UDK: 001.98-057.87:[373.5.091-3:51]
37.016:514.11
https://doi.org/10.32728/mo.20.1.2025.04
Izvorni znanstveni rad

UČENIČKE MISKONCEPCIJE U TRIGONOMETRIJI PRAVOKUTNOG TROKUTA

Dijana Soldić
XII. gimnazija, Zagreb, Croatia
dijana.soldic@skole.hr

SAŽETAK

Rad istražuje učeničke miskoncepcije u području trigonometrije pravokutnog trokuta. Istraživanje je provedeno na uzorku od 58 učenika prvog razreda opće gimnazije. Instrument se sastojao od deset tvrdnji uz koje su učenici trebali odabrati jednu od ponuđenih kategorija te obrazložiti svoj odgovor. Rezultati pokazuju prisutnost konceptualnih nerazumijevanja vezanih uz definicije trigonometrijskih omjera, komplementarnost šiljastih kutova te odnose između sinusa i kosinusa. Kvantitativna analiza učestalosti odgovora dopunjena je kvalitativnom analizom obrazloženja učenika, što je omogućilo dublji uvid u strukturu pogrešnih zaključaka. Nalazi upućuju na potrebu sustavnog rada na razvoju konceptualnog razumijevanja te primjenu dijagnostičkih zadataka u nastavi matematike.

Ključne riječi: trigonometrija, pravokutni trokut, miskoncepcije, dijagnostičko vrednovanje

UVOD

Prema Kurikulumu nastavnog predmeta Matematika za gimnazije, učenici se u prvom razredu srednje škole prvi put susreću s trigonometrijom, tj. s trigonometrijskim omjerima u pravokutnom trokutu (Ministarstvo znanosti i obrazovanja, 2019). Do tada, sadržaji vezani uz trigonometriju pravokutnog trokuta obrađivali su se u drugom razredu srednje škole, dok su nakon cjelovite kurikularne reforme premješteni u prvi razred s ciljem boljeg povezivanja matematičkih sadržaja s drugim nastavnim predmetima u kojima se koriste matematički koncepti.

Trigonometrija, kao jedna od temeljnih područja matematike, nadilazi okvire matematičkog kurikula jer osim primjene u fizici, tehnici, geografiji, ima primjenu i u brojnim područjima znanosti i svakodnevnog života. Iznimno je konceptualno izazovna za učenike, a istraživanja pokazuju da učenici često imaju teškoće u konceptualnom razumijevanju trigonometrijskih pojmova i razvijaju različite miskoncepcije povezane s trigonometrijskim omjerima (Hamzah, Maat i Ikhsan, 2021). Konceptualno razumijevanje odnosi se na razumijevanje matematičkih pojmova, odnosa među njima i njihove međusobne povezanosti, dok proceduralno razumijevanje podrazumijeva poznavanje pravila, algoritama i postupaka potrebnih za rješavanje zadataka (Hiebert i Lefevre, 1986).

Prema Kurikulumu nastavnog predmeta Matematika za osnovne škole i gimnazije, jedan od odgojno-obrazovnih ishoda u prvom razredu srednje škole odnosi se na primjenu trigonometrijskih omjera za određivanje nepoznatih veličina u pravokutnom trokutu te rješavanje problemskih situacija u planimetriji (Ministarstvo znanosti i obrazovanja, 2019). Time se naglašava ne samo proceduralno poznavanje trigonometrijskih omjera, nego i njihova konceptualna primjena u različitim matematičkim kontekstima.

Cilj ovog istraživanja bio je detektirati pogrešna uvjerenja i razumjeti kako je do njih došlo, tj. što je uzrok. Također, predložit će se didaktičke intervencije u nastavi matematike koje bi mogle pomoći da se uočene miskoncepcije otklone. Ovakav pristup temeljen je na suvremenim istraživanjima koja naglašavaju važnost ranog prepoznavanja miskoncepcija, što pomaže u uspješnosti učenja.

Ovim radom doprinosi se boljem razumijevanju učeničkih poteškoća u učenju trigonometrije te potiče refleksija nastavnika o strategijama poučavanja i evaluacije učenikova razumijevanja. Odabir ove nastavne cjeline je važan jer je to prvi, ali ne i posljednji susret hrvatskih srednjoškolaca s trigonometrijom. Naime, spomenuta nastavna cjelina obrađuje trigonometrijske omjere u pravokutnom trokutu te njihovu primjenu na jednakokračan trokut, romb, paralelogram,

trapez te na problemske zadatke realnog konteksta, koje učenik može modelirati koristeći trigonometriju. Međutim, u drugom razredu srednje škole postojeće znanje proširuje se na tupokutan trokut (poučak o sinusu i poučak o kosinusu) te u trećem razredu srednje škole na trigonometrijske funkcije realnog broja. Stoga je jako bitno da učenik savlada gradivo trigonometrije pravokutnog trokuta i da miskoncepcija bude što manje. (Ministarstvo znanosti i obrazovanja, 2019).

TEORIJSKI OKVIR

Miskoncepcije u matematičkom učenju

Miskoncepcije se definiraju kao sustavna pogrešna uvjerenja koja učenici usvajaju tijekom procesa učenja. One se razlikuju od slučajnih pogrešaka jer su stabilne, predvidive i otporne na promjene (Aleifat i Tabieh, 2025). Važno je razlikovati pojam pogreške od pojma miskoncepcije. Pogreška predstavlja vidljivi netočan odgovor ili postupak učenika, koji može biti posljedica nepažnje, netočnosti u računanju ili trenutne nesigurnosti te ne mora nužno upućivati na nerazumijevanje matematičkog koncepta. S druge strane, miskoncepcije predstavljaju stabilnije i sustavnije oblike pogrešnog razumijevanja matematičkih koncepata koji proizlaze iz nepravilno izgrađenih mentalnih modela te dovode do ponavljanja određenih vrsta pogrešaka. Sve miskoncepcije mogu se promatrati kao pogreške, ali svaka pogreška nije nužno posljedica miskoncepcije (Eryılmaz i Sürmeli, 2002, prema Ay, 2017). Drugim riječima, pogreška može biti rezultat miskoncepcije, dok miskoncepcija predstavlja oblik razumijevanja koji sustavno proizvodi pogreške (Smith, diSessa i Roschelle, 1993, prema Ay, 2017). Također, pogreške mogu nastati iz različitih izvora poput jezičnih teškoća, pogrešne primjene pravila, rigidnosti mišljenja ili nedovoljnog ovladavanja prethodnim znanjima (Radatz, 1979).

Miskoncepcije u trigonometriji predstavljaju značajno područje istraživanja u matematičkom obrazovanju zbog njihove učestalosti i negativnog utjecaja na usvajanje složenijih matematičkih koncepata. Hamzah, Maat i Ikhsan (2021) u sustavnom pregledu literature navode kako se nepravilno usvojeni matematički koncepti mogu prenositi na nove sadržaje i stvarati dodatne poteškoće u učenju, pri čemu se miskoncepcije opisuju kao svojevrsna „snježna gruda" koja se s vremenom povećava. Autori također ističu kako su istraživanja u području trigonometrije najčešće usmjerena na identificiranje miskoncepcija, dok je manji broj istraživanja usmjeren na njihovo otklanjanje. Kao najčešće poteškoće navode se nerazumijevanje matematičkog jezika, pogrešna interpretacija

zadatka, neodgovarajući odabir trigonometrijskih formula te proceduralne i računske pogreške.

Budući da su matematički sadržaji povezani, a struktura spiralna, razumijevanje novih matematičkih sadržaja uvelike ovisi o prethodno usvojenim konceptima. Stoga učenici koji razviju miskoncepcije u ranijim sadržajima često prenose i nadograđuju ta pogrešna razumijevanja na složenije matematičke pojmove. Pregledi literature pokazuju kako su istraživanja u ovom području uglavnom usmjerena na identificiranje miskoncepcija, dok je manji broj istraživanja usmjeren na njihovo uklanjanje i razvoj učinkovitih nastavnih pristupa za njihovo prevladavanje (Ay, 2017).

Aleifat i Tabieh analiziraju velik broj znanstvenih radova o matematičkim miskoncepcijama (od 1947. do 2023.) s naglaskom na: glavne tematske kategorije (uključujući trigonometriju), najčešće miskoncepcije, najproduktivnije autore i institucije, ključne znanstvene časopise u tom području. Kvalitativnom analizom identificirane su 23 učestale matematičke miskoncepcije, koje su razvrstane u četiri kategorije: opće matematičke, algebarske, trigonometrijske i računske miskoncepcije, a prema bibliometrijskoj analizi Aleifata i Tabieha (2025), najčešće vrste miskoncepcija u matematici uključuju:

- **konceptualne** (npr. pogrešno shvaćanje definicije kuta)
- **proceduralne** (npr. mehaničko rješavanje bez razumijevanja)
- **vizualne** (npr. krivo interpretiranje dijagrama ili geometrijskog prikaza).

Autori navode da je učeničko obrazloženje ključno za razumijevanje pogrešaka, odnosno, ukoliko nastavnik ima obrazloženje učenika za korištenje određene metode ili postupka, može uočiti da je učenik do točnog odgovora došao pogrešnim putem ili da učenici pokazuju logičnu dosljednost u pogrešnim zaključcima. Autori članka napominju važnu ulogu nastavnika Matematike u identifikaciji miskoncepcija. Napominju da ako su nastavnici upoznati s miskoncepcijama, mogu aktivno raditi na njihovu sprječavanju, primjenom znanstvenih pristupa i modela. Učenicima se može pomoći da prepoznaju vlastite miskoncepcije te reorganiziraju i integriraju nova znanja (Aleifat i Tabieh, 2025). Autori su u okviru kvalitativne analize istaknuli trigonometriju kao jedna od četiri glavne kategorije matematičkih miskoncepcija.

Najčešće zabilježene trigonometrijske miskoncepcije

Aleifat i Tabieh (2025) identificiraju neke od najčešćih miskoncepcija i pogrešaka u trigonometriji, tj. one koji se pojavljuju u većem broju radova ili u radovima koji su najcitiraniji. Među njima se spominje:

- pogrešno uvjerenje da su vrijednosti trigonometrijskih funkcija uvijek pozitivne
- nejasno razumijevanje odnosa između kuta i vrijednosti funkcije
- vjerovanje da vrijednosti trigonometrijskih funkcija mogu biti izvan [0, 1] bez iznimki.

Miskoncepcije u trigonometriji vjerojatna su posljedica pogrešnih interpretacija duljina stranica trokuta, geometrijskih odnosa i sličnosti trokuta, odnosno gradiva koje prethodi ovoj cjelini i prirodni je slijed kako bi se gradivo trebalo obrađivati. Prethodno gradivo svakako ima bitnu ulogu u formiranju miskoncepcija, što potvrđuju i brojna istraživanja i radovi kojima se bave spomenuti autori. Aleifat i Tabieh (2025) napominju da ako je nova informacija u suprotnosti s postojećim znanjem, postojeće razumijevanje mora se reorganizirati. Često se te miskoncepcije isprepliću s drugim miskoncepcijama, što dovodi do začaranog kruga pogrešnih predodžbi.

Aleifat i Tabieh (2025) u svom radu preporučuju:

- korištenje višerazinskih dijagnostičkih alata
- aktivno uključivanje učenika u obrazlaganje vlastitih stavova
- poticanje konceptualne (ne samo proceduralne) jasnoće.

Aleifat i Tabieh (2025) ističu kako odgovarajući nastavni pristupi i strategije mogu pomoći u sprječavanju razvoja miskoncepcija te omogućiti učenicima prepoznavanje, reorganizaciju i integraciju matematičkih informacija na konceptualno ispravniji način.

I drugi autori bave se miskoncepcijama u trigonometriji. U studiji Jatisunde i Ramadhana (2025) ističe se da učenici često:

- ne razumiju vezu trigonometrijskih omjera i veličine kuta
- miješaju trigonometrijske funkcije (npr. tangens i kotangens)
- vjeruju da su trigonometrijske vrijednosti fiksne (npr. da je sinus uvijek veći od kosinusa).

Za potrebe provedenog istraživanja kreiran je upitnik kojim se pokušalo ciljati upravo takve i slične učeničke miskoncepcije.

Istraživanje Muhaimina et al. (2024) pokazuje da neki učenici, koji uspješno rješavaju zadatke, često nemaju konceptualno razumijevanje definicija trigonometrijskih omjera. Dolazi se do zaključka da je uloga nastavnika ključna, ne samo u podučavanju kao izlaganju sadržaja, nego i u dijagnosticiranju i ispravljanju pogrešaka. Ovo istraživanje pokazuje da je korištenje dijagnostičkih alata vrlo učinkovito. Također, jednostavniji instrumenti i alati, poput niza tvrdnji koje učenici trebaju kategorizirati (''uvijek'', ''nekad'', ''nikad'') također mogu biti vrlo korisni. Takvi instrumenti omogućuju detaljniji uvid u način razmišljanja učenika, njihovo konceptualno razumijevanje i obrasce matematičkog zaključivanja. Takvi zadaci potiču učenike na argumentaciju, generalizaciju i opravdavanje vlastitih tvrdnji, zbog čega se često koriste kao dijagnostički alat u istraživanjima matematičkog obrazovanja (Buchbinder i Zaslavsky, 2013). Keeley i Tobey (2011) ističu kako ovaj tip zadataka pomaže u otkrivanju pretjeranih generalizacija, pogrešnih interpretacija i ograničenja u razumijevanju matematičkih ideja, odnosno obrazaca mišljenja koji mogu upućivati na postojanje miskoncepcija. Korištenje dijagnostičkih alata koji zahtijevaju od učenika da obrazlože svoje odgovore, kao što je to bio slučaj i u ovom istraživanju, ističe kao vrijedna metoda za prepoznavanje dubinskog nerazumijevanja ili miskoncepcija kod učenika (Keeley i Tobey, 2011).

CILJ I ISTRAŽIVAČKA PITANJA

Cilj provedenog istraživanja bio je identificirati i analizirati učeničke miskoncepcije s trigonometrijskim omjerima u pravokutnom trokutu. Osobito je važno kako učenici kategoriziraju matematičke tvrdnje (''uvijek'', ''nekad'', ''nikad'') te koja obrazloženja daju za svoj odabir. Ovakav pristup omogućava ne samo kvantitativnu obradu odgovora, nego i kvalitativni uvid u misaone procese učenika.

Istraživanje je usmjereno na sljedeća istraživačka pitanja:

1. Koje su najčešće miskoncepcije učenika vezane uz trigonometriju pravokutnog trokuta?
2. Kako učenici obrazlažu svoj odabir tvrdnji i što njihova obrazloženja otkrivaju o njihovom razumijevanju trigonometrijskih omjera?
3. U kojoj mjeri se učeničke miskoncepcije podudaraju s onim miskoncepcijama u prethodnim istraživanjima?

METODE

Istraživanje je provedeno kao empirijsko deskriptivno presječno istraživanje s elementima mješovitog metodološkog pristupa. Kvantitativna komponenta obuhvaćala je analizu distribucije odgovora na dijagnostički instrument, dok je kvalitativna komponenta uključivala sustavnu sadržajnu analizu učeničkih obrazloženja. Takav pristup omogućio je triangulaciju podataka i pouzdaniju interpretaciju uočenih miskoncepcija.

Istraživanja miskoncepcija u matematici najčešće koriste dijagnostičke testove, zadatke otvorenog tipa i intervjue kako bi se omogućio detaljniji uvid u učeničko razumijevanje matematičkih koncepata (Ay, 2017). Posebno se naglašava važnost kvalitativne analize učeničkih odgovora jer sam netočan odgovor nije dovoljan pokazatelj postojanja miskoncepcije, budući da može biti posljedica nedostatka znanja, pogrešne interpretacije zadatka ili trenutnih teškoća u zaključivanju (Ay, 2017). U istraživanjima matematičkih miskoncepcija, osobito u području trigonometrije, često se koriste dijagnostički testovi i analiza učeničkih odgovora s ciljem identificiranja dominantnih obrazaca pogrešnog razumijevanja matematičkih koncepata (Hamzah, Maat i Ikhsan, 2021).

Uzorak ispitanika

Istraživanje je provedeno u tri prva razreda opće gimnazije u Zagrebu, tijekom obrade nastavne cjeline *Trigonometrija pravokutnog trokuta*. U istraživanju je sudjelovalo ukupno 58 učenika (od toga 33 djevojaka i 25 mladića) iz tri prva razreda, tj. svi učenici koji su pristali sudjelovati u istraživanju. U razredima predaju dvije različite profesorice matematike koje su dobile jasnu uputu za provedbu ove aktivnosti. Učenici su imali 20 minuta za popunjavanje nastavnog listića, a nastavnici nisu ničim utjecali na njihove odgovore niti obrazloženja.

Za potrebe ovog istraživanja osiguran je pristanak ravnateljice škole u kojoj se istraživanje provodilo. Također, osigurana je suglasnost učenika koji su sudjelovali u istraživanju. Učenici i roditelji obaviješteni su o svrsi, cilju i postupcima istraživanja, razini anonimnosti, načinu pohranjivanja podataka i kontakt osobi kojoj se mogu obratiti, te o mogućnosti odustajanja od sudjelovanja u istraživanju. Provedene aktivnosti ne narušavaju nastavni plan i program, nego se one implementiraju u postojeći, pa je etičnost provedbe istraživanja zadovoljena. Identitet sudionika apsolutno je zaštićen na način da su podatci s imenima učenika pohranjeni pod lozinkom i dostupni su isključivo istraživaču, a svi rezultati koji budu objavljeni bit će anonimni.

Instrument istraživanja

Aktivnost *Vrijedi uvijek, nekad ili nikad* podrazumijeva listu izjava koju učenici pregledavaju i odlučuju vrijedi li dana izjava uvijek, nekad ili nikad. Ova aktivnost je korisna za otkrivanje generaliziraju li učenici ispravno svojstva vezana uz pojedine matematičke koncepte, ali i za otkrivanje miskoncepcija. Takav tip zadataka omogućuje uvid u učeničko konceptualno razumijevanje matematičkih pojmova te otkrivanje mogućih miskoncepcija, budući da od učenika zahtijeva argumentaciju, navođenje primjera i protuprimjera te obrazlaganje vlastitog načina razmišljanja (Keeley i Tobey, 2011).

U ovom istraživanju ta aktivnost koristi se pri početku nastavne cjeline, a osigurava jasnu povratnu informaciju o učeničkom razumijevanju započete nastavne cjeline. Sadržaji koji su obrađeni su definicije trigonometrijskih omjera šiljastih kutova pravokutnog trokuta i osnovni trigonometrijski identiteti.

Za potrebe ovog istraživanja kreiran je nastavni listić koji se sastojao od deset tvrdnji vezanih uz trigonometrijske omjere u pravokutnom trokutu. Svaka tvrdnja je oblikovana tako da razotkrije moguće pogrešne predodžbe (miskoncepcije). Tvrdnje su oblikovane na temelju dosadašnjih istraživanja učeničkih miskoncepcija u matematici i trigonometriji (Hamzah, Maat i Ikhsan, 2021; Jatisunda i Ramadhana, 2025), kao i na temelju iskustva u radu s učenicima. Učenici su za svaku danu tvrdnju trebali odabrati vrijedi li ona uvijek, nekad ili nikad, a potom obrazložiti svoj odabir. Time je instrument služio ne samo kao alat za kvantitativno mjerenje učestalosti određenih odgovora, nego kao i dijagnostičko sredstvo, odnosno pomoću njega se dobio uvid u učeničko razumijevanje.

U tablici 1 je primjer tog nastavnog listića (*kurzivom* su naznačeni točni odgovori te neki od mogućih obrazloženja).

Tablica 1. Primjer nastavnog listića *Vrijedi uvijek, nekad ili nikad*

1. Sinus i kosinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta veći su od 1. ☐ uvijek ☐ nekad ☒ nikad	**Obrazloži** *Sinus i kosinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta su omjeri duljina njegovih kateta i hipotenuze. S obzirom da je hipotenuza dulja od kateta, taj omjer je manji od 1.*
2. Sinus kuta je veći od kosinusa kuta. ☐ uvijek ☒ nekad ☐ nikad	**Obrazloži** *Sinus će biti veći od kosinusa kuta ukoliko je duljina katete nasuprot tom kutu veća od duljine katete priležeće tom kutu.*
3. Kosinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je 0.5. ☐ uvijek ☒ nekad ☐ nikad	**Obrazloži** *Kosinus je omjer duljina priležeće katete i hipotenuze. Ako je duljina priležeće katete jednaka polovini duljine hipotenuze, kosinus će biti jednak 0.5 (npr. kad je kut veličine 60°).*
4. Sinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta može biti jednak kosinusu istog kuta ☐ uvijek ☒ nekad ☐ nikad	**Obrazloži** *Sinus i kosinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednaki su u slučaju kad je kut veličine 45°. Radi se o jednakokračnom pravokutnom trokutu, pa su katete jednakih duljine, tj. omjer kateta i hipotenuze jednak je.*
5. Sinus jednog šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je kosinusu drugog šiljastog kuta tog trokuta. ☒ uvijek ☐ nekad ☐ nikad	**Obrazloži** *Ako promatramo dva šiljasta kuta u pravokutnom trokutu, vidimo da što je jednom kutu nasuprotna, to je drugom kutu priležeća kateta, tako da je sinus jednog kuta uvijek jednak kosinusu drugog kuta.*
6. Ako se vrijednosti svih stranica pravokutnog trokuta udvostruče, vrijednosti sinusa i kosinusa ostaju iste. ☒ uvijek ☐ nekad ☐ nikad	**Obrazloži** *Trigonometrijski omjeri ostaju isti ako se sve stranice povećaju/smanje jednaki broj puta.* *Takvi trokuti su slični trokuti jer su im se stranice proporcionalno povećale, a u sličnim trokutima su kutovi istih veličina. Kako se veličine kutova nisu mijenjale, unatoč udvostručenju duljina stranica, sinus i kosinus su ostali isti.*
7. Umnožak tangensa i kotangensa šiljastog kuta u pravokutnom trokuta jednaka je 1. ☒ uvijek ☐ nekad ☐ nikad	**Obrazloži** *Tangens je omjer duljina nasuprotne i priležeće katete, a kotangens omjer duljina priležeće i nasuprotne katete pravokutnog trokuta. Za takve vrijednosti kažemo da su recipročne i njihov umnožak je jednak 1.*
8. Zbroj sinusa i kosinusa istog šiljastog kuta u pravokutnom trokutu veći je od 1. ☒ uvijek ☐ nekad ☐ nikad	**Obrazloži** $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$ *a+b>c, zbog nejednakosti trokuta, pa je ovaj razlomak uvijek veći od 1.*
9. Tangens i kotangens šiljastog kuta u pravokutnom trokutu mogu biti negativni brojevi. ☐ uvijek ☐ nekad ☒ nikad	**Obrazloži** *Tangens i kotangens omjeri su duljina kateta. S obzirom da su duljine kateta pozitivni brojevi, onda je i taj omjer pozitivan broj.*
10. Zbroj kvadrata sinusa i kosinusa bilo kojeg šiljastog kuta uvijek je jednak jedan. ☒ uvijek ☐ nekad ☐ nikad	$\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$ *, osnovni trigonometrijski identitet.* $\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{c^2}=\frac{c^2}{c^2}=1$

Prva tvrdnja: ***„Sinus i kosinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta veći su od 1.“*** Ovom tvrdnjom ispituje se vjerovanje učenika da vrijednosti trigonometrijskih funkcija nemaju gornju granicu. Takva je miskoncepcija

česta jer učenici poistovjećuju trigonometrijske omjere s duljinama stranica trokuta, dulje stranice povezuju s većim vrijednostima funkcija, zaboravljajući da su funkcije sinus i kosinus omjeri kateta i hipotenuze, pri čemu je hipotenuza pravokutnog trokuta najdulja stranica, pa je i taj omjer uvijek manji od 1.

Druga tvrdnja: ***„Sinus kuta je veći od kosinusa kuta."***

Njome se otkrivaju učenici koji su skloni generalizirati odnos između sinusa i kosinusa kao univerzalni, bez razumijevanja da taj odnos ovisi o veličini kuta. Radi se o pogrešnoj generalizaciji iz učeničkog iskustva, npr. promatranje određenog kuta gdje je sinus doista veći.

Treća tvrdnja: ***„Kosinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je 0.5."*** Ovom tvrdnjom se ispituje sklonost učenika mehaničkom pamćenju poznatih vrijednosti, ali bez razumijevanja da se ta vrijednost odnosi samo na određeni kut.

Četvrta tvrdnja: ***„Sinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta može biti jednak kosinusu istog kuta."*** Ovdje se provjerava razumiju li učenici mogućnost jednakosti sinusa i kosinusa pri specifičnoj vrijednosti kuta (45°). Pogrešan odgovor ukazuje na teškoće u razumijevanju međusobnog odnosa funkcija unutar istog kuta. Također, učenici ne uzimaju u obzir da pravokutan trokut može biti i jednakokračan.

Peta tvrdnja: ***„Sinus jednog šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je kosinusu drugog šiljastog kuta tog trokuta."*** Ovom tvrdnjom provjerava se razumijevanje povezanosti komplementarnih kutova u pravokutnom trokutu. Tipična miskoncepcija sastoji se u tome da ne razumiju komplementarnost kuteva kao osnovu odnosa trigonometrijskih funkcija.

Šesta tvrdnja: ***„Ako se vrijednosti svih stranica pravokutnog trokuta udvostruče, vrijednosti sinusa i kosinusa ostaju iste."*** Svrha je provjeriti prepoznaju li učenici da se trigonometrijski omjeri ne mijenjaju proporcionalnim povećanjem trokuta. Pogrešan odgovor upućuje na nerazlikovanje duljina stranica i omjera duljina stranica. Također, učenici ne povezuju gradivo i ne koriste naučena svojstva sličnosti trokuta i pogrešno zaključuju da je povećanjem svih stranica trokuta određeni broj puta, taj isti broj puta povećavaju i veličine unutarnjih kutova.

Sedma tvrdnja: ***„Umnožak tangensa i kotangensa šiljastog kuta u pravokutnom trokutu jednak je 1."*** Ovom tvrdnjom provjerava se poznavanje međusobnih odnosa trigonometrijskih funkcija. Miskoncepcija koja se ovdje javlja odnosi se na pogrešna uvjerenja da taj umnožak može poprimiti različite vrijednosti ili da vrijedi samo za posebne kutove.

Osma tvrdnja je: ***„Zbroj sinusa i kosinusa istog šiljastog kuta u pravokutnom trokutu veći je od 1."*** Ovom tvrdnjom ispituje se razumijevanje da sinus i kosinus istog šiljastog kuta zajedno uvijek daju vrijednosti veće od 1, a ne samo u posebnim slučajevima. Pogrešni odgovori otkrivaju površno razumijevanje i oslanjanje na intuitivne pretpostavke, umjesto na provjeru matematičkih odnosa.

Deveta tvrdnja: ***„Tangens i kotangens šiljastog kuta u pravokutnom trokutu mogu biti negativni brojevi."*** Svrha tvrdnje je provjeriti razumiju li učenici da u pravokutnom trokutu svi trigonometrijski omjeri šiljastih kutova imaju pozitivne vrijednosti. Pogrešni odgovori upućuju na to da učenici ne povezuju trigonometrijske omjere s duljinama stranica trokuta koje uvijek imaju pozitivne vrijednosti.

Deseta tvrdnja: ***„Zbroj kvadrata sinusa i kosinusa bilo kojeg šiljastog kuta uvijek je jednak jedan."*** Ovom tvrdnjom provjerava se temeljno razumijevanje Pitagorinog poučka i osnova trigonometrijskih omjera. Pogrešni odgovori ukazuju na nedostatak u razumijevanju osnovnih algebarsko-geometrijskih veza među funkcijama.

Tvrdnje u nastavnom listiću nisu preuzete iz pojedinog postojećeg instrumenta, nego su autorski oblikovane na temelju kurikulumskih sadržaja, nastavničkog iskustva i uvida iz literature o učeničkim pogreškama i miskoncepcijama u trigonometriji. Polazište za oblikovanje tvrdnji bio je kurikulumski ishod MAT SŠ D.1.3., prema kojem učenici primjenjuju trigonometrijske omjere pri rješavanju problema u planimetriji i određivanju nepoznatih veličina u pravokutnome trokutu (Ministarstvo znanosti i obrazovanja, 2019). Tvrdnje obuhvaćaju nekoliko kategorija miskoncepcija. Kategorije miskoncepcija nisu preuzete iz postojećeg klasifikacijskog modela, nego su oblikovane za potrebe ovog istraživanja na temelju uočenih obrazaca učeničkih odgovora, kurikulumskih sadržaja i tipova teškoća opisanih u literaturi o matematičkim miskoncepcijama i miskoncepcijama u trigonometriji. U literaturi postoje različiti pristupi klasifikaciji matematičkih pogrešaka i miskoncepcija, pri čemu kategorije često ovise o cilju istraživanja i matematičkom sadržaju koji se ispituje.

Za potrebe ovog rada oblikovane su sljedeće kategorije:

- **konceptualne** povezane s nerazumijevanjem osnovnih svojstava trigonometrijskih omjera i njihovih vrijednosti (npr. vjerovanje da sinus ili kosinus mogu imati vrijednosti veće od 1).Tvrdnje 1, 3, 8, 9 i 10 usmjerene su na konceptualno razumijevanje definicije i svojstava trigonometrijskih omjera. Njima se ispituje razumiju li učenici da su sinus, kosinus, tangens i kotangens u pravokutnom trokutu definirani

kao omjeri duljina stranica pravokutnog trokuta (Hamzah, Maat i Ikhsan, 2021; Jatisunda i Ramadhana, 2025)

- **relacijske** povezane s nerazumijevanjem odnosa između trigonometrijskih funkcija (npr. pogrešno shvaćanje odnosa sinusa i kosinusa istog ili komplementarnih kutova)

Tvrdnje 2, 4, 5 i 7 odnose se na relacijsko razumijevanje, odnosno na povezivanje sinusa i kosinusa istog ili komplementarnih kutova te tangensa i kotangensa kao recipročnih omjera (Hamzah, Maat i Ikhsan, 2021; Jatisunda i Ramadhana, 2025)

- **logičko-deduktivne** nepotpuno ili pogrešno zaključivanje (npr. pretpostavke da se povećanjem duljina stranica povećavaju i vrijednosti trigonometrijskih funkcija šiljastog kuta pravokutnog trokuta).

Tvrdnja 6 ispituje razumijevanje da se proporcionalnom promjenom duljina svih stranica trokuta vrijednosti trigonometrijskih omjera ne mijenjaju.

Sadržajna valjanost instrumenta osigurana je stručnom procjenom troje nastavnika matematike s višegodišnjim iskustvom rada u gimnaziji te jednog sveučilišnog nastavnika metodike matematike. Procjena je obuhvaćala jasnoću formulacija tvrdnji, usklađenost s nastavnim kurikulumom te primjerenost razini znanja učenika prvog razreda gimnazije. Na temelju zaprimljenih komentara izvršene su manje jezične i terminološke dorade radi povećanja preciznosti i jednoznačnosti tvrdnji. Ovako kreiran instrument omogućuje dvostruku analizu podataka – kvantitativnom analizom otkrivamo distribuciju učeničkih uvjerenja za svaku tvrdnju, a kvalitativnom analizom učeničkih obrazloženja dobivamo uvid u razloge učeničkog odabira i uočavamo (ne)razumijevanje i obrasce u razmišljanju. Posebna pažnja posvećena je formuliranju tvrdnji tako da potiču konceptualno promišljanje, a ne mehaničko prisjećanje definicija.

Analiza podataka

Prikupljeni odgovori obrađeni su u dva koraka:

1. **Kvantitativna analiza** – odgovori su kodirani numerički (1 = Točno, 2 = Netočno, 3 = Bez odgovora) i analizirani deskriptivnom statistikom (frekvencije, postotci). Distribucija odgovora omogućila je identificiranje tvrdnji koje su učenici najčešće pogrešno interpretirali.
2. **Kvalitativna analiza** – obrazloženja učenika analizirana su sadržajnom analizom s ciljem prepoznavanja obrazaca pogrešnog zaključivanja i logičkih dosljednosti u miskoncepcijama.

Kvalitativna analiza učeničkih obrazloženja provedena je metodom sadržajne analize u više koraka. U prvom koraku svi odgovori pročitani su u cijelosti kako bi se stekao uvid u dominantne obrasce rezoniranja. U drugom koraku identificirani su netočni, nepotpuni ili konceptualno problematični obrasci zaključivanja. Slični odgovori zatim su grupirani u zajedničke kategorije tj. grupirani su prema sličnim obrascima rezoniranja i tipovima pogrešnih zaključaka.

Primjerice, odgovori u kojima učenici navode da pravokutan trokut ne može biti jednakokračan grupirani su u kategoriju konceptualne miskoncepcije.

Kod tvrdnje o udvostručavanju duljina stranica trokuta identificirani su odgovori u kojima učenici zaključuju da se povećanjem duljina stranica povećavaju i vrijednosti sinusa i kosinusa. Ti su odgovori grupirani u kategoriju logičko-deduktivne.

Posebna pažnja posvećena je načinima na koje učenici argumentiraju svoje odgovore, uključujući generalizacije, pogrešne analogije, mehaničko korištenje formula i oslanjanje na izolirane primjere.

REZULTATI I RASPRAVA

U ovom poglavlju prikazani su rezultati provedenog istraživanja, kao i interpretacija rezultata u kontekstu postojećih spoznaja o učeničkim miskoncepcijama u trigonometriji.

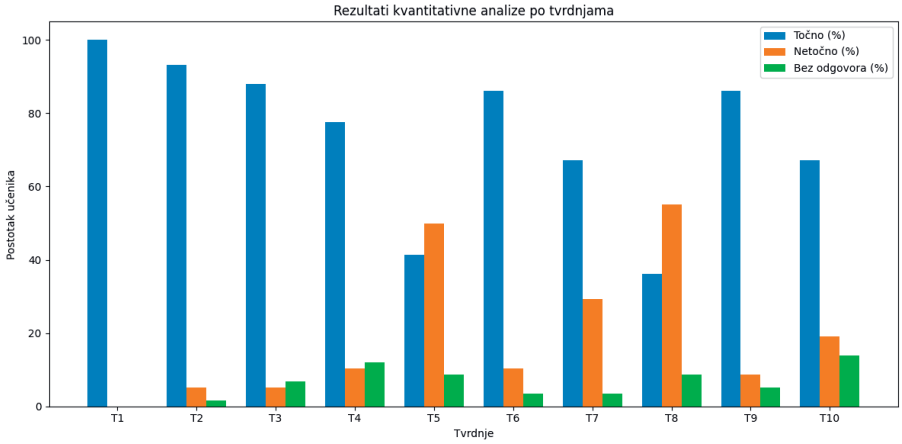
Za svaku izjavu prikazani su kvantitativni i kvalitativni rezultati i interpretacija rezultata na sljedeći način:

Kvantitativni rezultati

Prikazana je statistička analiza rezultata prikupljenih ovim istraživanjem. Učenički odgovori distribuiraju se za svaku od deset tvrdnji s nastavnog listića. Rezultati su prikazani iza svake izjave posebno kako bi se jasnije uočili obrasci i učestalost pojedinih miskoncepcija.

Tablica 2. Kvantitativni rezultati po tvrdnjama i miskoncepcijama

Tvrdnja	Točan odgovor	Točno (%)	Netočno (%)	Bez odgovora (%)	Najčešće pogrešno uvjerenje / potencijalna miskoncepcija
1. Sinus i kosinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta veći su od 1.	Nikad	100.0	0.0	0.0	Nije uočena značajnija miskoncepcija
2. Sinus kuta je veći od kosinusa kuta.	Nekad	93.1	5.2	1.7	Generalizacija da je sinus uvijek ili nikad veći od kosinusa
3. Kosinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je 0.5.	Nekad	87.9	5.2	6.9	Mehaničko pamćenje posebnih vrijednosti bez razumijevanja
4. Sinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta može biti jednak kosinusu istog kuta.	Nekad	77.6	10.3	12.1	Nerazumijevanje da pravokutni trokut može biti jednakokračan
5. Sinus jednog šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je kosinusu drugog šiljastog kuta tog trokuta.	Uvijek	41.4	50.0	8.6	Nerazumijevanje odnosa komplementarnih kutova
6. Ako se vrijednosti svih stranica pravokutnog trokuta udvostruče, vrijednosti sinusa i kosinusa ostaju iste.	Uvijek	86.2	10.3	3.4	Poistovjećivanje duljina stranica i vrijednosti omjera
7. Umnožak tangensa i kotangensa šiljastog kuta u pravokutnom trokutu jednak je 1.	Uvijek	67.2	29.3	3.4	Nerazumijevanje recipročnog odnosa tangensa i kotangensa
8. Zbroj sinusa i kosinusa istog šiljastog kuta u pravokutnom trokutu veći je od 1.	Uvijek	36.2	55.2	8.6	Pretjerano oslanjanje na posebne slučajeve i nerazumijevanje odnosa među omjerima
9. Tangens i kotangens šiljastog kuta u pravokutnom trokutu mogu biti negativni brojevi.	Nikad	86.2	8.6	5.2	Nepovezivanje omjera s pozitivnim duljinama stranica
10. Zbroj kvadrata sinusa i kosinusa bilo kojeg šiljastog kuta uvijek je jednak jedan.	Uvijek	67.2	19.0	13.8	Nerazlikovanje identiteta od posebnih slučajeva



Slika 1. Dijagram kvantitativne analize učeničkih odgovora

Kvalitativna interpretacija

U drugom dijelu kvalitativno se analiziraju učenička obrazloženja za svaku pojedinu tvrdnju. Izdvajaju se najzanimljivija obrazloženja i neka reprezentativna, kao i ona koja upućuju na miskoncepcije. Ova analiza omogućuje dublji uvid u učeničke pogreške, njihovo razumijevanje i logiku zaključivanja, tako da analizira obrazloženja kojima učenici opravdavaju svoj odabir.

Kratak sažetak rezultata:

- najbolje riješene tvrdnje: 1. izjava (100%), 2. izjava (93.1%), 3. izjava (87.9%)
- najslabije riješene tvrdnje: 8. izjava (36.2%), 5. izjava (41.4%), 7. i 10. izjava (~67%)

Najčešće miskoncepcije:

- poistovjećivanje omjera s duljinama stranica (6. izjava)
- nerazumijevanje odnosa komplementarnih kutova (5. izjava)
- nesigurnost oko trigonometrijskih identiteta (7. i 10. izjava)
- pogreške oko odnosa sinusa i kosinusa (2. i 4. izjava)

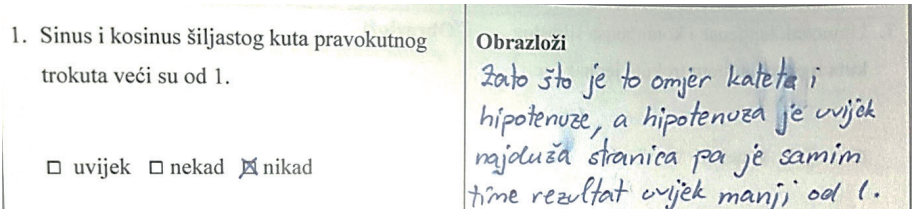
Prva tvrdnja: ***„Sinus i kosinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta veći su od 1.“***

Rezultati za prvu tvrdnju:

- Točno odgovorilo: **58 učenika (100%)** – „Nikad“

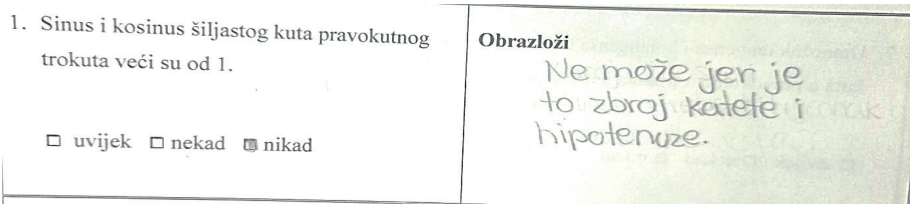
- Netočnih odgovora: 0 (0%)
- Bez odgovora: 0 (0%)

Prva tvrdnja pokazuje da učenici razumiju osnovno pravilo: sinus i kosinus su uvijek u intervalu [0,1]. Miskoncepcija „vrijednosti mogu biti veće od 1" ovdje se nije pojavila. Analizom učeničkih obrazloženja uočava se da većina učenika obrazlaže na ispravan način, tj. opisuje sinus i kosinus kao omjer, tj. razlomak gdje je nazivnik uvijek veći broj jer se radi o duljini hipotenuze pravokutnog trokuta.



Slika 2. Primjer učeničkog rješenja za 1. tvrdnju

Međutim, nekoliko učeničkih radova nema obrazloženje ili je obrazloženje manjkavo kao što je sljedeći primjer, gdje se vidi da učenica ne poznaje osnovni koncept trigonometrijskih omjera sinusa i kosinusa, iako je odabrala točan odgovor za danu tvrdnju.



Slika 3. Primjer učeničkog rješenja za 1. Tvrdnju

Druga tvrdnja: ***„Sinus kuta je veći od kosinusa kuta."***

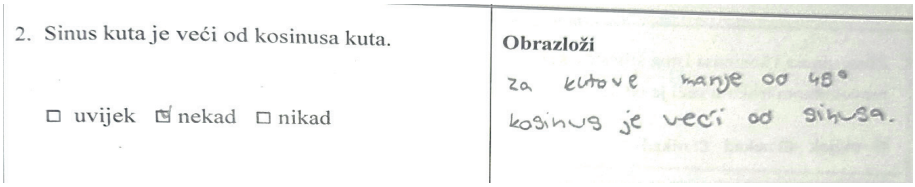
Rezultati za drugu tvrdnju:

- Točno: **54 učenika (93.1%)** – „Nekad"
- Netočno: 3 učenika (5.2%) (2 „Nikad", 1 „Uvijek")
- Bez odgovora: 1 učenik (1.7%)

Većina prepoznaje da odnos sinusa i kosinusa ovisi o veličini kuta. Mali broj učenika smatra da sinus nikad nije veći od kosinusa (miskoncepcija: kosinus se doživljava kao „glavna" funkcija). Jedan učenik misli da je sinus uvijek

veći, što upućuje na generalizaciju iz ograničenih primjera. Među njihovim obrazloženjima uočavaju se i neke neočekivane miskoncepcije. Primjer: „*Stranica a je uvijek dulja od stranice b, pa je i sinus kuta veći*".

Učenici koji su točno odgovorili daju korektna obrazloženja, više ili manje potpuna. Izdvojit ćemo obrazloženje koje se pojavilo nekoliko puta, gdje su učenici, osim što su napomenuli da ovisi o duljini stranica, zaključili da je za kutove manje od 45° vrijednost kosinusa veća od vrijednosti sinusa.



Slika 4. Primjer učeničkog rješenja za 2. Tvrdnju

Treća tvrdnja: ***„Kosinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je 0.5."***

Rezultati za treću tvrdnju:

- Točno: **51 učenik (87.9%)** – „Nekad"
- Netočno: 3 učenika (5.2%) (2 „Uvijek", 1 „Nikad")
- Bez odgovora: 4 učenika (6.9%)

Učenici uglavnom prepoznaju da kosinus ima vrijednost 0.5 samo za određene kutove (npr. 60°). Pogrešni odgovori otkrivaju miskoncepcije: „Uvijek" - krivo pamćenje tablične vrijednosti, „Nikad" - negiranje poznatog primjera.

Učenici koji su točno odgovorili obrazložili su tvrdnju na sljedeće načine: ''*Može biti, kad je priležeća kateta dvostruko manja od hipotenuze.*"; ''*Kad je kut veličine 60°.*"

Međutim, među učenicima koji su točno odgovorili kriju se neočekivani odgovori, kao što je: ''*Uvijek, zato što je priležeća kateta dvostruko manja od hipotenuze*."

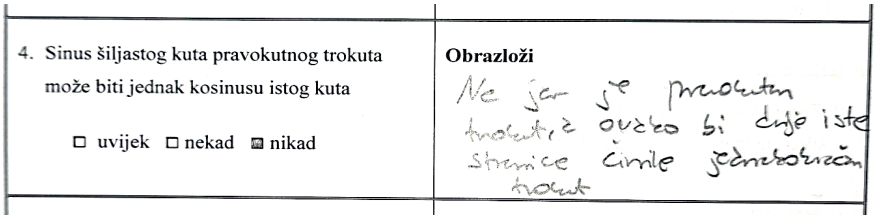
Četvrta tvrdnja: ***„Sinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta može biti jednak kosinusu istog kuta."***

Rezultati za četvrtu tvrdnju:

- Točno: **45 učenika (77.6%)** – „Nekad"
- Netočno: 6 učenika (10.3%) (3 „Uvijek", 3 „Nikad")
- Bez odgovora: 7 učenika (12.1%)

Ovdje se javlja veća nesigurnost. Dio učenika nije odgovorio, što pokazuje da nisu sigurni u poseban slučaj kuta od 45°. Pogrešni odgovori otkrivaju miskoncepcije: „Uvijek" - nerazumijevanje varijabilnosti funkcija, „Nikad" – ne uzimajući u ozbir kutove od 45°.

Među učeničkim odgovorima možemo pronaći nekolicinu miskoncepcija. Među njima se ističu one u kojima učenici napominju da bi se u slučaju istinitosti tvrdnje moralo raditi o jednakokračnom trokutu, ne uzimajući u obzir pritom da pravokutan trokut može biti jednakokračan. Na primjer, učenik odabire „Nikad", te obrazlaže: „Ne, jer je to pravokutni trokut. Kad bi to bilo tako, trokut bi bio jednakokračan." Drugi učenik to potvrđuje: „Kad bi sinus i kosinus bili jednaki, trokut bi morao biti jednakokračan, a ne pravokutni." Treći učenik nudi slično obrazloženje, navodeći da su „katete različitih duljina". Četvrti učenik također tvrdi da je „to nemoguće, jer takav trokut ne bi bio pravokutni, nego jednakokračan."



Slika 5. Primjer učeničkog rješenja za 4. Tvrdnju

Peta tvrdnja: ***„Sinus jednog šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je kosinusu drugog šiljastog kuta tog trokuta."***

Rezultati za petu tvrdnju:

- Točno: **24 učenika (41.4%)** – „Uvijek"
- Netočno: 29 učenika (50%) (26 „Nekad", 3 „Nikad")
- Bez odgovora: 5 učenika (8.6%)

Većina učenika ne prepoznaje komplementarnost kutova u pravokutnom trokutu. Ovo otkriva veliku slabost u konceptualnom razumijevanju. Veliki broj učenika nije obrazložilo svoj odabir. Učenici koji su točno odgovorili najčešće su crtali trokute, označili stranice i kutove te uz sliku napisali omjere za sinus i kosinus kutova, pri čemu se vidi da je taj omjer jednak. Učenici koji nisu točno odgovorili najčešće su pisali obrazloženja u kojim je vidljivo da misle kako katete moraju biti jednakih duljina da bi sinus i kosinus kutova bili jednaki i da je to jedini slučaj.

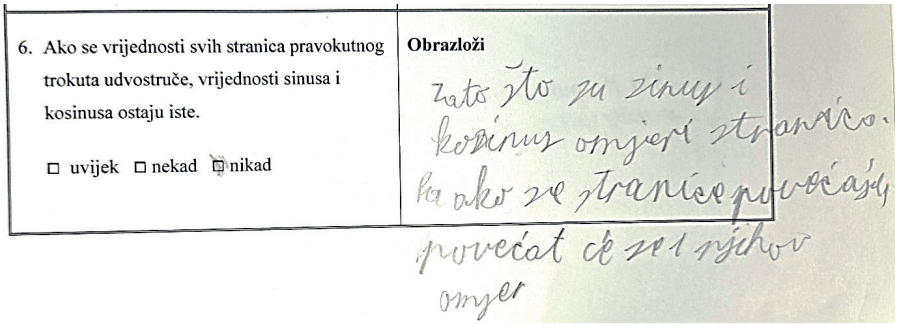
Šesta tvrdnja: ***„Ako se vrijednosti svih stranica pravokutnog trokuta udvostruče, vrijednosti sinusa i kosinusa ostaju iste.“***

Rezultati za šestu tvrdnju:

- Točno: **50 učenika (86.2%)** – „Uvijek“
- Netočno: 6 učenika (10.3%) („Nikad“)
- Bez odgovora: 2 učenika (3.4%)

Učenici većinom razumiju da trigonometrijski omjeri ne ovise o razmjeru stranica. No 6 učenika smatra da se sinus i kosinus mijenjaju s duljinom stranica – miskoncepcija poistovjećivanja duljina s omjerima. Učenici koji su točno odgovorili obrazlažu svoj odabir primjerom sličnih trokuta, spominju proporcionalnost duljina stranica i zapisuju ekvivalentne razlomke koji predstavljaju trigonometrijske omjere.

- Učenici koji nisu točno odgovorili, obrazložili su da se povećanjem duljina stranica povećava i omjer, kao što piše u sljedećem primjeru učeničkog odgovora:



Slika 6. Primjer učeničkog rješenja za 6. Tvrdnju

Sedma tvrdnja: ***„Umnožak tangensa i kotangensa šiljastog kuta u pravokutnom trokutu jednak je 1.“***

Rezultati za sedmu tvrdnju:

- Točno: **39 učenika (67.2%)** – „Uvijek“
- Netočno: 17 učenika (29.3%) (10 „Nekad“, 7 „Nikad“)
- Bez odgovora: 2 učenika (3.4%)

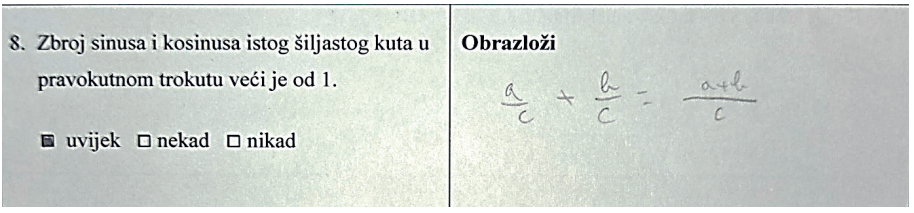
Trećina učenika ne prepoznaju identitet tg*t*·ctg*t* = 1. Oni koji su rekli „Nekad" vjerojatno povezuju tangens i kotangens s posebnim kutovima, a oni koji su rekli „Nikad" pokazuju ozbiljnu miskoncepciju o odnosu ovih funkcija. Primjerice, učenik odabire „Nikad", tvrdeći da umnožak tangensa i kotangensa šiljastog kuta u pravokutnom trokutu nikada nije jednak 1 jer je kotangens uvijek veći od 1. Drugi učenik navodi da je izračunao vrijednosti i dobio da taj umnožak nije jednak 1, ali ipak odabire „Nekad", obrazlažući da možda postoji slučaj u kojem se te vrijednosti podudaraju.

Osma tvrdnja je: ***„Zbroj sinusa i kosinusa istog šiljastog kuta u pravokutnom trokutu veći je od 1."***

Rezultati za osmu tvrdnju:

- Točno: **21 učenik (36.2%)** – „Uvijek"
- Netočno: 32 učenika (55.2%) (18 „Nekad", 14 „Nikad")
- Bez odgovora: 5 učenika (8.6%)

Osma tvrdnja je jedna od najproblematičnijih. Više od 60% učenika nije prepoznalo da je zbroj sinusa i kosinusa uvijek > 1 (za šiljaste kutove). Pogrešan odgovor „Nekad" pokazuje miskoncepciju da taj odnos vrijedi samo za posebne kutove, a „Nikad" upućuje na pretjerano oslanjanje na Pitagorin poučak. Nekoliko učenika dalo je netočna obrazloženja, najčešće koristeći vrijednosti koje ne mogu predstavljati stranice nijednog trokuta, osobito pravokutnog. Neki učenici nisu prepoznali da zbroj duljina kateta mora biti veći od duljine hipotenuze.



Slika 7. Primjer učeničkog rješenja za 8. tvrdnju

Deveta tvrdnja: ***„Tangens i kotangens šiljastog kuta u pravokutnom trokutu mogu biti negativni brojevi."***

Rezultati za devetu tvrdnju:

- Točno: **50 učenika (86.2%)** – „Nikad"
- Netočno: 5 učenika (8.6%) (1 „Uvijek", 4 „Nekad")
- Bez odgovora: 3 učenika (5.2%)

Većina učenika zna da su sve trigonometrijske funkcije pozitivne za šiljaste kutove. Pogrešni odgovori ukazuju na to da učenici ne povezuju trigonometrijske omjere s duljinama stranica trokuta, koje su uvijek pozitivni brojevi. Jedan učenik ispravno odabire „Nikad", međutim, dano obrazloženje glasi: „Kut ne može biti negativan broj."

Deseta tvrdnja: ***„Zbroj kvadrata sinusa i kosinusa bilo kojeg šiljastog kuta uvijek je jednak jedan."***

Rezultati za desetu tvrdnju:

- Točno: **39 učenika (67.2%)** – „Uvijek"
- Netočno: 11 učenika (19%) (9 „Nekad", 2 „Nikad")
- Bez odgovora: 8 učenika (13.8%)

Trećina učenika ne zna ili ne prepoznaje osnovni trigonometrijski identitet. Odgovor „Nekad" pokazuje nesigurnost i nerazlikovanje između identiteta i posebnih slučajeva. Izdvojit ćemo odgovor učenika koji koristi protuprimjer. Učenik pokušava objasniti osnovni trigonometrijski identitet navodeći protuprimjer: $(1/3)^2+(2/3)^2=5/9$, pritom uzimajući vrijednosti koje ne mogu predstavljati duljine stranica pravokutnog trokuta.

Tablica 3. Rezultati sadržajne analize

Tvrdnja	Kategorija sadržajne analize	Opis obrasca zaključivanja / miskoncepcije	Primjer učeničkog odgovora
1. Sinus i kosinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta veći su od 1.	Konceptualno razumijevanje definicije omjera	Učenici pravilno povezuju sinus i kosinus s omjerima katete i hipotenuze te zaključuju da vrijednosti ne mogu biti veće od 1.	„Hipotenuza je uvijek najveća stranica pa razlomak mora biti manji od 1."
	Djelomično razumijevanje bez obrazloženja	Učenik odabire točan odgovor, ali ne pokazuje razumijevanje koncepta.	Točan odgovor bez obrazloženja ili s nepotpunim objašnjenjem.
2. Sinus kuta je veći od kosinusa kuta.	Relacijsko razumijevanje	Učenici prepoznaju da odnos sinusa i kosinusa ovisi o veličini kuta i odnosu kateta.	„Za kutove manje od 45° kosinus je veći, a za veće sinus."
	Pretjerana generalizacija	Učenici generaliziraju odnos sinusa i kosinusa bez promatranja kuta.	„Stranica a je uvijek dulja od stranice b pa je sinus veći."
3. Kosinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je 0.5.	Razumijevanje posebnih vrijednosti	Učenici prepoznaju da tvrdnja vrijedi samo za određene kutove.	„Vrijedi za kut od 60°."

Tvrdnja	Kategorija sadržajne analize	Opis obrasca zaključivanja / miskoncepcije	Primjer učeničkog odgovora
	Mehaničko pamćenje bez konceptualnog razumijevanja	Učenici pamte tablične vrijednosti bez razumijevanja kada vrijede.	„Uvijek, jer je kosinus 0.5."
4. Sinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta može biti jednak kosinusu istog kuta.	Konceptualno razumijevanje odnosa funkcija	Učenici prepoznaju slučaj kuta od 45°.	„Vrijedi kad je kut 45°."
	Geometrijska miskoncepcija	Učenici smatraju da pravokutni trokut ne može biti jednakokračan.	„Kad bi bili jednaki, trokut bi bio jednakokračan, a ne pravokutan."
5. Sinus jednog šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je kosinusu drugog šiljastog kuta tog trokuta.	Relacijsko razumijevanje komplementarnih kutova	Učenici pravilno povezuju sinus i kosinus komplementarnih kutova.	Crtanje trokuta i zapis omjera za oba kuta.
	Nerazumijevanje komplementarnosti kutova	Učenici smatraju da jednakost vrijedi samo u posebnim slučajevima.	„To vrijedi samo kad su katete jednake."
6. Ako se vrijednosti svih stranica pravokutnog trokuta udvostruče, vrijednosti sinusa i kosinusa ostaju iste.	Razumijevanje proporcionalnosti i sličnosti trokuta	Učenici prepoznaju da omjeri ostaju isti u sličnim trokutima.	„Razlomak ostaje isti jer se brojnik i nazivnik povećaju jednako."
	Nerazumijevanje invariantnosti omjera	Učenici poistovjećuju duljine stranica s vrijednostima omjera.	„Ako su stranice veće, sinus je veći."
7. Umnožak tangensa i kotangensa šiljastog kuta u pravokutnom trokutu jednak je	Razumijevanje recipročnog odnosa	Učenici prepoznaju da su tangens i kotangens recipročni omjeri.	„Tangens i kotangens su recipročni pa im je umnožak 1."
	Nerazumijevanje odnosa tangensa i kotangensa	Učenici ne razumiju recipročnost funkcija.	„Kotangens je uvijek veći od 1."
8. Zbroj sinusa i kosinusa istog šiljastog kuta u pravokutnom trokutu veći je od 1.	Konceptualno razumijevanje odnosa među omjerima	Učenici zaključuju koristeći odnose među stranicama trokuta.	„Zbroj kateta je uvijek veći od hipotenuze."
	Proceduralno zaključivanje i pogrešna generalizacija	Učenici koriste nemoguće vrijednosti stranica ili se oslanjaju na posebne slučajeve.	Korištenje brojeva koji ne mogu predstavljati stranice trokuta.

Tvrdnja	Kategorija sadržajne analize	Opis obrasca zaključivanja / miskoncepcije	Primjer učeničkog odgovora
9. Tangens i kotangens šiljastog kuta u pravokutnom trokutu mogu biti negativni brojevi.	Razumijevanje pozitivnosti omjera	Učenici povezuju omjere s pozitivnim duljinama stranica trokuta.	„Duljine stranica ne mogu biti negativne."
	Površinsko razumijevanje	Učenici daju točan odgovor, ali s pogrešnim obrazloženjem.	„Kut ne može biti negativan broj."
10. Zbroj kvadrata sinusa i kosinusa bilo kojeg šiljastog kuta uvijek je jednak jedan.	Razumijevanje trigonometrijskog identiteta	Učenici prepoznaju osnovni identitet $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.	„To je osnovni trigonometrijski identitet."
	Nerazumijevanje identiteta i protuprimjera	Učenici koriste vrijednosti koje ne odgovaraju pravokutnom trokutu.	„$(1/3)^2 + (2/3)^2 = 5/9$ pa nije 1."

Tablica 4. Odnos točnih odgovora i neprikladnih obrazloženja

TVRDNJA	Odgovor	Obrazloženje	
	Točno	Točno	Netočno ili nedostaje
T1	58	52	6
T2	54	49	5
T3	51	45	6
T4	45	28	17
T5	24	12	12
T6	50	34	16
T7	39	31	8
T8	21	8	13
T9	50	44	6
T10	39	30	9

ANALIZA REZULTATA

Rezultati ovog istraživanja pokazuju da su učenici prvog razreda gimnazije relativno uspješni u prepoznavanju očitih netočnih tvrdnji, ali istodobno pokazuju konceptualno nerazumijevanje u odnosima trigonometrijskim funkcija, stranica i kutova trokuta.

Analiza prema Istraživačkom pitanju 1

Najizraženije teškoće učenici su pokazali u zadacima koji su zahtijevali razumijevanje odnosa između sinusa i kosinusa komplementarnih kutova te recipročnog odnosa tangensa i kotangensa. Posebno se ističe peta tvrdnja, gdje je samo 41.4% učenika prepoznalo da je sinus jednog šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak kosinusu drugog šiljastog kuta istog trokuta. Ističu se i velike poteškoće u razumijevanju zbroja vrijednosti sinusa i kosinusa šiljastog kuta pravokutnog trokuta i osnovnog trigonometrijskog identiteta (samo 36 % učenika je točno odgovorilo). Učenicima nedostaje kritičko i konceptualno promišljanje, jer trećina učenika obuhvaćena ovim istraživanjem ne prepoznaje osnovni trigonometrijski identitet (10. izjava) ili smatra da on vrijedi samo u nekim slučajevima. Učenici stvaraju pogrešne predodžbe zbog neodgovarajućeg povezivanja prethodnog znanja s novim sadržajem. To je posebno uočljivo u 6. izjavi (udvostručenje duljina stranica trokuta), gdje dio učenika poistovjećuje omjere s duljinama stranica. Zbog mehaničkog pamćenja tabličnih vrijednosti i manjka konceptualnog razumijevanja dolazi do pogrešne generalizacije, kao što se i vidi u 3. izjavi (kosinus je jednak 0.5).

Analiza prema Istraživačkom pitanju 2

Analiza učeničkih obrazloženja pokazala je da točan odgovor nije nužno značio i potpuno konceptualno razumijevanje. Kod prve tvrdnje pojedini učenici odabrali su točan odgovor, ali nisu znali objasniti zbog čega sinus i kosinus ne mogu biti veći od 1.

S druge strane, učenici koji su pokazivali bolje konceptualno razumijevanje često su koristili skice trokuta, omjere stranica, posebne slučajeve kutova, ili svojstva sličnosti trokuta. Velik broj učenika koristio je parcijalno točna objašnjenja, pri čemu su pojedine poznate činjenice primjenjivali izvan konteksta ili ih pretjerano generalizirali.

Analiza prema Istraživačkom pitanju 3

Dobiveni rezultati podudaraju se s prethodnim istraživanjima koja pokazuju da učenici često imaju teškoće u konceptualnom razumijevanju trigonometrijskih omjera i odnosa među njima (Hamzah, Maat i Ikhsan, 2021, Aleifat & Tabieh, 2025). Posebno su izražene teškoće povezane s povezivanjem sinusa i kosinusa komplementarnih kutova, razumijevanjem

identiteta, te razlikovanjem posebnih slučajeva od općih pravila. U istraživanju su također uočene pretjerane generalizacije i proceduralno korištenje pravila bez konceptualnog razumijevanja, što odgovara rezultatima istraživanja o matematičkim miskoncepcijama općenito (Radatz, 1979; Aleifat i Tabieh, 2025).

ZAKLJUČCI

Istraživanje je pokazalo da učenici, i nakon formalne obrade nastavnog sadržaja (definicije trigonometrijskih omjera šiljastih kutova pravokutnog trokuta i osnovni trigonometrijski identiteti), ne razvijaju uvijek stabilno konceptualno razumijevanje temeljnih odnosa u trigonometriji pravokutnog trokuta. Premda uspješno reproduciraju definicije i rješavaju standardne zadatke, poteškoće se javljaju u prepoznavanju općih svojstava i međusobnih veza između pojmova, osobito kada je potrebno argumentirati valjanost tvrdnje izvan uobičajenog proceduralnog okvira.

Rezultati upućuju na to da se dio učeničkog znanja temelji na mehaničkom korištenju formula, bez dubljeg razumijevanja konceptualne strukture trigonometrijskih odnosa. Takve miskoncepcije mogu ostati prikrivene u rutinskim zadacima, ali postaju vidljive u situacijama koje zahtijevaju generalizaciju i obrazlaganje.

Unatoč ograničenjima vezanim uz uzorak i interpretativnu narav kvalitativne analize, istraživanje otvara prostor za daljnja proučavanja učinkovitosti dijagnostičkih pristupa u prevenciji i razgradnji učeničkih miskoncepcija u području trigonometrije.

Odgovori na istraživačka pitanja

1. Koje su najčešće miskoncepcije učenika vezane uz trigonometriju pravokutnog trokuta?

Najizraženije miskoncepcije u istraživanju bile su:

- Nerazumijevanje odnosa komplementarnih kutova
- Zbunjenost oko zbroja sinusa i kosinusa
- Nedovoljno usvajanje trigonometrijskih identiteta
- Poistovjećivanje omjera s duljinama stranica

Najčešće miskoncepcije odnose se na odnose među funkcijama (sinus i kosinus), komplementarnost kutova i identitete.

2. Kako učenici obrazlažu svoj odabir tvrdnji i što njihova obrazloženja otkrivaju o njihovom razumijevanju trigonometrijskih omjera?

Analiza pisanih obrazloženja pokazala je nekoliko obrazaca:

- Učenici se često pozivaju na tablične vrijednosti, što ukazuje na oslanjanje na pamćenje, a ne razumijevanje.
- Dio učenika obrazlagao je tvrdnje pomoću duljina stranica trokuta („kateta je uvijek dulja od druge"), što ukazuje na nerazlikovanje apsolutnih mjera i omjera.
- Neki odgovori pokazuju nesigurnost i nagađanje, posebno u slučajevima kada se radi o identitetima ($\mathrm{tg}t \cdot \mathrm{ctg}t = 1$, $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$).
- Kod težih tvrdnji (5., 8. i 10.), obrazloženja su često fragmentarna („mislim da vrijedi ponekad") bez jasne logičke argumentacije, što otkriva da učenici nemaju dovoljno razumijevanja trigonometrijskih odnosa.

Obrazloženja otkrivaju da učenici imaju proceduralno, ali ne i konceptualno razumijevanje trigonometrije.

3. U kojoj mjeri se učeničke miskoncepcije podudaraju s onima zabilježenima u prethodnim istraživanjima?

Dobiveni rezultati u velikoj mjeri podudaraju se s prethodnim istraživanjima.

Aleifat i Tabieh (2025) naglašavaju da su trigonometrijske miskoncepcije jedna od četiri ključne kategorije u matematici, uključujući upravo nerazumijevanje odnosa među funkcijama i pogrešne generalizacije, što je potvrđeno i u našem uzorku. Jatisunda i Ramadhan (2025) ističu da učenici imaju razvijeno proceduralno znanje, ali manjak konceptualnog, što se u našem istraživanju očituje u nesigurnosti kod identiteta. Muhaimin i sur. (2024) pokazuju da se miskoncepcije često javljaju kada učenici pokušavaju povezati novo gradivo s pogrešno strukturiranim prethodnim znanjem – što je očito kod naše 6. izjave (razmjer stranica). Hamzah, Maat i Ikhsan (2021) u sustavnom pregledu istraživanja također ističu da učenici često razvijaju pogrešne generalizacije i parcijalno razumijevanje trigonometrijskih koncepata, osobito pri povezivanju različitih trigonometrijskih odnosa i interpretaciji vrijednosti trigonometrijskih funkcija. To se podudara s rezultatima ovog istraživanja, u kojem su učenici često davali točne odgovore uz neprikladna ili nepotpuna obrazloženja.

Rezultati ovog istraživanja potvrđuju nalaze prethodnih studija – miskoncepcije u trigonometriji nisu lokalna pojava, već dio šireg, međunarodno

prepoznatog obrasca. Dobiveni rezultati istraživanja upućuju na potrebu za nastavnim pristupima koji će veći naglasak staviti na konceptualno razumijevanje trigonometrijskih omjera u pravokutnom trokutu, a ne isključivo na proceduralno usvajanje formula i pravila. Na temelju dobivenih rezultata i u skladu s preporukama literature, moguće je predložiti određene smjernice. Kod učenika koji nisu prepoznali odnos između sinusa i kosinusa komplementarnih kutova korisno bi bilo koristiti GeoGebru ili sličan program dinamične geometrije u kojem učenici mijenjaju veličinu šiljastog kuta pravokutnog trokuta i prate promjene vrijednosti sinusa i kosinusa oba kuta. Na taj način mogu samostalno uočiti da vrijedi $\sin \alpha = \cos (90° - \alpha)$. Za tvrdnje povezane s trigonometrijskim identitetima i odnosima među funkcijama (tvrdnje 5, 7, 8 i 10) korisno je učenicima najprije ponuditi tvrdnju koja izaziva nesigurnost, a zatim ih kroz primjere i protuprimjere potaknuti na istraživanje vrijedi li tvrdnja uvijek, nekad ili nikad. Takav pristup može pomoći u smanjenju proceduralnog učenja bez konceptualnog razumijevanja (Keeley i Tobey, 2011). Kod miskoncepcije da se povećanjem duljina stranica pravokutnog trokuta povećavaju i vrijednosti sinusa i kosinusa korisne bi bile aktivnosti u kojima učenici uspoređuju nekoliko sličnih pravokutnih trokuta različitih dimenzija, računaju trigonometrijske omjere i samostalno uočavaju da omjeri ostaju jednaki. Učenici pritom mogu fizički izrađivati, preklapati i mjeriti slične trokute, čime se trigonometrijski omjeri povezuju sa sličnošću trokuta i proporcionalnošću. Kod učenika koji smatraju da sinus ili kosinus mogu biti veći od 1 korisno bi bilo koristiti zadatke procjene u kojima učenici analiziraju mogu li omjeri poput 5/3 ili 7/4 predstavljati sinus ili kosinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta. Takvi zadaci mogu pomoći učenicima da trigonometrijske omjere povežu s geometrijskim značenjem pravokutnog trokuta i odnosima među njegovim stranicama. Rezultati istraživanja pokazali su i da točan odgovor nije nužno podrazumijevao potpuno konceptualno razumijevanje. Pojedini učenici davali su točne odgovore uz neprikladna ili nepotpuna obrazloženja, što može upućivati na proceduralno, ali ne i konceptualno razumijevanje trigonometrijskih pojmova. Zbog toga bi u nastavi veću pozornost trebalo posvetiti matematičkoj argumentaciji i obrazlaganju postupaka. Zadaci tipa „Uvijek, nekad, nikad" pokazali su se korisnima jer potiču učenike na argumentaciju, navođenje primjera i protuprimjera te preispitivanje vlastitih zaključaka (Keeley i Tobey, 2011; Hamzah, Maat i Ikhsan, 2021). Potrebno je, odabirom aktivnosti i zadataka, osigurati povezivanje vizualnog, algebarskog i verbalnog predstavljanja trigonometrijskih omjera u pravokutnom trokutu, njihovih odnosa i svojstava. Nastavnik mora sustavno identificirati

pogrešne predodžbe, odnosno učeničke miskoncepcije i raditi na njihovom otklanjanju.

Ograničenja istraživanja i smjerovi budućih istraživanja

Istraživanje ima nekoliko ograničenja koja je potrebno uzeti u obzir pri interpretaciji rezultata. Prije svega, uzorak je obuhvaćao učenike jedne gimnazije, što ograničava mogućnost generalizacije dobivenih nalaza na širu populaciju učenika. Nadalje, riječ je o istraživanju koje daje uvid u stanje razumijevanja u jednom vremenskom trenutku, bez praćenja razvoja učeničkih koncepcija kroz dulje razdoblje.

Kvalitativna analiza obrazloženja nije uključivala neovisno kodiranje od strane drugog istraživača, što može utjecati na interpretativnu pouzdanost kategorizacije odgovora.

Buduća istraživanja mogla bi uključiti veći i raznolikiji uzorak učenika te longitudinalni pristup praćenju razvoja konceptualnog razumijevanja. Dodatno, kombinacija pisanih odgovora s polustrukturiranim intervjuima mogla bi omogućiti dublje razumijevanje učeničkih misaonih procesa.

LITERATURA

1. Aleifat, R. J. Y., & Tabieh, A. A. S. (2025). A bibliometric analysis of scientific articles on mathematics misconceptions. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 20*(1), em0803. https://doi.org/10.29333/iejme/15678
2. Ay, Y. (2017). *A review of research on the misconceptions in mathematics education*. In E. G. Oztekin & M. Ulusoy (Eds.), *Education Research Highlights in Mathematics, Science and Technology 2017* (str. 21–31). ISRES Publishing.
3. Buchbinder, O., & Zaslavsky, O. (2013). *A holistic approach for designing tasks that capture and enhance mathematical understanding of a particular topic: The case of the interplay between examples and proof*. In C. Margolinas (Ed.), *Task Design in Mathematics Education: Proceedings of ICMI Study 22* (str. 24–32). International Commission on Mathematical Instruction.
4. Hamzah, N., Maat, S. M., & Ikhsan, Z. (2021). *A systematic review on pupils' misconceptions and errors in trigonometry*. *Pegem Journal of Education and Instruction, 11*(2), 209–218. https://doi.org/10.47750/pegegog.11.02.20
5. Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (str. 1–27). Lawrence Erlbaum Associates.
6. Jatisunda, M. G., & Ramadhan, D. (2025). Exploring students' critical thinking skills through an analysis of their responses to trigonometry problems. *Edukasiana: Jurnal Inovasi Pendidikan, 4*(3), 1337–1350. https://doi.org/10.56916/ejip.v4i3.2358
7. Keeley, P., & Tobey, C. R. (2011). *Mathematics formative assessment: 75 practical strategies for linking assessment, instruction, and learning*. Corwin Press & National Council of Teachers of Mathematics.
8. Ministarstvo znanosti i obrazovanja. (2019). *Kurikulum nastavnog predmeta Matematika za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj*. Narodne novine, 7/2019.
9. Muhaimin, M. H., Yaniawati, R. P., Sari, N. M., & Komala, E. (2024). Misconception reduction: 4-tier diagnostic test based on education for sustainable development & Arduino tools. *PRISMA: Prosiding Seminar Nasional Matematika*. https://jurnal.unsur.ac.id/prisma/article/download/4542/3268
10. Radatz, H. (1979). Error analysis in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 10*(3), 163–172. https://doi.org/10.2307/748804

STUDENTS' MISCONCEPTIONS IN RIGHT TRIANGLE TRIGONOMETRY

This paper investigates students' misconceptions in right triangle trigonometry. The study was conducted with a sample of 58 first-grade grammar school students. The instrument consisted of ten statements requiring students to select one of the proposed categories and justify their choice. The results indicate the presence of conceptual misunderstandings related to definitions of trigonometric ratios, complementarity of acute angles, and relationships between sine and cosine. Quantitative analysis of response frequencies was complemented by qualitative analysis of students' explanations, providing deeper insight into the structure of incorrect reasoning. The findings highlight the need for systematic development of conceptual understanding and the integration of diagnostic tasks in mathematics instruction.

Keywords: trigonometry, right triangle, misconceptions, diagnostic assessment