Tangencijalni mnogokut u ravnini i polumjer upisane mu kružnice

Ljiljana Sudar[1]

U ovom prilogu ćemo promatrati konveksne mnogokute u ravnini. Samo u neke od njih može se upisati kružnica tj. samo su neki od njih tangencijalni, a od njih samo su neki pravilni. Pravilni su oni mnogokuti koji imaju sve jednake stranice (i sve međusobno jednake unutarnje kutove). Ovdje tražimo odgovore na dva osnovna pitanja:

1. Kada je promatrani mnogokut tangencijalan?
2. Kako za tangencijalan mnogokut odrediti središte upisane kružnice i njezin polumjer?

Pođimo od najjednostavnijeg mnogokuta – trokuta.

Ako znamo njegove duljine stranica a, b, c možemo mu odrediti površinu koristeći Heronovu formulu

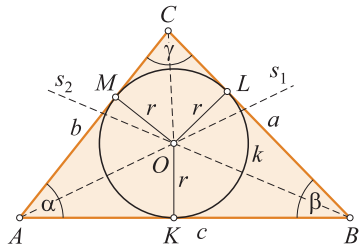
$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

gdje je $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ poluopseg trokuta.

Može li se u trokut upisati kružnica?

Ako može gdje je njezino središte i koliki joj je polumjer?

Na slici 1 dan je trokut ABC s kutovima α, β, γ i stranicama duljina $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$. Neka su s_1 i s_2 simetrale dva kuta tog trokuta, npr. α i β, koje se sijeku u točki O, tj. $O = s_1 \cap s_2$. Normale na stranice trokuta iz točke O sijeku stranice a, b, c u točkama L, M, K. Kako je svaka točka na simetrali jednako udaljena od krakova kuta, a točka O je na simetralama s_1 i s_2, imamo $|OK| = |OM|$ i $|OK| = |OL|$ što znači da su točke K, M, L jednako udaljene od točke O pa pripadaju kružnici $k(O, r)$. U tim točkama kružnica k dodiruje stranice trokuta. S obzirom da je $|OM| = |OL|$ točka O pripada i simetrali kuta γ pa se točka O, koja je središte upisane kružnice u $\triangle ABC$ nalazi u presjeku simetrala kutova α, β i γ. Sa slike 1 se vidi da su stranice $\triangle ABC$ tangencijalne dužine. Iz sukladnosti trokuta $\triangle AOK \cong \triangle AOM$, $\triangle BOK \cong \triangle BOL$ i $\triangle COL \cong \triangle COM$ (SSK) slijedi jednakost tangencijalnih duljina $|AK| = |AM|$, $|BK| = |BL|$ i $|CL| = |CM|$.



Slika 1.

Odredimo sada polumjer kružnice upisane u $\triangle ABC$. Sa slike 1 se vidi da se $\triangle ABC$ sastoji iz $\triangle ABO$, $\triangle BCO$ i $\triangle ACO$ čije su površine

$$P_{\triangle BCO} = \frac{|BC||OL|}{2} = \frac{ar}{2}, \quad P_{\triangle ACO} = \frac{|AC||OM|}{2} = \frac{br}{2}, \quad P_{\triangle ABO} = \frac{|AB||OK|}{2} = \frac{cr}{2}.$$

Neka je s P označena površina $\triangle ABC$. Tada je:

$$P = P_{\triangle BCO} + P_{\triangle ACO} + P_{\triangle ABO} = \frac{r}{2}(a+b+c) = rs \implies r = \frac{P}{s} \qquad (1*)$$

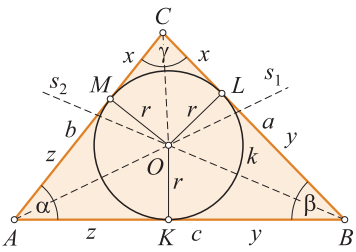
gdje je $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ poluopseg $\triangle ABC$.

[1] Autorica je profesorica fizike u Leskovcu; e-pošta: ljsudar@gmail.com

Dakle, trokut je tangencijalan. Središte upisane kružnice u trokut je presjek simetrala kutova trokuta. Polumjer upisane kružnice u trokut dan je formulom $r = \frac{P}{s}$, u kojoj su P i s površina i poluopseg trokuta.

Pravilni trokut je onaj koji ima sve tri stranice jednake. Uobičajeni naziv za njega je jednakostraničan trokut. Središte upisane mu kružnice se nalazi u presjeku simetrala njegovih kutova i njezin polumjer je dan formulom $(1*)$.

Koji uvjet trebaju zadovoljavati tri dužine da bi bile stranice trokuta?



Slika 1a.

Neka su a, b, c dužine koje su stranice $\triangle ABC$, kao na slici 1a. U $\triangle ABC$ upisana je kružnica. S x, y i z označene su tangencijalne dužine.

Sa slike 1a je očito:

$$a = x + y, \quad b = x + z, \quad c = y + z. \tag{1}$$

Iz relacija (1) slijedi:

$$a + b + c = 2 \cdot (x + y + z)$$

$$\Longrightarrow \frac{a+b+c}{2} = x + y + z \Longrightarrow s = x + y + z$$

$$\Longrightarrow x = s - c, \quad y = s - b, \quad z = s - a, \quad x, y, z > 0, \tag{2}$$

gdje je $s = \frac{a+b+c}{2}$ poluopseg trokuta. Relacije (2) su uvjet egzistencije trokuta.

Primjer 1. Mogu li dužine duljina 5, 4, 7 cm biti duljine stranica trokuta?

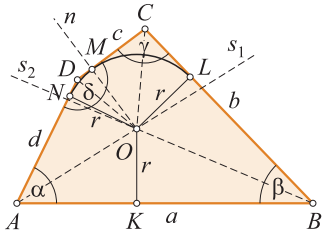
Odgovor. Neka je npr. $a = 5$ cm, $b = 4$ cm, $c = 7$ cm. Tada je $s = 8$ cm, $x = 1$ cm, $y = 4$ cm, $z = 3$ cm. Kako su x, y, $z > 0$, uvjet egzistencije trokuta, dane dužine su stranice trokuta.

Sljedeći mnogokut po složenosti je konveksan četverokut.

Je li svaki četverokut tangencijalan?

Vrijedi li za tangencijalni četverokut formula $r = \frac{P}{s}$ za polumjer upisane kružnice kojemu su P i s površina i poluopseg?

Promatrajmo sada četverokut $ABCD$ (slika 2) s kutovima α, β, γ, δ i duljinama stranica $a = |AB|$, $b = |BC|$, $c = |CD|$, $d = |DA|$. Neka se simetrale s_1 i s_2 dva kuta četverokuta α i β, sijeku u točki O tj. $s_1 \cap s_2 = O$. Normale povučene iz točke O na stranice a, b, d četverokuta sijeku ih u točkama K, L, N. Kako je točka O na simetralama s_1 i s_2, vrijedi $|OK| = |ON|$ i $|OK| = |OL|$, odakle slijedi $|OK| = |ON| = |OL| = r$, što znači da su točke K, N, L jednako udaljene od točke O pa pripadaju kružnici $k(O, r)$. Spustimo sada okomicu n na stranicu $\overline{CD}$. Ona siječe tu stranicu u točki M. Pripada li i točka M kružnici k, tj. je li $M \in k$? Očito je da pripada ako je $|OM| = r$, a ne pripada ako ne vrijedi dana jednakost.



Slika 2.

Pretpostavimo da je $|OM| = r$. Tada se u četverokut može upisati kružnica i promatrani četverokut $ABCD$ je tangencijalan. Kako je $|OM| = r = |OL|$ točka O se nalazi na

simetrali kuta γ. S obzirom da je i $|OM| = r = |ON|$ točka O je i na simetrali kuta δ, pa se središte upisane kružnice četverokuta $ABCD$ nalazi i u presjeku simetrala njegovih kutova α, β, γ, δ.

Koliki je polumjer upisane kružnice četverokuta $ABCD$?

Neka je s P označena površina četverokuta $ABCD$. Sa slike 2 se vidi da je ona jednaka zbroju površina trokuta $\triangle OAB$, $\triangle OBC$, $\triangle OCD$ i $\triangle ODA$, tj.

$$P = P_{\triangle OAB} + P_{\triangle OBC} + P_{\triangle OCD} + P_{\triangle ODA},$$

a kako je:

$$P_{\triangle OAB} = \frac{ar}{2}, \qquad P_{\triangle OBC} = \frac{br}{2}, \qquad P_{\triangle OCD} = \frac{cr}{2}, \qquad P_{\triangle ODA} = \frac{dr}{2}$$

$$\Longrightarrow P = \frac{a+b+c+d}{2} r = sr \Longrightarrow r = \frac{P}{s} \qquad (2*)$$

gdje je s poluopseg četverokuta.

Dakle, nije svaki četverokut tangencijalan, ali ako je, središte u njega upisane kružnice je presjek simetrala njegovih kutova. Polumjer upisane kružnice dan je formulom $(2*)$ koja je ista kao formula $(1*)$ za trokut, s tom razlikom što su P i s u formuli $(2*)$ površina i poluopseg četverokuta.

Postoje različite grupe konveksnih četverokuta:

1. oni koji nemaju nikoje dvije paralelne stranice;

2. oni koji imaju par paralelnih stranica;

3. oni koji imaju dva para paralelnih stranica.

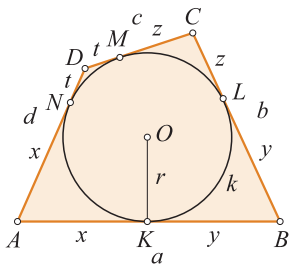
Teorem. Konveksan četverokut je tangencijalan ako i samo ako su mu zbrojevi duljina nasuprotnih stranice jednaki.

Dokaz. Provest ćemo ga u dva smjera.

$\Rightarrow$ *Pretpostavka* 1. U četverokut $ABCD$ može se upisati kružnica tj. tangencijalan je.

Tvrdnja. Zbrojevi dviju duljina nasuprotnih stranica međusobno su jednaki.

Dokaz.



Slika 3.

Kako je četverokut tangencijalan, u njega se može upisati kružnica $k(O, r)$ i neka ona u točkama K, L, M, N dodiruje stranice $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ i $\overline{AD}$ četverokuta (slika 3). Kako su tangencijalne dužine iz svakog vrha četverokuta međusobno jednake, vrijedi: $|AK| = |AN| = x$, $|BK| = |BL| = y$, $|CL| = |CM| = z$, $|DM| = |DN| = t$ pa je $a = |AK| + |KB| = x + y$, $b = |BL| + |LC| = y + z$, $c = |CM| + |MD| = z + t$, $d = |DN| + |NA| = t + x$. Sada je

$$a + c = (x+y) + (z+t) = (y+z) + (x+t) = b + d \qquad (3)$$

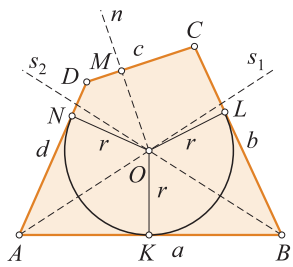
što znači da je zbroj duljina dviju nasuprotnih stranica tangencijalnog četverokuta jednak zbroju drugih dviju, što je i trebalo dokazati.

Relacija (3) je uvjet tangencijalnosti četverokuta.

$\Leftarrow$ *Pretpostavka* 2. U četverokutu je zbroj duljina dviju nasuprotnih stranica jednak.

Tvrdnja. Četverokut je tangencijalan (u njega se može upisati kružnica).

Dokaz. Promatrajmo četverokut $ABCD$ s duljinama stranicama $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|CD| = c$, $|AD| = d$.



Slika 4.

Neka su s_1 i s_2 simetrale dva kuta, npr. kod vrhova A i B i neka se one sijeku u točki O tj. $s_1 \cap s_2 = O$ pa je točka O na jednakoj udaljenosti od stranica a, d, b, tj. $|OK| = |ON| = |OL| = r$. Točke K, L, N se nalaze na kružnici $k(O,r)$. Tangencijalne dužine iz vrha A, $\overline{AK}$ i $\overline{AN}$ kao i iz vrha B, $\overline{BK}$ i $\overline{BL}$ međusobno su jednake duljine tj.

$$|AK| = |AN| \quad \text{i} \quad |BK| = |BL|. \tag{4}$$

Iz točke O spustimo okomicu n na stranicu $\overline{CD}$. Njihov presjek je točka M. Prema pretpostavci i relaciji (4) dobiva se:

$$\begin{aligned} & a + c = b + d \\ & \Longrightarrow (|AK| + |BK|) + (|DM| + |CM|) = (|BL| + |CL|) + (|DN| + |AN|) \\ & \Longrightarrow |DM| + |CM| = |CL| + |DN| \implies |DM| = |DN| \quad \text{i} \quad |CM| = |CL|. \end{aligned} \tag{5}$$

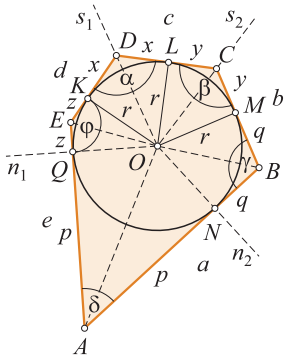
Iz (5) se dobiva $\triangle OCM \cong \triangle OCL$ (SSK) pa je $r = |OL| = |OM|$ što znači da u točki M kružnica $k(O,r)$ dodiruje stranicu c pa se kružnica može upisati u promatrani četverokut i $ABCD$ je tangencijalan, što je trebalo pokazati.

Dakle, kvadrat, romb i deltoid su tangencijalni četverokuti. Romboid i trapez tangencijalni su samo ako stranice zadovoljavaju uvjet tangencijalnosti (3). Pravilni četverokut je onaj koji ima jednake stranice i jednake kutove. Uobičajen naziv za njega je kvadrat. Zadovoljava uvjet tangencijalnosti (3) pa se u njega može upisati kružnica.

Sljedeći po složenosti je peterokut.

Je li svaki konveksan peterokut tangencijalan?

Vrijedi li za tangecijalne peterokute formula $r = \dfrac{P}{s}$, za polumjer upisane kružnice u kojoj su P i s površina i poluopseg peterokuta?



Slika 5.

Promatrajmo sada peterokut $ABCDE$ (slika 5) s kutovima α, β, γ, δ, φ i stranicama duljina $a = |AB|$, $b = |BC|$, $c = |CD|$, $d = |DA|$ i $e = |EA|$. Neka se simetrale s_1 i s_2 dvaju kutova, α i β, sijeku u točki O tj. $s_1 \cap s_2 = O$. Točka O je na simetralama s_1 i s_2 pa je $|OK| = |OL|$ i $|OL| = |OM|$ što znači da su točke K, L, M jednako udaljene od točke O pa pripadaju kružnici $k(O,r)$.

Spustimo sada okomice n_1 i n_2 na stranice e i a. Tada n_1 i n_2 sijeku stranice e i a u točkama Q i N. $n_1 \cap e = Q$ i $n_2 \cap a = N$. Da bi točke Q i N pripadale kružnici $k(O,r)$ trebalo bi biti $|OQ| = |ON| = r$.

Pretpostavimo da je $|OQ| = |ON| = r$. Točke Q, N, M, L i K su na istoj udaljenosti r od točke O pa pripadaju kružnici $k(O,r)$ upisanoj u peterokut i on je tangencijalan. Kako je i $|OM| = r = |ON|$, $|OK| = r = |OQ|$ i $|OQ| = r = |ON|$, točka O se nalazi na simetralama kutova γ, φ i δ pa je središte upisane kružnice u peterokut i presjek je simetrala kutova peterokuta.

Tangencijalne dužine povučene iz vrhova peterokuta A, B, C, D, E, međusobno su jednake tj.

$$|AQ| = |AN| = p, \quad |BN| = |BM| = q, \quad |CM| = |CL| = y,$$
$$|DL| = |DK| = x, \quad |EK| = |EQ| = z. \tag{6}$$

Jasno je da su stranice peterokuta tangencijalne dužine:

$$a = p + q, \quad b = q + y, \quad c = x + y, \quad d = x + z, \quad e = z + p. \tag{7}$$

Prema (7) tangencijalne dužine x, y, z, p, q možemo izraziti preko stranica peterokuta:

$$\begin{aligned} a + b + c + d + e &= (p + q) + (q + y) + (x + y) + (x + z) + (z + p) \\ &= 2(x + y + z + p + q) \end{aligned}$$
$$\implies \frac{a + b + c + d + e}{2} = x + (y + q) + (z + p) = x + b + e \implies x = s - b - e,$$

i analogno, $y = s - d - a$, $z = s - c - a$, $p = s - d - b$, $q = s - c - e$, gdje je $s = \dfrac{a + b + c + d + e}{2}$ poluopseg peterokuta $ABCDE$, x, y, z, p, $q > 0$ pa uvjet tangencijalnosti peterokuta glasi:

$$x = s - b - e, \quad y = s - d - a, \quad z = s - c - a, \quad p = s - d - b, \quad q = s - c - e$$
$$x,\ y,\ z,\ p,\ q > 0. \tag{8}$$

Ako vrijedi uvjet tangencijalnosti za promatrani peterokut, on je tangencijalan.

Primjer 2. Stranice peterokuta su redom dužine duljina 5, 2, 1, 3 i 7 cm. Je li on tangencijalan?

Odgovor. Neka je npr. $a = 5$ cm, $b = 2$ cm, $c = 1$ cm, $d = 3$ cm, $e = 7$ cm. Iz (8) računamo poluopseg peterokuta i duljine tangencijalnih dužina:

$$s = \frac{a + b + c + d + e}{2} = 9 \text{ cm},$$
$$x = s - b - e = 0, \quad y = s - d - a = 1 \text{ cm}, \quad z = s - c - a = 3 \text{ cm},$$
$$p = s - d - b = 4 \text{ cm}, \quad q = s - c - e = 1 \text{ cm}.$$

Kako x nije veće od nule ne postoji tangencijalan peterokut sa zadanim stranicama.

Primjer 3. Neka su duljine tangencijalnih dužina peterokuta 2, 1, 4, 5, 6 cm. Odredi stranice odgovarajućeg tangencijalnog peterokuta.

Odgovor. Neka su duljine tangencijalnih dužina npr. $x = 2$ cm, $y = 1$ cm, $z = 4$ cm, $p = 5$ cm, $q = 6$ cm. Prema (7) dobivamo stranice jednog od tangencijalnih peterokuta:

$$a = p + q = 11 \text{ cm}, \quad b = q + y = 7 \text{ cm}, \quad c = x + y = 3 \text{ cm},$$
$$d = x + z = 6 \text{ cm}, \quad e = z + p = 9 \text{ cm}.$$

Ako su duljine tangencijalnih dužina $x = 6$ cm, $y = 2$ cm, $z = 4$ cm, $p = 1$ cm, $q = 5$ cm stranice drugog tangencijalnog peterokuta su: $a = p+q = 6$ cm, $b = q+y = 7$ cm, $c = x + y = 8$ cm, $d = x + z = 10$ cm, $e = z + p = 5$ cm.

Koliki je polumjer upisane kružnice?

Neka je s P označena površina peterokuta $ABCDE$. Sa slike 5 se vidi da je ona jednaka zbroju površina pet trokuta: $\triangle OAB$, $\triangle OBC$, $\triangle OCD$, $\triangle ODE$, $\triangle OEA$, tj.

$$P = P_{\triangle OAB} + P_{\triangle OBC} + P_{\triangle OCD} + P_{\triangle ODE} + P_{\triangle OEA}$$

pa kako je:

$$P_{\triangle OAB} = \frac{ar}{2}, \quad P_{\triangle OBC} = \frac{br}{2}, \quad P_{\triangle OCD} = \frac{cr}{2}, \quad P_{\triangle ODE} = \frac{dr}{2} \quad \text{i} \quad P_{\triangle OEA} = \frac{er}{2}$$

$$\Longrightarrow P = \frac{a+b+c+d+e}{2} r = sr \Longrightarrow r = \frac{P}{s} \qquad (3*)$$

gdje je s poluopseg peterokuta.

Dakle, nije svaki peterokut tangencijalan, ali ako je, središte mu je upisane kružnice presjek simetrala njegovih kutova. Polumjer upisane kružnice dan je formulom $(3*)$ koja je ista kao formula $(1*)$ za trokut, s tom razlikom što su P i s u formuli $(3*)$ površina i poluopseg peterokuta. Pravilni peterokut je onaj kojemu su sve stranice jednakih duljina, i jednakih unutarnjih kutova.

Je li pravilni peterokut tangencijalan?

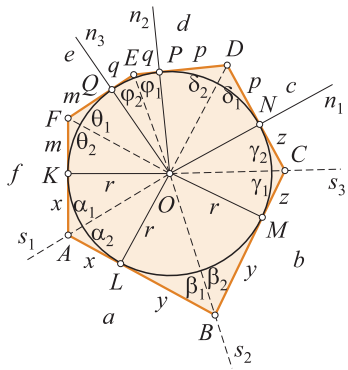
Neka su stranice pravilnog peterokuta $ABCDE$ $a = b = c = d = e$ s kutovima $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \varphi$. Iz uvjeta tangencijalnosti (8) se dobije: $s = \dfrac{a+b+c+d+f}{2} = \dfrac{5a}{2}$, $x = s - b - e = \dfrac{5a}{2} - a - a = \dfrac{a}{2} > 0$, $y = \dfrac{a}{2} > 0$, $z = \dfrac{a}{2} > 0$, $p = \dfrac{a}{2} > 0$, $q = \dfrac{a}{2} > 0$. Očigledno je uvjet (8) ispunjen pa je pravilan peterokut tangencijalan.

Sljedeći po složenosti je šesterokut.

Je li svaki šesterokut tangencijalan?

Vrijedi li za tangencijalne šesterokute formula $r = \dfrac{P}{s}$ za polumjer upisane kružnice u kojoj su P i s površina i poluopseg šesterokuta?

Promatrajmo sada tangencijalni šesterokut $ABCDEF$ s kutovima $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, $\beta = \beta_1 + \beta_2$, $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, $\delta = \delta_1 + \delta_2$, $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ i $\theta = \theta_1 + \theta_2$ te stranicama duljina $a = |AB|$, $b = |BC|$, $c = |CD|$, $d = |DE|$, $e = |EF|$ i $f = |FA|$. Neka se simetrale s_1 i s_2 kutova šesterokuta α i β sijeku u točki O tj. $s_1 \cap s_2 = O$. Točka O je i na simetrali s_1 $(\alpha_1 = \alpha_2)$ i na simetrali s_2 $(\beta_1 = \beta_2)$ pa je $|OK| = |OL|$ i $|OL| = |OM|$ odakle je $|OK| = |OL| = |OM| = r$ što znači da su točke K, L, M jednako udaljene od točke O pa pripadaju kružnici $k(O, r)$. Sa slike 6 je očigledno $|AK| = |AL| = x$ i $|BL| = |BM| = y$ jer su to tangencijalne dužine iz vrhova A i B. Spustimo sada okomice n_1, n_2 i n_3 na stranice c, d i e. One sijeku stranice c, d, e u točkama N, P, Q, tj. $n_1 \cap c = N$, $n_2 \cap d = P$ i $n_3 \cap e = Q$. Da bi N, P, Q pripadale kružnici $k(O, r)$ mora biti $|ON| = |OP| = |OQ| = r$. Pretpostavimo da je $|ON| = |OP| = |OQ| = r$. Tada se u šesterokut može upisati kružnica tj. šesterokut $ABCDEF$ je tangencijalan. Kako je $|OM| = r = |ON|$, $|ON| = r = |OP|$, $|OP| = r = |OQ|$, $|OQ| = r = |OK|$ točka O se nalazi na simetralama kutova γ, δ, φ i θ, pa se središte upisane kružnice šesterokutu, nalazi u presjeku simetrala svih njegovih unutarnjih kutova.



Slika 6.

Koliki je polumjer upisane kružnice tangencijalnog šesterokuta?

Neka je s P označena površina tangencijalnog šesterokuta $ABCDEF$. Sa slike 6 se vidi da je ona jednaka zbroju površina šest trokuta: $\triangle OAB$, $\triangle OBC$, $\triangle OCD$, $\triangle ODE$, $\triangle OEF$, $\triangle OFA$, tj.

$$P = P_{\triangle OAB} + P_{\triangle OBC} + P_{\triangle OCD} + P_{\triangle ODE} + P_{\triangle OEF} + P_{\triangle OFA}$$

pa kako je:

$$P_{\triangle OAB} = \frac{ar}{2}, \quad P_{\triangle OBC} = \frac{br}{2}, \quad P_{\triangle OCD} = \frac{cr}{2},$$
$$P_{\triangle ODE} = \frac{dr}{2}, \quad P_{\triangle OEF} = \frac{er}{2}, \quad P_{\triangle OFA} = \frac{fr}{2}$$
$$\Longrightarrow P = \frac{a+b+c+d+e+f}{2} r = sr \Longrightarrow r = \frac{P}{s} \qquad (4*)$$

gdje je $s = \dfrac{a+b+c+d+e+f}{2}$ poluopseg šesterokuta.

Dakle, nije svaki šesterokut tangencijalan, ali ako je, središte upisane mu kružnice je u presjeku simetrala svih njegovih unutarnjih kutova. Polumjer upisane kružnice dan je formulom $(4*)$ koja "podsjeća" na formulu $(1*)$ za trokut, s tom razlikom što su P i s u formuli $(4*)$ površina i poluopseg šesterokuta.

Pitanje je kako među šesterokutima prepoznati tangencijalne.

Sa slike 6 vidimo da su duljine stranica tangencijalnog šesterokuta:

$$a = x + y, \quad b = y + z, \quad c = z + p, \quad d = p + q, \quad e = q + m \quad \text{i} \quad f = m + x,$$

pa se uvjet tangencijalnosti šesterokuta lako dobije:

$$a+b+c+d+e+f = 2(x+y+z+m+p+q)$$
$$\Longrightarrow a+b+c+d+e+f = 2(a+c+e)$$
$$\Longrightarrow b+d+f = a+c+e. \qquad (9)$$

Relacija (9) je uvjet tangencijalnosti šesterokuta i glasi: zbroj tri nesusjedne stranice šesterokua jednak je zbroju druge tri nesusjedne stranice. Ako je uvjet tangecijalnosti za promatrani šesterokut ispunjen, on je tangencijalan.

Je li pravilan šesterokut tangencijalan?

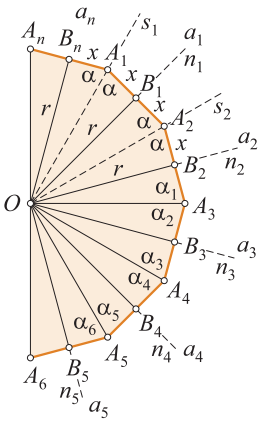
Pravilan šesterokut je onaj koji ima šest jednakih stranica tj. $a = b = c = d = e = f$. Iz (9) se vidi da je uvjet tangencijalnosti šesterokuta ispunjen pa se u njega može upisati kružnica.

Primjer 4. Stranice šesterokuta su duljina 5, 2, 3, 4, 7 i 9 cm. Je li ovaj šesterokut tangencijalan?

Odgovor. Tangencijalan je ako se ove dužine mogu rasporediti u dvije grupe tako da su zbrojevi duljina po tri nesusjedne stranice jednaki. Opseg šesterokuta je 30 cm pa je zbroj stranica u svakoj grupi jednak 15 cm. Kako je $15\ \text{cm} = 5\ \text{cm} + 3\ \text{cm} + 7\ \text{cm} = 2\ \text{cm} + 4\ \text{cm} + 9\ \text{cm}$ jedan od mogućih šesterokuta imao bi stranice $a = 5\ \text{cm}$, $b = 2\ \text{cm}$, $c = 3\ \text{cm}$, $d = 4\ \text{cm}$, $e = 7\ \text{cm}$ i $f = 9\ \text{cm}$.

Jasno je da što mnogokut ima veći broj stranica, uvjet da bude tangencijalan postaje sve složeniji i zato je sve teže među zadanim mnogokutima s istim brojem stranica (koje su u općem slučaju različite duljine) prepoznati ima li tangencijalnih među njima, a čak i ako je na neki način poznato da ih ima, teško ih je naći. Imajući u vidu uvjet tangencijalnosti četverokuta i šesterokuta, uvjet tangencijalnosti za n-terokut s parnim brojem stranica

mogao bi glasiti: $a_1+a_3+a_5+\ldots+a_{2k-1} = a_2+a_4+a_6+\ldots+a_{2k}$, $k \geqslant 1$. Imajući u vidu uvjet tangencijalnosti za trokut i peterokut, uvjet tangencijalnosti koji je definiran preko tangencijalnih dužina za n-terokut s neparnim brojem stranica, bio bi još složeniji. Kako nemamo eksplicitno dan uvjet tangencijalnosti za n-terokut, provjeru tangencijalnosti pravilnog n-terokuta (sve stranice jednakih duljina i svi kutovi jednaki) možemo napraviti samo direktno, ne precizirajući je li n-terokut s parnim ili neparnim brojem stranica. Ako se ispostavi da je pravilni n-terokut tangencijalan postavlja se pitanje bi li za polumjer upisane kružnice vrijedila ista formula kao $(1*)$ za trokut s tom razlikom što su u njoj P i s površina i poluopseg n-terokuta.



Slika 7.

Na slici 7 prikazan je dio pravilnog n-terokuta s vrhovima A_1, $A_2, \ldots, A_n$, stranicama $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a$ i unutarnjim kutovima $\sphericalangle A_1 = \sphericalangle A_2 = \cdots = \sphericalangle A_n = 2\alpha$, okomicama n_1, $n_2, \ldots$ na stranice $\overline{A_1A_2} = a_1 = a$, $\overline{A_2A_3} = a_2 = a, \ldots$, koje sijeku stranice u točkama B_1, $B_2, \ldots$ simetralama kutova kod vrhova n-terokuta.

Time se vidi da je pravilan n-terokut tangencijalan tj. da se u njega može upisati kružnica.

Koliki je polumjer te upisane kružnice?

Njega je sada lako naći. Neka je P površina n-terokuta. Ona se sastoji od površina n sukladnih jednakokračnih trokuta s osnovicom a i visinom r, koja je polumjer upisane kružnice tj.

$$P = P_{\triangle OA_1A_2} + P_{\triangle OA_2A_3} + \ldots + P_{\triangle OA_nA_1} = n \cdot \frac{ar}{2} = sr$$

$$\Longrightarrow r = \frac{P}{s}, \quad n \geqslant 3 \qquad (5*)$$

Dakle, u svaki pravilan n-terokut može se upisati kružnica čiji je polumjer dan formulom $(5*)$ u kojoj su P i s površina i poluopseg pravilnog n-terokuta. Formula vrijedi za tj. $n \geqslant 3$ počevši od pravilnog trokuta, preko kvadrata, pravilnog peterokuta... itd.

Ono što je važno je da su osim pravilnih mnogokuta tangencijalni i mnogi drugi koji zadovoljavaju uvjet tangencijalnosti kada je ovaj poznat. Osim pravilnog trokuta tangencijalni su i ostali. Osim kvadrata, romba, deltoida, te trapeza i četverokuta s različitim stranicama za koje vrijedi uvjet tangencijalnosti četverokuta, pravilnog peterokuta i onih koji ispunjavaju uvjet tangencijalnosti za peterokut, pravilnog šesterokua i svih drugih koji ispunjavaju uvjet tangencijalnosti za šesterokut ... itd.

Dakle, za sve tangencijalne mnogokute vrijedi formula $r = \frac{P}{s}$ u kojoj su r, P i s polumjer upisane kružnice u mnogokut, površina i poluopseg mnogokuta, dok se njezino središte nalazi u presjeku simetrala kutova mnogokuta.

Literatura

[1] Vladimir Stojanović, *Matematiskop 3: Odabrani zadaci za prvi razred srednjih škola* (peto izdanje), Matematiskop, Beograd 1995.

[2] Vladimir Stojanović, Ninoslav Ćirić, *Matematiskop 5: Zbirka rešenih zadataka za treći razred srednjih škola*, IP Matematiskop, Beograd 1998.