Kako rješavati zadatke iz matematike i fizike? Primjena Pólyine metode u praksi

Alija Muminagić[1]

Uvod

Mađarsko-američki matematičar George Pólya u svojoj poznatoj knjizi [1] predstavio je jednostavan, pristup rješavanju problema iz matematike. Njegova metoda može se svesti na četiri koraka:

1. razumjeti problem
2. napraviti plan
3. provesti plan
4. osvrnuti se na rješenje.

Metoda je prvenstveno nastala u kontekstu matematike, ali se isti način razmišljanja može primijeniti u fizici i drugim područjima u kojima prvo treba odrediti bit problema, napraviti odgovarajući plan rješenja, provesti ga i na kraju osvrnuti se na njega.

Ovdje je metoda prikazana na dva konkretna primjera: matematički zadatak iz faktorizacije i problem iz mehanike.

Matematički zadatak

Zadatak 1. Broj 160 401 napisati kao produkt dva troznamenkasta pozitivna cijela broja.

Korak 1 – Razumjeti problem

Tražimo dva troznamenkasta broja a i b takva da je

$$a \cdot b = 160\,401.$$

Umjesto da odmah pokušavamo dijeliti 160 401 nekim brojevima, možemo koristiti oblik

$$160\,401 = 160\,000 + 400 + 1.$$

Budući da je $160\,000 = 20^4$, a $400 = 20^2$, dobivamo

$$160\,401 = 20^4 + 20^2 + 1.$$

Ako stavimo $x = 20$, problem se svodi na izraz

$$x^4 + x^2 + 1,$$

i dani broj prenesemo u algebarski prikaz.

[1] Autor je iz Frederiksberga u Danskoj.

Korak 2 – Napraviti plan

Faktorizirajmo izraz $x^4 + x^2 + 1$. Dodajmo i oduzmimo x^2:

$$x^4 + x^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - x^2.$$

Prva tri člana čine potpuni kvadrat, tj.

$$x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2.$$

Zato je

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2 - x^2.$$

Primjenom formule za razliku kvadrata, $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$, gdje je $A = x^2 + 1$ i $B = x$, dobivamo

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1).$$

Korak 3 – Provesti plan

Uvrstimo $x = 20$:

$$20^2 - 20 + 1 = 400 - 20 + 1 = 381,$$

$$20^2 + 20 + 1 = 400 + 20 + 1 = 421.$$

Prema tome

$$160\,401 = 381 \cdot 421.$$

Oba faktora su troznamenkasta, pa dani zadatak ima rješenje.

Korak 4 – Osvrnuti se na rješenje

Najprije direktno možemo provjeriti da je $381 \cdot 421 = 160\,401$.

S druge strane, zbroj znamenaka broja 160 401 je $1+6+0+4+0+1 = 12$. Budući da je 12 djeljivo s 3, i broj 160 401 je djeljiv s 3,

$$160\,401 = 3 \cdot 53\,467.$$

Dalje imamo

$$53\,467 = 127 \cdot 421,$$

pa je

$$160\,401 = 3 \cdot 127 \cdot 421.$$

Kako je $3 \cdot 127 = 381$, dobivamo $160\,401 = 381 \cdot 421$. Ova dodatna provjera pokazuje jednu ideju Pólyine metode: uz to što smo dobili rješenje, moguće ga je potvrditi i drugim putem.

Fizikalni zadatak: vertikalni hitac i očuvanje mehaničke energije

Zadatak 2. Osoba s visine h iznad tla baca loptu vertikalno prema gore početnom brzinom v_0. Zatim, s iste visine baca jednaku drugu loptu vertikalno prema dolje jednakom početnom brzinom. Koja će lopta imati veću brzinu u trenutku pada na tlo?

Otpor zraka se zanemaruje i gravitacija g je konstantna.

Korak 1 – Razumjeti problem

Obje lopte polaze s iste visine h i imaju istu početnu brzinu v_0, ali se na početku kreću u suprotnim smjerovima. Na prvi pogled izgleda da će lopta bačena prema dolje udariti o tlo većom brzinom. Međutim, pitanje je kolike će biti njihove brzine pri padu na tlo.

Korak 2 – Napraviti plan

Problem možemo promatrati na dva načina:

- pomoću jednadžbe gibanja (kinematika),
- pomoću zakona očuvanja mehaničke energije.

Primijenit ćemo obje metode i time dodatno provjeriti rješenje.

Korak 3, plan A – Kinematičko objašnjenje

Prva lopta je bačena prema gore brzinom v_0. Gravitacija postupno smanjuje njezinu brzinu prema gore sve dok se u najvišoj točki na trenutak ne zaustavi. Nakon toga lopta počinje padati.

Kada se vrati na početnu visinu h, uz pretpostavku da nema otpora zraka, ima istu brzinu v_0 kao na početku, ali sada usmjerenu prema dolje.

U tom trenutku stanje prve lopte potpuno je jednako početnom stanju druge: ista visina, ista brzina v_0 prema dolje i ista gravitacija g. Od tog trenutka njihovo daljnje gibanje je potpuno jednako.

Zato će obje lopte udariti o tlo jednakim brzinama. Razlikuje se samo ukupno vrijeme gibanja: prva lopta se kretala duže jer je najprije išla prema gore.

Korak 3, plan B – Očuvanje mehaničke energije

Na početku svaka lopta ima potencijalnu i kinetičku energiju. Ako tlo izaberemo kao nulti nivo potencijalne energije, ukupna mehanička energija svake od njih je

$$E = mgh + \frac{1}{2}mv_0^2.$$

Kinetička energija ovisi i o v_0^2, pa smjer početne brzine – prema gore ili prema dolje – ne mijenja početnu energiju.

U trenutku pada na tlo potencijalna energija je jednaka nuli, pa je ukupna mehanička energija

$$E = \frac{1}{2}mv_-^2.$$

Iz zakona očuvanja energije imamo

$$mgh + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_-^2.$$

Nakon dijeljenja s m i množenja s 2 dobivamo

$$2gh + v_0^2 = v_-^2,$$

odnosno

$$v_- = \sqrt{v_0^2 + 2gh}.$$

Budući da su v_0, g i h jednaki za obje lopte, i konačne brzine će biti jednake, tj.

$$v_{-1} = v_{-2}.$$

Korak 4 – Osvrnuti se na rješenje

Rješenje, na prvi pogled, može djelovati iznenađujuće. Lopta bačena prema gore dostiže veću visinu i duže se giba, ali ipak udara o tlo istom brzinom kao lopta bačena prema dolje.

Razlog je očuvanje energije. Dio početne kinetičke energije prve lopte privremeno se pretvara u potencijalnu energiju dok se lopta diže. Pri padu na tlo se ta energija ponovo

pretvara u kinetičku. Kada se lopta vrati na početnu visinu, ima istu brzinu kao na početku, samo u suprotnom smjeru. Od tog trenutka njena situacija je identična početnoj situaciji druge lopte.

Važno je naglasiti da ovaj zaključak vrijedi za idealizirani model. Ako uključimo otpor zraka, tvrdnja više ne vrijedi jer mehanička energija lopte tada nije sačuvana.

Zaključak

Ova dva primjera pokazuju jednu od ideja Pólyine metode: najvažniji dio rješenja često nije samo računanje nego pronalaženje pravog načina za promatranje problema.

U matematičkom primjeru broj 160 401 treba faktorizirati. Prepoznavanjem strukture $x^4 + x^2 + 1$ problem se svodi na poznati algebarski identitet.

U fizikalnom primjeru intuicija nas može navesti da promatramo smjer bacanja. Međutim, kada izdvojimo odgovarajuće fizikalne veličine – visinu, početnu brzinu i mehaničku energiju – vidimo da na smjer početne brzine, pod danim pretpostavkama, ne utječe na konačnu brzinu.

Pólyina četiri koraka ne treba shvatiti kao mehanički recept koji automatski daje odgovor, nego kao sistematičan način razmišljanja:

- Što znam?
- Što tražim?
- Jesam li ranije vidio sličnu strukturu?
- Koji matematički oblik ili fizikalni zakon mogu primijeniti?
- Mogu li rješenje provjeriti na drugi način?

Posebno je važan posljednji korak – osvrt na rješenje. Dobiti broj ili formulu nije isto što i razumjeti zašto je rješenje ispravno. Najveća vrijednost Pólyine metode nije u tome da nas nauči kako riješiti jedan zadatak, nego kako razmišljati kada se suočimo s drugim problemom koji još nismo vidjeli.

Literatura

[1] GEORGE PÓLYA, *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method*, Princeton University Press, 1945.