ZADATCI I RJEŠENJA

Redakcija, iz tehničkih razloga, daje ovo upozorenje:

Krajnji rok za primanje rješenja iz ovog broja je 28. veljače 2027. Rješenja (i imena rješavatelja) bit će objavljena u br. 4/308.

Ujedno molimo da pripazite na upute rješavateljima koje su na str. 144.

A) Zadatci iz matematike

4113. Pokaži (bez pomoći računala)

$$\sqrt{5+\sqrt{21}}+\sqrt{8+\sqrt{55}} = \sqrt{7+\sqrt{33}}+\sqrt{6+\sqrt{35}}.$$

4114. Dana je periodička funkcija $f(x)$ s periodom $T=\frac{1}{3}$. Odredi $f(1)$ ako je

$$f^2(2)-5f(10)+\frac{21}{4}=0$$

$$4f^2(-1)-4f\left(\frac{10}{3}\right)-35=0.$$

4115. Ako su a, b, c pozitivni realni brojevi, dokaži nejednakost

$$\frac{a(a+2b)}{a^2+2bc}+\frac{b(b+2c)}{b^2+2ca}+\frac{c(c+2a)}{c^2+2ab} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

Kada vrijedi jednakost?

4116. Dan je tetraedar $ABCD$ kojemu je njegovo težište G jednako udaljeno od vrhova A i B. Dokaži da je

$$|AC|^2+|AD|^2=|BC|^2+|BD|^2.$$

4117. Dan je neparan prost broj p i pozitivan cijeli broj k takav da je $\sqrt{k^2-pk}$ također pozitivan cijeli broj. Odredi broj k.

4118. Odredi sva rješenja jednadžbe (u skupu kompleksnih brojeva)

$$(1+x)^8+(1+x^2)^4=2x^4.$$

4119. U jednokostraničnom trokutu ABC stranice duljine 13 upisan je jednakostranični trokut stranice duljine 7. U kojem omjeru dijeli vrh drugog trokuta stranicu prvog?

4120. Dano je n pozitivnih realnih brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_n$ čija je suma jednaka 1. Dokaži nejednakost

$$\left(a_1+\frac{1}{a_1}\right)+\left(a_2+\frac{1}{a_2}\right)+\ldots+\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right) \geq \frac{n^4+2n^2+1}{n}.$$

4121. U trokutu ABC je $\sphericalangle ABC=80^\circ$, E je polovište stranice $\overline{AC}$ i D je točka na stranici $\overline{BC}$ takva da je $2|BD|=|CD|$. Dužine $\overline{AD}$ i $\overline{BE}$ sijeku se u točki F. Koliki je omjer površina trokuta BDF i četverokuta $DCEF$?

4122. Ako je u trokutu ABC, $\alpha-\beta=90^\circ$, dokaži jednakost

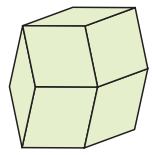
$$(a^2-b^2)^2=(a^2+b^2)c^2.$$

4123. Promatraj prvih šest članova geometrijskog niza. Odredi članove tog niza ako je njihova suma s parnim indeksima jednaka 546, a suma preostalih 182.

4124. Odredi sumu

$$\sum_{k=1}^{n}\log_{\frac{1}{2}}\frac{k^2+2k}{k^2+2k+1}.$$

4125. Za konveksni $2n$-terokut kažemo da je romboidni ako su mu sve stranice jedinične duljine i nasuprotne stranice su mu paralelne (kao što je prikazano na slici za $n=4$).



Romboidni $2n$-terokut se može razložiti na rombove stranice duljine 1 na nekoliko načina. Za koji n se romboidni $2n$-terokut može razložiti na 666 rombova?

4126. Dokaži da jednadžba $x^2+y^2+z^2=7$ nema nijedno rješenje u skupu racioalnih brojeva.

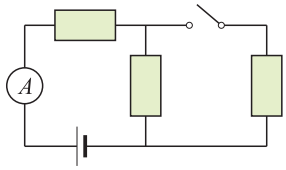
B) Zadatci iz fizike

OŠ – 574. Marko želi odrediti gustoću kamena, ali nema dovoljno veliku menzuru kojom bi mu odredio volumen. Pomoću dinamometra iz pribora za fiziku odredio je da mu je težina 3.5 N (njutna), a kad ga je uronio u vodu težina mu se smanjila na 2.1 N. Iz tih je podataka mogao odrediti gustoću kamena. Koliki je iznos gustoće dobio?

OŠ – 575. Ljudsko srce za jedan otkucaj potroši oko 2 J (džula) energije. Kolika je snaga srca čovjeka koji ima prosječno 75 otkucaja u minuti? Koliko energije potroši njegovo srce tijekom dana? Na koju bi se visinu mogao popeti s tom energijom ako pretpostavimo da je korisnost penjanja 50 posto?

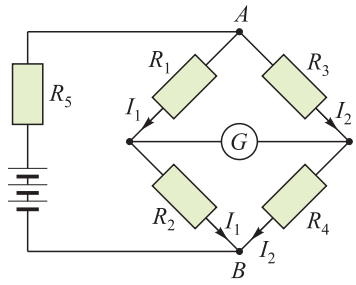
OŠ – 576. Drveni valjak ima promjer 20 cm i napravljen je od drva gustoće 800 $\mathrm{kg/m^3}$. Postavljen u uspravan položaj tlači podlogu tlakom od 3200 Pa (paskala). Kolika je visina i volumen valjka?

OŠ – 577. Svi otpornici na slici imaju jednak otpor. Kad je prekidač zatvoren ampermetar pokazuje struju od 0.3 A. Koliko će pokazivati kad se prekidač otvori? Napon izvora je 9 V. Koliki je otpor jednog otpornika?



1910. Komad leda početne temperature $-20\,^{\circ}\mathrm{C}$ stavljen je u toplinski izoliran spremnik u kojem se nalazi 1 kg vodene pare početne temperature $150\,^{\circ}\mathrm{C}$. Uz pretpostavku da led može na sebi kondenzirati svu paru, kolika se maksimalna masa leda može otopiti? Pretpostavi da specifični toplinski kapaciteti leda, vode i pare ne ovise o temperaturi te koristi vrijednosti od 2.1 $\mathrm{kJ/kg\,K}$ za led, 4.2 $\mathrm{kJ/kg\,K}$ za vodu te 1.5 $\mathrm{kJ/kg\,K}$ za paru (pri stalnom volumenu). Za latentnu toplinu taljenja leda koristi 334 $\mathrm{kJ/kg}$, a za latentnu toplinu vrenja vode 2260 $\mathrm{kJ/kg}$.

1911. Tri baterije, svaka napona 4.5 V, spojene su serijski i priključene na otpornike poznatih otpora $R_1 = 40\ \Omega$, $R_2 = 60\ \Omega$, $R_5 = 10\ \Omega$ te nepoznatih otpora R_3 i R_4, kao na slici.



a) Koliki moraju biti otpori R_3, R_4 da bi napon između točaka A i B bio 12 V, a da galvanometrom ne bi tekla struja?

b) Kolike su struje u pojedinim granama uz prethodni uvjet?

(Zadatak osmislio Ivan Jukić.)

1912. a) Odredi period gibanja satelita koji orbitira po kružnoj putanji na udaljenosti 20 000 km od središta Zemlje.

b) Koristeći Keplerove zakone i pretpostavku da je Zemlja materijalna točka, odredi vrijeme koje bi bio potrebno da satelit s te visine padne na Zemlju ako počne padati iz mirovanja. Zanemari otpor zraka.

c) Iz prethodnih rezultata procijeni vrijeme potrebno da satelit iz mirovanja padne na površinu Zemlje, uzimajući u obzir njezin stvarni polumjer. Pri tome ovisnost gravitacijskog polja između središta Zemlje i početnog položaja satelita aproksimiraj konstantom vrijednošću kompatibilnom s prethodnim razultatom za točkastu masu.

Masa Zemlje je $6 \cdot 10^{24}$ kg, a njezin polumjer 6380 km.

(Zadatak osmislio Ivan Jukić.)

1913. Iz jedne točke izbacuju se dvije jednake kuglice vertikalno uvis, jedna za drugom, istom početnom brzinom od 30 m/s, a s vremenskim razmakom od 2 s. Nakon nekog vremena se elastično sudare. Koliko dugo je svaka kuglica u zraku? Koristi $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$.

(Zadatak osmislio Ivan Jukić.)

1914. Uzmi punu homogenu kuglu određenoga momenta inercije (oko osi koja prolazi njezinim centrom mase). Koliko je puta veći moment inercije (oko iste osi) šuplje kugle iste mase, od istoga materijala, čiji je unutarnji polumjer jednak polumjeru pune kugle?

1915. Tanka leća žarišne duljine 10 cm se nalazi na udaljenosti 30 cm od ravnoga zrcala, a između zrcala i leće na udaljenosti 20 cm od leće nalazi se predmet. Kolika je udaljenost između dviju slika predmeta ako je leća konvergentna, a kolika ako je divergentna?

1916. Upoznaj se s pojmom Schwarzschildova polumjera (vidi rješenje zadatka 1883) pa izračunaj mase i gustoće crnih rupa polumjera 1 mm, 1 m, 1 km. Volumenom crne rupe smatramo volumen zahvaćen Schwarzschildovim polumjerom. Što možeš zaključiti o odnosu mase i gustoće crnih rupa?

C) Rješenja iz matematike

4085. *Ako je*

$$(3x-y)^2+\sqrt{x+38+14\sqrt{x-11}}+|x-y+z| = 7,$$

koliko je $x+y+z$*?*

Rješenje. Sređivanjem dobivamo redom:

$$(3x-y)^2+\sqrt{x-11+14\sqrt{x-11}+49}+|x-y+z|=7$$

$$(3x-y)^2+\sqrt{(\sqrt{x-11}+7)^2}+|x-y+z| = 7$$

$$(3x-y)^2+|\sqrt{x-11}+7|+|x-y+z| = 7.$$

Ako je $\sqrt{x-11}+7$ nenegativno, možemo zapisati:

$$(3x-y)^2+\sqrt{x-11}+7+|x-y+z| = 7$$

$$(3x-y)^2+\sqrt{x-11}+|x-y+z| = 0.$$

Uočimo da su sva tri pribrojnika na lijevoj strani jednakosti nenegativna, pa mora biti:

$$\begin{aligned} 3x-y &= 0\\ x-11 &= 0\\ \underline{x-y+z &= 0} \end{aligned}$$

tj.

$$x = 11, \quad y = 3x = 33, \quad z = y-x = 22.$$

Tako je $x+y+z = 66$.

Ivan Jukić (1),
Gimnazija Vukovar, Vukovar

4086. *Ako su* a, b, c *pozitivni brojevi takvi da je* $a+b+c = 1$, *dokaži nejednakost*

$$7(ab+bc+ca) \leq 2+9abc.$$

Rješenje. Koristimo nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine za tri nenegativna broja:

$$a^2b = (a^3a^3b^3)^{\frac{1}{3}} \leqslant \frac{2}{3}a^3+\frac{1}{3}b^3$$

i analogno

$$\begin{aligned} ab^2 &\leqslant \frac{1}{3}a^3+\frac{2}{3}b^3,\\ b^2c &\leqslant \frac{2}{3}b^3+\frac{1}{3}c^3,\\ bc^2 &\leqslant \frac{1}{3}b^3+\frac{2}{3}c^3,\\ a^2c &\leqslant \frac{2}{3}a^3+\frac{1}{3}c^3,\\ ac^2 &\leqslant \frac{1}{3}a^3+\frac{2}{3}c^3. \end{aligned}$$

Odavde dobivamo

$$\begin{aligned} &a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+a^2c+ac^2\\ &\leqslant 2(a^3+b^3+c^3),\\ &7(a^2b+ab^2+abc+b^2c+bc^2+abc\\ &\quad +a^2c+ac^2+abc)\\ &\leqslant 2(a^3+b^3+c^3+3a^2b+3ab^2+3b^2c\\ &\quad +3bc^2+3a^2c+3ac^2+6abc)+9abc,\\ &7[ab(a+b+c)+bc(a+b+c)+ac(a+b+c)]\\ &\leqslant 2(a+b+c)^3+9abc,\\ &7(ab+bc+ca) \leqslant 2+9abc. \end{aligned}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je

$$a = b = c = \frac{1}{3}.$$

Ivan Jukić (1), Vukovar

4087. *Neka je* $P(x) = ax^2+bx+c$ *kvadratni trinom s nenegativnim koeficijentima. Dokaži da za svaki pozitivan* x *vrijedi*

$$P(x)P\left(\frac{1}{x}\right) \geq (P(1))^2.$$

Rješenje.

$$\begin{aligned} &P(x)P\left(\frac{1}{x}\right)\\ &= (ax^2+bx+c)\left(\frac{a}{x^2}+\frac{b}{x}+c\right) \end{aligned}$$

$$= a^2 + abx + acx^2 + \frac{ab}{x} + b^2$$
$$+ bcx + \frac{ac}{x^2} + \frac{bc}{x} + c^2$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 + ab\left(x + \frac{1}{x}\right) + bc\left(x + \frac{1}{x}\right)$$
$$+ ac\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$$
$$\geqslant a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$$
$$= (a + b + c)^2$$
$$= [P(1)]^2.$$

Jednakost se postiže ako i samo ako je $x = 1$.

Ivan Jukić (1), Vukovar

4088. *Odredi kompleksne brojeve w i z iz uvjeta:*

$$\frac{w+z}{1+wz} + \frac{1}{z} = 0, \qquad \frac{w-z}{1-wz} + \frac{1}{w} = 0.$$

Rješenje. Iz danih jednadžbi dobivamo:

$$wz + z^2 + 1 + wz = 0 \qquad (1)$$
$$w^2 - wz + 1 - wz = 0. \qquad (2)$$

Iz (1) je $w = -\dfrac{1+z^2}{2z}$ i to se uvrsti u (2), pa se dobije

$$\left(\frac{1+z^2}{2z}\right)^2 + 1 + z^2 + 1 = 0$$
$$\Longrightarrow 5z^4 + 10z^2 + 1 = 0,$$

odakle je

$$z_1 = \frac{i}{5}\sqrt{25+10\sqrt{5}}, \quad w_1 = -\frac{i}{5}\sqrt{25-10\sqrt{5}},$$
$$z_2 = \frac{i}{5}\sqrt{25-10\sqrt{5}}, \quad w_2 = \frac{i}{5}\sqrt{25+10\sqrt{5}},$$
$$z_3 = -\frac{i}{5}\sqrt{25+10\sqrt{5}}, \quad w_3 = \frac{i}{5}\sqrt{25-10\sqrt{5}},$$
$$z_4 = -\frac{i}{5}\sqrt{25-10\sqrt{5}}, \quad w_4 = -\frac{i}{5}\sqrt{25+10\sqrt{5}}.$$

Nemanja Praška (4),
Gimnazija "20. oktobar", Bačka Palanka

4089. *Ako su a, b, x, y pozitivni realni brojevi dokaži nejednakost*

$$\frac{a^3}{x} + \frac{b^3}{y} \geq \frac{(a+b)^3}{2(x+y)}.$$

Rješenje. Iz nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine imamo:

$$a^3y^2 + b^3x^2 + b^3xy \geqslant 3ab^2xy \quad \text{i}$$
$$a^3y^2 + b^3x^2 + a^3xy \geqslant 3a^2bxy.$$

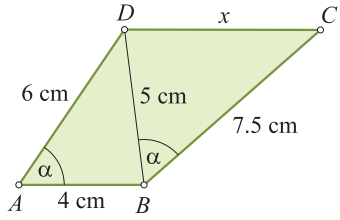
Zbrajanjem ovih nejednakosti dobivamo

$$2(a^3y^2 + b^3x^2) + (a^3 + b^3)xy \geqslant 3xy(a^2b + ab^2)$$
$$\Longleftrightarrow 2(a^3y + b^3x)(x + y)$$
$$\geqslant xy(a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2)$$
$$\Longleftrightarrow \frac{2(a^3y + b^3x)}{xy} \geq \frac{(a+b)^3}{x+y}$$
$$\Longleftrightarrow \frac{a^3}{x} + \frac{b^3}{y} \geq \frac{(a+b)^3}{2(x+y)}.$$

Ivan Jukić (1), Vukovar

4090. *U četverokutu $ABCD$ je $|AB| = 4$ cm, $|BC| = 7.5$ cm, $|AD| = 6$ cm, $|BD| = 5$ cm i $\sphericalangle DAB = \sphericalangle DBC = \alpha$. Kolika je duljina dužine $\overline{CD}$?*

Rješenje. Koristimo poučak o kosinusima.



Najprije za trokut ABD:

$$5^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cos\alpha$$
$$25 = 36 + 16 - 48 \cdot \cos\alpha$$
$$\cos\alpha = \frac{9}{16},$$

a potom za trokut BCD:

$$x^2 = 5^2 + 7.5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7.5 \cdot \cos\alpha = \frac{625}{16}$$
$$x = \frac{25}{4} = 6.25 \text{ cm}.$$

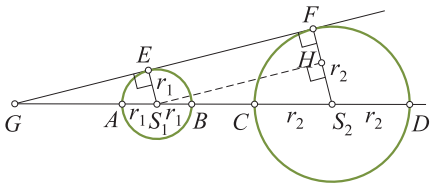
Ivan Jukić (1), Vukovar

4091. *Na pravcu su dane točke A, B, C, D, tim redom. Nad $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ kao promjerima su konstruirane kružnice i njihova zajednička tangenta EF, gdje su E i F točke na tim kružnicama i $EF \cap AD = G$. Pokaži da je*

i) $|AC||BG| = |BD||AG|$

ii) $|EF|^2 = |AC||BD|$.

Rješenje.



i) Zbog $\triangle GES_1 \sim \triangle GFS_2$ je

$$\frac{|GS_1|}{|GS_2|} = \frac{r_1}{r_2}$$

$$\frac{|GA| + r_1}{|GA| + |AC| + r_2} = \frac{2r_1}{2r_2}$$

$$\frac{|AG| + \dfrac{|AB|}{2}}{|AG| + |AC| + \dfrac{|CD|}{2}} = \frac{|AB|}{|CD|}$$

$$|AG| \cdot |CD| + \frac{1}{2}|AB| \cdot CD|$$

$$= |AG| \cdot |AB| + |AC| \cdot |AB| + \frac{1}{2}|AB| \cdot CD|$$

$$|AG| \cdot |CD|$$

$$= |AG| \cdot |AB| + |AC|(|BG| - |AG|)$$

$$= |AG| \cdot |AB| + |AC| \cdot |BG| - |AC| \cdot |AG|$$

$$|AC| \cdot |BG| = |AG|(|CD| + |AC| - |AB|)$$

$$= |AG| \cdot |BD|.$$

ii) Iz $\triangle S_1S_2H$ po Pitagorinu poučku je:

$$|S_1H|^2 = |S_1S_2|^2 - (r_2 - r_1)^2$$

$$|EF|^2 = (r_1 + |BC| + r_2)^2 - (r_2 - r_1)^2$$

$$= (r_1 + |BC| + r_2 - r_2 + r_1)$$

$$\cdot (r_1 + |BC| + r_2 + r_2 - r_1)$$

$$= (2r_1 + |BC|)(|BC| + 2r_2)$$

$$= |AC| \cdot |BD|.$$

Ivan Jukić (1), Vukovar

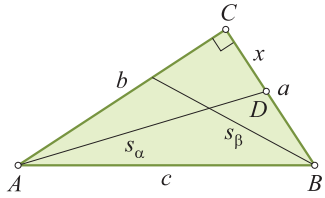
4092. *Neka su s_α i s_β duljine simetrala šiljastih kutova pravokutnog trokuta ABC i P njegova površina. Dokaži da vrijedi nejednakost*

$$\frac{1}{s_\alpha^2} + \frac{1}{s_\beta^2} \geq \frac{1}{4P}(2 + \sqrt{2}).$$

Rješenje. Označimo s D točku presjeka simetrale s_α s katetom $\overline{BC}$ i neka je $|CD| = x$. Korištenjem poučka o simetrali unutarnjeg kuta trokuta dobivamo

$$\frac{|CD|}{|DB|} = \frac{|AC|}{|AB|} \quad \text{ili} \quad \frac{x}{a - x} = \frac{b}{c}.$$

Odavde je $x = \dfrac{ab}{b + c}$.



Primjenom Pitagorinog poučka na pravokutni trokut ADC imamo

$$s_\alpha^2 = b^2 + \left(\frac{ab}{b + c}\right)^2,$$

odnosno

$$s_\alpha^2 = \frac{b^2(b^2 + 2bc + c^2 + a^2)}{(b + c)^2}.$$

Odavde zbog $a^2 + b^2 = c^2$ je $s_\alpha^2 = \dfrac{2b^2c}{b + c}$.

Analogno dobijemo $s_\beta^2 = \dfrac{2a^2c}{a + c}$. Iz ovih jednakosti imamo

$$\frac{1}{s_\alpha^2} + \frac{1}{s_\beta^2} = \frac{b + c}{2b^2c} + \frac{a + c}{2a^2c}$$

$$= \frac{ab(a + b) + c(a^2 + b^2)}{2a^2b^2c}. \qquad (1)$$

Sada zadana nejednakost postaje

$$\frac{ab(a + b) + c(a^2 + b^2)}{2a^2b^2c} \geqslant \frac{1}{2ab}(2 + \sqrt{2}),$$

ili ekvivalentno

$$ab(a + b) + c(a^2 + b^2) \geqslant abc(2 + \sqrt{2}),$$

odnosno

$$c(a - b)^2 \geqslant (c\sqrt{2} - a - b)ab$$

$$= \frac{ab(2c^2 - (a + b)^2)}{c\sqrt{2} + a + b}$$

$$= \frac{ab(a - b)^2}{c\sqrt{2} + a + b}.$$

Razlikujemo dva slučaja: $a = b$ i $a \neq b$. Ako je $a = b$, posljednja nejednakost vrijedi (jer

postaje jednakost). Ako je $a \neq b$, posljednja nejednakost je ekvivalentna s

$$c(c\sqrt{2}+a+b) \geqslant ab,$$

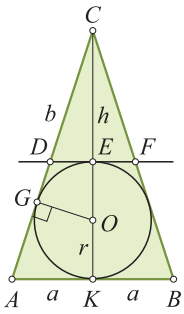
a ova očito vrijedi. Ovime je dokaz završen.

Nemanja Praška (4), Bačka Palanka

4093. *Duljina osnovice jednakokračnog trokuta je $2a$, a visina na nju je h. Tangenta na upisanu kružnicu paralelna je s osnovicom trokuta. Odredi duljinu dijela tangente unutar trokuta.*

Rješenje. Iz $|AC| = |BC| = \sqrt{a^2+b^2}$ i sličnosti $\triangle AKC \sim \triangle OGC$ imamo

$$\frac{b}{a} = \frac{hr}{r} \implies r = \frac{ah}{a+b}.$$



Analogno iz $\triangle AKC \sim \triangle DEC$ je

$$\frac{a}{h} = \frac{|DE|}{h-2r}$$

tj.

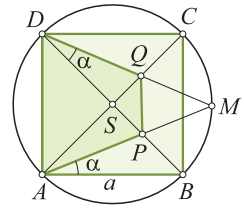
$$\begin{aligned}|DE| &= \frac{a(h-2r)}{h}\\ &= a\cdot\frac{h-2\cdot\dfrac{ah}{a+b}}{h}\\ &= a\cdot\frac{b-a}{a+b}\\ &= a\cdot\frac{\sqrt{a^2+h^2}-a}{a+\sqrt{a^2+h^2}}\\ &= a\cdot\frac{(\sqrt{a^2+h^2}-a)^2}{h^2}.\end{aligned}$$

Dakle, $|DF| = \dfrac{2a(\sqrt{a^2+h^2}-a)^2}{h^2}$.

Ivan Jukić (1), Vukovar

4094. *Na kružnici opisanoj oko kvadrata $ABCD$ proizvoljno je odabrana točka M na manjem kružnom luku BC. Presjeci pravaca AM i BD, odnosno AC i DM, su P i Q. Ako je duljina stranice kvadrata jednaka a, kolika je površina četverokuta $APQD$?*

Rješenje. Kutovi $\sphericalangle MAB$ i $\sphericalangle MDB$ su jednaki (kutovi nad istim kružnim lukom $\overset{\frown}{BM}$).



Trokut APS je pravokutan (S je točka presjeka dijagonala $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ kvadrata $ABCD$), pa je u njemu

$$\sphericalangle SAP = 45^\circ - \alpha \quad \text{i} \quad \sphericalangle APS = 45^\circ + \alpha$$

($\sphericalangle MAB$ je označen s α). Kako je $\sphericalangle MDB = \sphericalangle MAB = \alpha$, imamo

$$\sphericalangle ADM = \sphericalangle ADQ = 45^\circ + \alpha.$$

Zbog

$$\sphericalangle APD = \sphericalangle APS = 45^\circ + \alpha = \sphericalangle ADQ \quad \text{i}$$

$$\sphericalangle PAD = 90^\circ - \alpha = \sphericalangle AQD,$$

trokuti APD i AQD su slični (po K-K). Tada je

$$|AD| : |AQ| = |DP| : |AD| \quad \text{ili}$$

$$|AD|^2 = |AQ||DP|.$$

Kako je površina četverokuta s okomitim dijagonalama jednaka polovini umnoška dijagonala, imamo

$$P(APQD) = \frac{1}{2}|AQ||DP| = \frac{1}{2}|AD|^2 = \frac{1}{2}a^2.$$

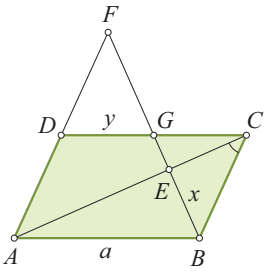
To znači da je površina četverokuta $APQD$ jednaka polovini površine kvadrata $ABCD$.

Nemanja Praška (4), Bačka Palanka

4095. *Točka F nalazi se na produžetku stranice $\overline{AD}$ paralelograma $ABCD$ (D je između A i F). Dužina $\overline{BF}$ siječe dijagonalu $\overline{AC}$ u točki E i stranicu $\overline{CD}$ u G. Dokaži da vrijedi jednakost*

$$\frac{1}{|BE|} = \frac{1}{|BG|} + \frac{1}{|BF|}.$$

Rješenje. Uvedimo oznake $|AB| = a$, $|BE| = x$ i $|DG| = y$, pa je $|GC| = a - y$.



Trokuti ABE i CGE su slični ($\sphericalangle BAE = \sphericalangle GCE$ kao šiljasti kutovi s paralelnim kracima, $\sphericalangle ABE = \sphericalangle CGE$ iz istog razloga), pa je

$$\frac{|BE|}{a} = \frac{|BG| - |BE|}{a - y} \qquad (1)$$

Trokuti ABF i DGF imaju jednake kutove, što znači da su slični. Zbog toga je

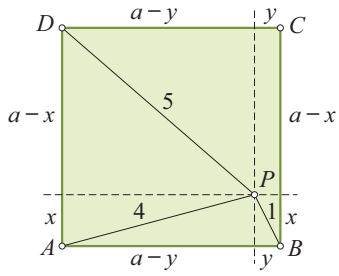
$$\frac{|BF|}{a} = \frac{|BF| - |BG|}{y}. \qquad (2)$$

Ako iz jednakosti (1) i (2) eliminiramo y dobivamo željenu jednakost.

Nemanja Praška (4), Bačka Palanka

4096. *Unutar kvadrata $ABCD$ dana je točka P takva da je $|AP| = 4$ cm, $|BP| = 1$ cm i $|DP| = 5$ cm. Kolika je površina kvadrata?*

Rješenje. Neka je stranica kvadrata jednaka a.



Koristeći Pitagorin poučak, sa slike vidimo

$$x^2 + y^2 = 1$$
$$(a - y)^2 + x^2 = 16$$
$$(a - x)^2 + (a - y)^2 = 25\cdot$$

Iz treće jednakosti imamo

$$a^2 - 2ax + x^2 + (a - y)^2 = 25$$
$$a^2 - 2ax = 9 \quad \text{tj.} \quad x = \frac{a^2 - 9}{2a}.$$

Oduzimanjem prve i druge jednakosti je

$$a^2 - 2ay = 15 \quad \text{tj.} \quad y = \frac{a^2 - 15}{2a}.$$

Uvrštavanjem u prvu jednadžbu slijedi:

$$\left(\frac{a^2 - 9}{2a}\right)^2 + \left(\frac{a^2 - 15}{2a}\right)^2 = 1$$
$$a^4 - 26a^2 + 153 = 0.$$

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su:

$$(a^2)_1 = 9 \quad \text{i} \quad (a^2)_2 = 17.$$

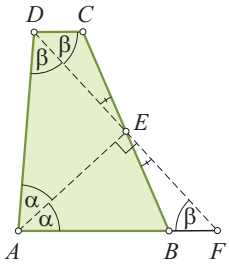
U prvom slučaju $a = 3$ cm, što nije moguće jer bi se točka P nalazila izvan kvadrata. Dakle, jedino rješenje je $a^2 = 17$, pa je površina danog kvadrata

$$P = a^2 = 17 \text{ cm}^2$$

Ivan Jukić (1), Vukovar

4097. *U trapezu $ABCD$ $(AB \| CD)$ simetrale unutarnjih kutova kod vrhova A i D sijeku se na kraku $\overline{BC}$. Dokaži $|AD| = |AB| + |CD|$.*

Rješenje. Vidimo da je $\alpha + \beta = 90°$, pa je i $\sphericalangle AFE = \beta$, što daje $\triangle AFE \cong \triangle ADE$ (svi su im kutovi jednaki i jedna stranica zajednička).



Odavde slijedi

$$|AD| = |AF| = |AB| + |BF|.$$

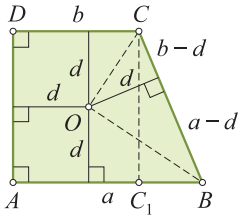
Također je $\triangle CDE \cong \triangle BFE$ (imaju sve kutove jednake i iz gornje sukladnosti je $|DE| = |EF|$). Zato je $|BF| = |CD|$, pa vrijedi dana jednakost.

Ivan Jukić (1), Vukovar

4098. *Park je oblika četverokuta $ABCD$ kojemu su kutovi u vrhovima A i D pravi. Duljine paralelnih stranica su a i b. Ako postoji drvo koje je na jednakoj udaljenosti od sve četiri njegove stranice, kolika je površina parka?*

Rješenje. Neka se drvo nalazi u točki O.

$$\begin{aligned} P &= P_{ADCC_1} + P_{\triangle CC_1B} \\ &= b \cdot 2d + \frac{(a-b)\cdot 2d}{2} \\ &= d(a+b). \end{aligned}$$



Koristimo Pitagorin poučak za trokut BCC_1:

$$|BC|^2 = (a-b)^2 + (2d)^2$$

$$(a-d+b-d)^2 = a^2 - 2ab + b^2 + 4d^2$$

$$d = \frac{ab}{a+b}.$$

Sada je $P = ab$.

Ivan Jukić (1), Vukovar

D) Rješenja iz fizike

OŠ – 566. *Mihael je u lonac mase 800 g stavio tri litre vode početne temperature $18\,^\circ C$. Temperatura lonca bila je $22\,^\circ C$. Voda je na ploči zakuhala za 10 min. Nakon toga je u vodu dodao 400 g tjestenine iste početne temperature kao lonac i izmjerio da je prošla jedna minuta dok voda nije opet zakuhala. Zna da je specifični toplinski kapacitet vode $4200\ J/kgK$, a lonca $600\ J/kgK$. Iz svojih je mjerenja izračunao specifični toplinski kapacitet tjestenine. Koji je rezultat dobio?*

Rješenje.

$m_L = 800\ \text{g} = 0.8\ \text{kg}$

$V_V = 3\ \text{L}$

$m_V = 3\ \text{kg}$

$t_L = 22\,^\circ\text{C}$

$t_V = 18\,^\circ\text{C}$

$t_{KON} = 100\,^\circ\text{C}$

$m_T = 400\ \text{g} = 0.4\ \text{kg}$

$t_1 = 10\ \text{min} = 600\ \text{s}$

$t_2 = 1\ \text{min} = 60\ \text{s}$

$c_V = 4200\ \frac{\text{J}}{\text{kgK}}$

$c_L = 600\ \frac{\text{J}}{\text{kgK}}$

$c_T = ?$

$$\begin{aligned} Q_1 &= Q_L + Q_V \\ Q_1 &= c_L m_L \Delta t_L + c_V m_V \Delta t_V \\ &= 600\ \frac{\text{J}}{\text{kgK}} \cdot 0.6\ \text{kg} \cdot 78\ \text{K} \\ &\quad + 4200\ \frac{\text{J}}{\text{kgK}} \cdot 3\ \text{kg} \cdot 82\ \text{K} \\ &= 28\,080\ \text{J} + 1\,033\,200\ \text{J} \\ &= 1\,061\,280\ \text{J} \end{aligned}$$

$$p = \frac{Q_1}{t_1} = \frac{1\,061\,280\ \text{J}}{600\ \text{s}} = 1768.8\ \text{W}$$

$$Q_2 = Pt_2 = 1768.8\ \text{W} \cdot 60\ \text{s} = 106\,128\ \text{J}$$

$$\begin{aligned} c_T &= \frac{Q_2}{m_T \cdot \Delta t_T} = \frac{106\,128\ \text{J}}{0.4\ \text{kg} \cdot 78\ \text{K}} \\ &= 3401.54\ \frac{\text{J}}{\text{kgK}}. \end{aligned}$$

Marko Dorešić (8),
OŠ Mate Lovraka, Zagreb

OŠ – 567. *Brod plovi rijekom između dvije luke. Njegova je brzina 5 puta veća od brzine rijeke. Iz luke A je krenuo u 8:30 i u luku B stigao u 11 sati. Tamo se zadržao 2 sata i krenuo natrag. U koliko se sati vratio u luku A? Luka B je nizvodno od luke A.*

Rješenje.

$v_B = 5v_R$

$t_1 = 8{:}30$

$t_2 = 11{:}00$

$t_3 = 13{:}00$

$t_{\text{povratka}} = ?$

$$v_{\text{A–B}} = v_{\text{B}} + v_{\text{R}} = 6v_{\text{R}}$$
$$v_{\text{B–A}} = v_{\text{B}} - v_{\text{R}} = 4v_{\text{R}}$$
$$s_{\text{A–B}} = s_{\text{B–A}}$$
$$v_{\text{A–B}} \cdot t_{\text{A–B}} = v_{\text{B–A}} \cdot t_{\text{B–A}} = 2.5\ \text{h}$$
$$6v_{\text{R}} \cdot 2.5\ \text{h} = 4v_{\text{R}} \cdot t_{\text{B–A}}$$
$$t_{\text{B–A}} = \frac{6 \cdot 2.5\ \text{h}}{4} = 3.75\ \text{h} = 3\ \text{h}\ 45\ \text{min}$$
$$t_{\text{povratka}} = t_3 + t_{\text{B–A}}$$
$$= 13\ \text{h} + 3\ \text{h}\ 45\ \text{min} = 16{:}45.$$

Marko Dorešić (8), Zagreb

OŠ – 568. *Konvergentna leća jakosti 4 dioptrije daje sliku predmeta visoku 18 cm. Slika je od leće udaljena 50 cm. Koliko je predmet udaljen od leće i koliko je visok?*

Rješenje.

$$j = 4\ \text{dpt}$$
$$v' = 18\ \text{cm}$$
$$\underline{b = 50\ \text{cm}}$$
$$a,\ v = ?$$
$$f = \frac{1}{j} = \frac{1}{4\ \text{dpt}} = 0.25\ \text{m} = 25\ \text{cm}$$
$$\frac{1}{a} = \frac{1}{f} - \frac{1}{b} = \frac{1}{25\ \text{cm}} - \frac{1}{50\ \text{cm}}$$
$$= \frac{2-1}{50\ \text{cm}} = \frac{1}{50\ \text{cm}}$$
$$a = 50\ \text{cm}$$

Predmet je u središtu zakrivljenosti zrcala i visok je jednako kao i njegova slika, $v = 18\ \text{cm}$.

Marko Dorešić (8), Zagreb

OŠ – 569. *Tijelo se nalazi na kosini nagiba 30° i može kliziti po njoj. Tijelo je spojeno na oprugu. U početnom trenutku opruga nije deformirana. Početna brzina tijela iznosi $2\ m/s$ i ono titra na kosini. Ukupan put koji tijelo prijeđe dok se ne zaustavi iznosi 0.8 m. Opruga je tada ponovo u početnom položaju. Koliko iznosi koeficijent trenja na kosini? Kinetička energija tijela jednaka je polovici umnoška mase tijela i kvadrata njegove brzine.*

Rješenje.

$$\alpha = 30^\circ$$
$$v = 2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$
$$\underline{s = 0.8\ \text{m}}$$
$$\mu = ?$$
$$W_{\text{sile trenja}} = E_{\text{K}}$$
$$F_{\text{tr}} = \mu F_{\text{niz kosinu}}$$
$$F^2_{\text{niz kosinu}} = G^2 - \left(\frac{G}{2}\right)^2 = \frac{3G^2}{4}$$
$$F_{\text{niz kosinu}} = \frac{G\sqrt{3}}{2}$$
$$\mu \cdot \frac{G\sqrt{3}}{2} \cdot s = \frac{mv^2}{2}$$
$$\mu \cdot \frac{mg\sqrt{3}}{2} \cdot s = \frac{mv^2}{2}$$
$$\mu = \frac{v^2}{sg\sqrt{3}} = 0.29.$$

Marko Dorešić (8), Zagreb

1896. *Banane su poznate po visokom udjelu kalija i blagoj radioaktivnosti zbog izotopa ^{40}K koji ima prirodnu zastupljenost od 0.012 % i vrijeme poluraspada 1.251 milijardi godina. Banana, čim je ubrana, više ne može biološkim putem održavati prirodnu zastupljenost radioaktivnog izotopa ^{40}K, već ona s vremenom opada. Iako se ^{40}K samo u 89 % slučajeva β-raspada u ^{40}Ca (a u 11 % slučajeva uhvatom elektrona u ^{40}Ar), pretpostavite radi jednostavnosti da se uvijek (u 100 % slučajeva) raspada u izotop kalcija. Maseni omjer ukupnog kalcija i kalija u tek ubranoj banani iznosi $m_{\text{Ca}}/m_{\text{K}} = 1.4\,\%$. Radi jednostavnosti također pretpostavite da svi izotopi kalija i kalcija imaju jednaku molarnu masu. Nakon koliko će vremena navedeni omjer iznositi 1.41 %? Kolika je krajnja vrijednost tog omjera, nakon što se raspadne sav ^{40}K?*

Rješenje. Neka su M_{K} i M_{Ca} ukupne mase kalija i kalcija u trenutku ubiranja banana. Tada je ukupna masa kalija u trenutku t nakon ubiranja banana (kad ^{40}K prirodne zastupljenosti $r = 1.2 \cdot 10^{-4}$ počne opadati):

$$m_{\text{K}}(t) = (1-r)M_{\text{K}} + rM_{\text{K}}2^{-t/T},$$

gdje prvi član odgovara svem stabilnom kaliju, a drugi ^{40}K (ovo možemo pisati jer smo pret-

postavili da svi izotopi kalija imaju jednaku molarnu masu). Masa svega kalcija u istom trenutku je

$$m_{\mathrm{Ca}}(t) = M_{\mathrm{Ca}} + [M_{\mathrm{K}} - m_{\mathrm{K}}(t)]$$
$$= M_{\mathrm{Ca}} + rM_{\mathrm{K}}(1 - 2^{-t/T})$$

jer se ^{40}Ca dodatno stvara raspadom ^{40}K (za koji smo pretpostavili da uvijek daje kalcij). U početnome trenutku zadan nam je omjer masa $\mu_0 = 1.4\,\%$ koji odgovara

$$\mu_0 = \frac{m_{\mathrm{Ca}}(0)}{m_{\mathrm{K}}(0)} = \frac{M_{\mathrm{Ca}}}{M_{\mathrm{K}}}.$$

Nakon vremena t taj omjer će biti:

$$\mu_t = \frac{m_{\mathrm{Ca}}(t)}{m_{\mathrm{K}}(t)} = \frac{M_{\mathrm{Ca}} + rM_{\mathrm{K}}(1 - 2^{-t/T})}{(1-r)M_{\mathrm{K}} + rM_{\mathrm{K}}2^{-t/T}}$$
$$= \frac{\mu_0 + r(1 - 2^{-t/T})}{1 - r(1 - 2^{-t/T})},$$

pri čemu nam je zadana vrijednost $\mu_t = 1.41\,\%$. Ovu jednadžbu samo treba riješiti po t. Pomozimo si uvođenjem oznake

$$x = r(1 - 2^{-t/T}) = \frac{\mu_t - \mu_0}{1 + \mu_t},$$

pomoću koje napokon možemo izraziti:

$$t = -T \log_2 \left(1 - \frac{x}{r}\right) = 3.11 \cdot 10^9 \text{ god.},$$

tj. 3.11 milijardi godina. Krajnju vrijednost omjera μ_t nalazimo u limesu $t \to \infty$:

$$\mu_\infty = \frac{\mu_0 + r}{1 - r} = 1.41217\,\%.$$

Ur.

1897. *Pretpostavi da se Zemlja giba po savršeno kružnoj putanji oko Sunca. Neka je r polumjer te putanje, T period ophoda oko Sunca, a v brzina njezina kruženja. Ako Sunce zamijenimo crnom rupom:*

A) iste mase kao Sunce;

B) istog polumjera kao Sunce;

kolika mora biti relativna promjena:

a) T i v Zemlje da bi r ostao isti;

b) r i v Zemlje da bi T ostao isti;

c) r i T Zemlje da bi v ostao isti?

Masa Sunca je $2 \cdot 10^{30}$ kg, a polumjer $7 \cdot 10^8$ m.

Pomoć: Istraži pojam Schwarzschildova polumjera (vidi rješenje zadatka 1883).

Rješenje. A) Gravitacijsko privlačenje Sunca i Zemlje ne ovisi o polumjeru Sunca, već samo o njegovoj masi. Stoga bi Zemlja nastavila kružiti na jednak način da Sunce zamijenimo crnom rupom njemu iste mase. Dakle svi traženi parametri kruženja ostali bi isti.

B) Schwarzschildov polumjer $R_\circledast$ je polumjer crne rupe mase $M_\circledast$:

$$R_\circledast = \frac{2GM_\circledast}{c^2},$$

uz G kao gravitacijsku konstantu te brzinu c svjetlosti u vakuumu. Crna rupa istog polumjera R_0 kao i Sunce zato ima masu

$$M_\circledast = \frac{R_0 c^2}{2G} \approx 4.72 \cdot 10^{35} \text{ kg}.$$

Sve veličine koje se odnose na izvorno Sunce (Sunčev polumjer R_0 i masu M_0 te parametre kruženja Zemlje r_0, T_0, v_0) označit ćemo indeksom 0, a sve promijenjene veličine koje se odnose na crnu rupu polumjera R_0 indeksom $\circledast$ ($M_\circledast$, $r_\circledast$, $T_\circledast$, $v_\circledast$). U općem slučaju (za opće M, r, T, v) gravitacijska sila igra ulogu centripetalne sile na Zemlju mase m:

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{GmM}{r^2}.$$

Uz dodatnu vezu $v = 2\pi r/T$ imamo

$$v^2 r = 4\pi^2 \frac{r^3}{T^2} = GM.$$

Ovisno o tome koju izvornu veličinu zadržimo (r_0, T_0, v_0), odavde za $M = M_0$ ili $M_\circledast$ imamo:

$$r = \sqrt[3]{\frac{GMT_0^2}{4\pi^2}} \quad \text{ili} \quad r = \frac{GM}{v_0^2},$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r_0^3}{GM}} \quad \text{ili} \quad T = \frac{2\pi GM}{v_0^3},$$

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r_0}} \quad \text{ili} \quad v = \sqrt[3]{\frac{2\pi GM}{T_0}}.$$

a) Da bi ostao isti polumjer r_0, treba biti

$$\frac{T_0}{T_\circledast} = \frac{v_\circledast}{v_0} = \sqrt{\frac{M_\circledast}{M_0}} \approx 486,$$

tj. period Zemljina kruženja mora se smanjiti, a brzina kruženja povećati petstotinjak puta.

b) Da bi ostao isti period T_0, potrebno je:

$$\frac{r_\odot}{r_0} = \frac{v_\odot}{v_0} = \sqrt[3]{\frac{M_\odot}{M_0}} \approx 61.8,$$

tj. i polumjer i brzina putanje moraju se povećati šezdesetak puta.

c) Da bi ostala ista vrzina v_0, mora biti:

$$\frac{r_\odot}{r_0} = \frac{T_\odot}{T_0} = \frac{M_\odot}{M_0} \approx 2.36 \cdot 10^5,$$

tj. i polumjer i period moraju se povećati četvrt milijuna puta.

Ur.

1898. *U sustavu jednog promatrača foton vidljive svjetlosti ima energiju 2 eV. Drugi promatrač giba se spram prvoga brzinom od 60 % brzine svjetlosti. Kolika je energija fotona u sutavu tog promatrača ako se on giba:*

a) u istom smjeru kao i foton;

b) u suprotnom smjeru od fotona?

Je li za drugog promatrača foton i dalje unutar spektra vidljive svjetlosti?

Uputa: Koristi Lorentzove transformacije.

Rješenje. Za transformaciju energije koristimo Lorentzove transformacije. Ako se drugi promatrač giba duž istog pravca kao i foton, tada je energija E' fotona u njegovu sustavu:

$$E' = \gamma(E \pm \beta pc),$$

gdje su E i p energija i količina gibanja fotona u sustavu prvog promatrača. Predznak koji se javlja ovisi o smjeru gibanja drugog promatrača: minus ako se giba u istom smjeru kao i foton, plus ako se giba u suprotonom smjeru. $\beta = v/c$ je omjer brzine v drugog promatrača s obzirom na brzinu svjetlosti c. Zadano je $\beta = 0.6$. $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ je Lorentzov faktor. Jer nema masu, za foton vrijedi $E = pc$, odakle je

$$E' = \frac{1 \pm \beta}{\sqrt{1-\beta^2}} E.$$

a) Za promatrača koji se giba u istom smjeru kao i foton u brojniku se javlja minus pa je

$$E' = \frac{1-\beta}{\sqrt{(1-\beta)(1+\beta)}} E = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} E = \frac{E}{2},$$

tj. $E' = 1$ eV. Ovakav Dopplerov pomak prema nižoj energiji poznat je kao "pomak u crveno". Ovdje je izvorno "narančasti foton" završio u infracrvenom dijelu spektra.

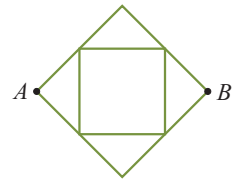
b) Za promatrača koji se giba u suprotnome smjeru od fotona imamo:

$$E' = \frac{1+\beta}{\sqrt{(1-\beta)(1+\beta)}} E = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} E = 2E,$$

tj. $E' = 4$ eV. Ovakav Dopplerov pomak prema višoj energiji poznat je kao "pomak u plavo". Sada je foton završio u ultraljubičastom dijelu spektra.

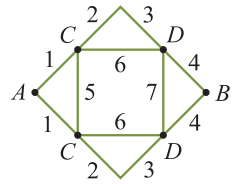
Ur.

1899. *Na slici je prikazan strujni krug sastavljen od otpornih žica. Sve žice imaju ista otporna svojstva (otpornost i površinu poprečnog presjeka). Krug se sastoji od manjeg kvadrata unutar većeg kvadrata, međusobno zakrenutih za* 45°. *Otpor stranice manjeg kvadrata je* 1 Ω. *Koliki je otpor kruga između točaka A i B?*

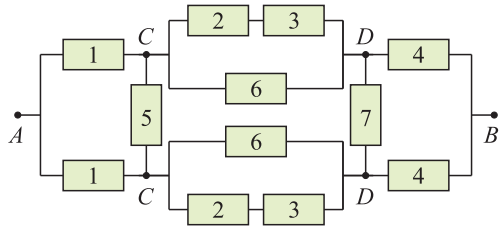


Uputa: Nemoj odmah napasti problem računom. Neke od žica mogu se ukloniti iz priče pravilnim argumentom.

Rješenje. Označimo komade otpornih žica brojevima:



kako bismo ih identificirali na ekvivalentnoj shemi:



Otpori žica proporcionalni su njihovim duljinama pa je

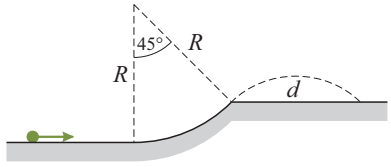
$$R_5 = R_6 = R_7 = 1\ \Omega,$$

$$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 1/\sqrt{2}\ \Omega.$$

Za općenite otpore ova shema ne može se svesti na niz serijskih i paralelnih spojeva pa bismo ukupan otpor strujnog kruga morali nalaziti primjenom Kirchhoffovih zakona. No zbog simetrije ovoga kruga električni potencijal je jednak u dvjema točkama C te u dvjema točkama D. To znači da među njima nema napona pa kroz otporne žice 5 i 7 ne teče struja. Stoga se one uopće ne pojavljuju u Kirchhoffovim jednadžbama pa se strujni krug ponaša kao da žice 5 i 7 uopće ne postoje. Uklonimo li ih iz ekvivalentne sheme, vidimo da se krug svodi na kombinaciju serija i paralela. Prvo računamo serijski spoj otpora 2 i 3: $R_{23} = \sqrt{2}\ \Omega$. On je u paralelnom spoju s otporom 6, odakle: $R_{236} = 2 - \sqrt{2}\ \Omega$. Taj spoj je pak u paraleli s otpornicima 1 i 4 pa: $R_{12346} = 2\ \Omega$. Konačno, dva su takva spoja u paraleli pa je ukupan otpor sheme $1\ \Omega$.

Ur.

1900. *Malena kuglica giba se po horizontalnoj podlozi početnom brzinom* $10\ m/s$. *Zatim nailazi na cilindrično uzvišenje polumjera zakrivljenosti 2 cm, koje zatvara kut od* 45°, *kao na slici. Nakon odvajanja od podloge kuglica preleti udaljenost* d *prije nego udari o tlo (na visini* s *koje je odletjela). Kolika je udaljenost* d*? Koristi* $g = 10\ m/s^2$.



(Zadatak osmislio Duje Dodig.)

Rješenje. Nakon odvajanja od podloge kuglica se giba putanjom kosoga hitca početnoga kuta $\varphi = 45^\circ$. Za visinu h (mjerenu od podnožja s kojeg je krenula) na kojoj se odvoji od podloge vrijedi:

$$\cos\varphi = \frac{R-h}{R} \implies h = R(1-\cos\varphi),$$

uz R kao polumjer zakrivljenosti cilindričnog uzvišenja. Zbog porasta gravitacijske potencijalne energije početna brzina v_0 joj se do izlijetanja smanji do brzine v_h. Prema zakonu očuvanja energije je

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_h^2}{2} + mgh,$$

odakle:

$$v_h = \sqrt{v_0^2 - 2gR(1-\cos\varphi)} \approx 9.994\ \text{m/s}.$$

Za domet kosog hitca vrijedi

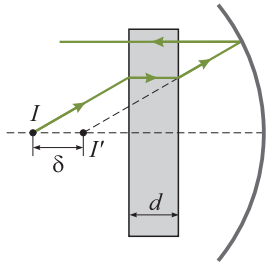
$$d = \frac{v_h^2 \sin 2\varphi}{g} \approx 10\ \text{m}.$$

Ivan Jukić (1),
Gimnazija Vukovar, Vukovar

1901. *Između izvora svjetlosti i sfernog konkavnog zrcala polumjera zakrivljenosti 1 m postavljena je planparalelna staklena ploča indeksa loma 1.5, okomito na optičku os sustava. Ako je izvor na udaljenosti 1.1 m od tjemena zrcala, kolika mora biti debljina ploče da bi se izvor poklopio sa svojom slikom? Ovisi li rješenje o položaju ploče? Promatraj samo zrake svjetlosti vrlo bliske optičkoj osi.*

(Zadatak osmislio Duje Dodig.)

Rješenje. Slika preuveličanom shemom prikazuje pomak jedne od zraka bitnih za stvaranje slike.



Izvor I nalazi se na udaljenosti a od tjemena zrcala. Kada nema staklene ploče, reflektirane zrake sastaju se na udaljenosti b od tjemena zrcala, određenoj s

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{R},$$

uz R kao polumjer zakrivljenosti zrcala. U prisutnosti staklene ploče dolazi do pomaka zraka

odaslanih od izvora prema zrcalu. Sada do zrcala zrake dolaze na isti način kao da ploče nema, a izvor kao da se nalazi na efektivno pomaknutome položaju (I' na slici). Za zrake vrlo bliske optičkoj osi efektivni pomak δ "prividnoga" izvora duž optičke osi jednak je

$$\delta = d\left(1 - \frac{1}{n}\right),$$

uz d kao debljinu ploče, a n kao indeks loma ploče. Prividni položaj izvora sada je $a' = a - \delta$, odnosno zrcalo "vidi" izvor na toj udaljenosti. Želimo li da se stvarni izvor i njegova slika poklope, mora biti $b = a$. Iz jednadžbe zrcala:

$$\frac{1}{a'} + \frac{1}{b} = \frac{2}{R},$$

uz $b = a$ i nakon raspisa:

$$a' = a - d\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

za debljinu ploče slijedi

$$d = \frac{n}{n-1}\frac{2a(a-R)}{2a-R} = 55 \text{ cm}.$$

Rješenje očito ne ovisi o položaju ploče (sve dok je ona između zrcala i izvora), već samo o njezinoj debljini i indeksu loma.

Ur.

1902. *Uz pretpostavku da se temperatura tijela vrlo brzo izjednačuje duž čitavoga njegova volumena, može se pokazati da vrijeme Δt potrebno da se tijelo ohladi toplinskim zračenjem s neke početne temperature T_1 na konačnu T_2 ovisi kao*

$$\Delta t = \frac{V}{A} f(T_1, T_2),$$

gdje je V volumen tijela, A njegovo oplošje, a $f(T_1, T_2)$ neka funkcija koja ovisi o samo krajnjim temperaturama i svojstvima materijala. (Rastuća ovisnost o volumenu dolazi zbog povećanja količine materijala koji se mora ohladiti, a padajuća ovisnost o oplošju zbog povećanja površine kroz koju se toplina može probijati.) Ako se kugla neke mase toplinskim zračenjem ohladi s neke T_1 na neku T_2 za 1 minutu, za koliko se vremena između istih temperatura ohladi kugla od istoga materijala, 30 puta veće mase?

Rješenje. Posredstvom pulumjera R volumen kugle $V = 4\pi R^3/3$ može se povezati s njezinim oplošjem $A = 4\pi R^2$ tj.

$$A = \sqrt[3]{36\pi V^2}.$$

Stoga je vrijeme hlađenja proporcionalno trećem korijenu volumena ($\Delta t \propto \sqrt[3]{V}$). Volumen kugli od istog materijala (tj. istih gustoća ρ_0) ovisi izravno o njihovim masama ($V = m/\rho_0$) pa je omjer vremena hlađenja za dvije takve kugle (A i B) dan omjerom njihovih masa kao:

$$\frac{\Delta t_\mathrm{B}}{\Delta t_\mathrm{A}} = \sqrt[3]{\frac{m_\mathrm{B}}{m_\mathrm{A}}}.$$

Za $\Delta t_\mathrm{A} = 1$ min i $m_\mathrm{B}/m_\mathrm{A} = 30$ imamo:

$$\Delta t_\mathrm{B} = \sqrt[3]{30}\,\Delta t_\mathrm{A} \approx 3.1 \text{ min}.$$

Ur.