–162.
14. Owusu, A., Bornaa, C. S., Kwakye, D. O., & Iddrisu, A. B. (2023). Pre-service Mathematics Teachers' Errors and Misconceptions of Integer Operations. *Journal of Statistics and Mathematical Concepts*, *1*(2), 1–19. https://doi.org/10.58425/jsmc.v1i2.127

15. Permata, D., Wijayanti, P., & Masriyah. (2019). Students' misconceptions on the algebraic prerequisites concept: Operation of integer numbers and fractions. *IOP Conference Series: Journal of Physics: Conference Series*, *1188*(1), 012059. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1188/1/012059

16. Posner, G. J., Strike, K. A., Hewson, P. W., & Gertzog, W. A. (1982). Accommodation of a Scientific Conception: Toward a Theory of Conceptual Change. *Science Education*, *66*(2), 211–227.

17. Razali, N. M., & Yap, B. W. (2011). Power Comparisons of Shapiro–Wilk, Kolmogorov–Smirnov, Lilliefors and Anderson–Darling Tests. *Journal of Statistical Modeling and Analytics*, *2*(1), 21–33.

18. Rittle-Johnson, B., & Schneider, M. (2015). Developing Conceptual and Procedural Knowledge of Mathematics. U R. Cohen Kadosh i A. Dowker (Ur.), *The Oxford Handbook of Numerical Cognition* (str. 1118–1134). Oxford University Press.

19. Rittle-Johnson, B., & Siegler, R. S. (1998). The relation between conceptual and procedural knowledge in learning mathematics: A review. U C. Donlan (Ur.), *The Development of Mathematical Skills* (str. 75–110). Psychology Press.

20. Schoenherr, J., Strohmaier, A. R., & Schukajlow, S. (2024). Learning with visualizations helps: A meta-analysis of visualization interventions in mathematics education. *Educational Research Review*, *45*, 100639. https://doi.org/10.1016/j.edurev.2024.100639

21. Sfard, A. (2008). *Thinking as Communicating: Human Development, the Growth of Discourses, and Mathematizing*. Cambridge University Press.

22. Skemp, R. R. (1976). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics Teaching*, (77), 20–26.

23. Steiner, C. J. (2009). *A Study of Pre-Service Elementary Teachers' Conceptual Understanding of Integers* [Doctoral dissertation]. Kent State University.

24. Vlassis, J. (2004). Making sense of the minus sign or becoming flexible in `negativity'. *Learning and Instruction*, *14*, 469–484. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2004.06.012

25. Vlassis, J., & Demonty, I. (2022). The role of algebraic thinking in dealing with negative numbers. *ZDM – Mathematics Education*, *54*, 1243–1255. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01402-1

26. Vosniadou, S. (2013). Conceptual Change in Learning and Instruction. U S. Vosniadou (Ur.), *International Handbook of Research on Conceptual Change* (2. izd., str. 11–30). Routledge.

27. Young, L. K., &i Booth, J. L. (2020). Don't Eliminate the Negative: Influences of Negative Number Magnitude Knowledge on Algebra Performance and Learning. *Journal of Educational Psychology*, *112*(2), 384–396. https://doi.org/10.1037/edu0000371

THE EFFECT OF A SHORT INTERVENTION ON STUDENTS' MISCONCEPTIONS IN LEARNING AND CALCULATING WITH INTEGERS

This study examines students' level of understanding when working with integers, as well as the effect of a short, targeted didactic intervention aimed at addressing misconceptions and improving conceptual understanding. The study was conducted on a sample of 55 seventh-grade students, four months after formal instruction had taken place. The results indicate that students retain conceptual elements with greater difficulty than procedural knowledge. Difficulties were observed in tasks involving absolute value, identifying the predecessor and successor on the negative part of the number line, distinguishing the unary minus from subtraction, and translating word problems into mathematical expressions. The identified misconceptions tend to persist and multiply in more complex mathematical situations. Therefore, the results suggest the need for further systematic research and the development of instructional interventions aimed at conceptual change, as well as a deeper understanding of the difficulties students experience in the transition from arithmetic to algebraic thinking.

Keywords: misconceptions, integers, absolute value, sign of a number, didactic intervention

Prilog 1. Predtest

Cijeli brojevi

1. Koji cijeli brojevi z zadovoljavaju nejednakost :

   a) $-2 < z \leq 4$
   To su brojevi:_____

   b) $|z| = 10$
   To su brojevi:_____

   c) $|z| = -3$
   To su brojevi:_____

   d) $|z| \leq 2$
   To su brojevi:_____

2. U svakom retku je zadan jedan broj. Popuni tablicu tako da :

ZADANI BROJ z	SUPROTAN BROJ BROJA z	NEPOSREDNI PRETHODNIK BROJA z	NEPOSREDNI SLJEDBENIK BROJA z	APSOLUTNA VRIJEDNOST BROJA z
		21		
7				
-5				
			-22	

3. Izračunaj:

   a) $-9 + 3 =$
   b) $-9 - 3 =$
   c) $-9 - (-3) =$
   d) $-9 + (-3) =$
   e) $9 \cdot (-3) =$
   f) $-9 \cdot (-3) =$
   g) $9 : (-3) =$
   h) $-3 - 3 : (-3) =$

4. Izračunaj

   a) $-8 - 2 - 3 =$
   b) $-12 + 2 - 4 =$
   c) $|-12 + 2| =$
   d) $|-12| + |2| =$
   e) $(-6) \cdot 4 \cdot (-5) =$
   f) $38 - 18 \cdot (-4) - 14 =$

5. Izraz zapiši u obliku umnoška, a zatim izračunaj vrijednost izraza:

   a) $-7^2 =$
   b) $(-12)^2 =$

6. Temperatura je jutri u 5 sati bila -12°C, a u 11 sati je bila -3 °C. Za koliko se temperatura promijenila? Je li temperatura porasla ili pala?

7. Izračunaj apsolutnu vrijednost zbroja brojeva -5, -12 i 9.

Prilog 2. Posttest

Cijeli brojevi

1. Koji cijeli brojevi z zadovoljavaju nejednakost:

   a) $-3 \leq z < 5$
   To su brojevi:_____

   b) $|z| = -4$
   To su brojevi:_____

   c) $|z| = 17$
   To su brojevi:_____

   d) $|z| < 4$
   To su brojevi:_____

2. U svakom retku je zadan jedan broj. Popuni tablicu tako da :

ZADANI BROJ z	SUPROTAN BROJ BROJA z	NEPOSREDNI PRETHODNIK BROJA z	NEPOSREDNI SLJEDBENIK BROJA z	APSOLUTNA VRIJEDNOST BROJA z
			25	
8				
-6				
		-13		

3. Izračunaj:

   a) $-12 + 4 =$
   b) $-12 - 4 =$
   c) $-12 + (-4) =$
   d) $-12 - (-4) =$
   e) $-12 \cdot (-4) =$
   f) $-12 \cdot 4 =$
   g) $-12 : (-4) =$
   h) $-4 + 4 : (-4) - 4 =$

4. Izračunaj:

   a) $-15 + 3 - 7 =$
   b) $-11 - 5 - 1 =$
   c) $|-15 + 3| =$
   d) $|-15| + |3| =$
   e) $8 \cdot 2 \cdot (-5) =$
   f) $12 - 2 \cdot (-5) - 15 =$

5. Temperatura je jutri u 6 sati bila -11°C, a u 11 sati je bila -6 °C. Za koliko se temperatura promijenila? Je li temperatura porasla ili pala?

6. Izračunaj apsolutnu vrijednost zbroja brojeva -15, -5 i 3. Prvo zapiši izraz, a zatim izračunaj.