67. Međunarodna matematička olimpijada 2026. g.

Međunarodna matematička olimpijada 2026. godine održana je u Šangaju u Kini od 10. do 21. srpnja ove godine. Članovi hrvatske ekipe su bili: *Maša Dobrić* (4. r.), *Emil Missoni* (4. r.), *Fran Pilipović* (4. r.) i *Kristijan Šimović* (4. r.) iz XV. gimnazije u Zagrebu, *Mila Maretić* (4. r.) iz Prve gimnazije u Varaždinu te *Hrvoje Valent* (4. r.) iz Gimnazije Lucijana Vranjanina u Zagrebu. Voditelji ekipe su bili Petar Orlić i Lukas Novak.



Članovi hrvatske ekipe u Šangaju.

Prije samog natjecanja naša ekipa je sudjelovala na Međunarodnom matematičkom ljetnom kampu (IMSC) u Pekingu. Fran je na kamp prvi doputovao već 20. lipnja, iščekujući ostatak ekipe koji su doputavali tjedan dana nakon njega zbog pisanja mature. Na kampu smo imali priliku slušati predavanja elitnih matematičara, samostalno se pripremati za natjecanje, ali i družiti se, te razgledavati Kinu u organiziranim izletima, ali i samostalno kao ekipa. Brzim vlakom iz Pekinga za Šangaj 13. srpnja došli smo na olimpijadu. Prije samog natjecanja čekalo nas je službeno otvaranje kojim je, uz prigodan program, započela ovogodišnja olimpijada. Samo rješavanje zadataka održano je na kampusu srednje škole gdje smo bili i smješteni. Organizatori su kampus opremili zabavnim aktivnostima, sportskim i društvenima igrama te hranom i pićem za okrijepu. Budući da se za vrijeme olimpijade održavalo i svjetsko nogometno prvenstvo, imali smo priliku organizirano gledati utakmice, što nas je dodatno zbližilo s ostalim sudionicima kampa. Od izleta najviše će nam ostati u sjećanju Kineski zid i Zabranjeni grad, koji su najpoznatiji simboli Kine.

Nakon svih izleta i druženja, sudjelovali smo na svečanom zatvaranju uz podjelu nagrada. Naša ekipa je osvojila tri brončane medalje (Fran, Hrvoje, Emil) te dvije pohvale (Mila, Maša) što je odličan rezultat. Većini naših članova nedostajao je bod-dva do više nagrade, ali unatoč tome zadovoljni smo i očekujemo da će Hrvatska idućih godina ostvarivati i bolje rezultate.



Nakon podjele nagrada s Lukasom Novakom.



Izlet na Kineski zid.

Sljedeće godine 68. Međunarodna matematička olimpijada održavat će se u Mađarskoj, čemu se posebno veselimo.

Bodovi hrvatskih učenika na 67. IMO.

natjecatelj	P1	P2	P3	P4	P5	P6	ukupno	osvojeno
F. Pilipović	7	4	0	7	4	0	22	brončana
H. Valent	7	0	4	6	5	0	22	brončana
E. Missoni	7	0	0	7	7	0	21	brončana
M. Dobrić	7	1	1	5	1	0	15	pohvala
M. Maretić	7	1	0	5	2	0	15	pohvala
K. Šimovič	6	2	0	1	3	0	12	
ekipni rezultat	**41**	**8**	**5**	**31**	**22**	**0**	**107**	

Kristijan Šimović

Zadatci

Prvi dan, srijeda, 15. srpnja 2026.

Zadatak 1. Na ploči je napisano 2026 ne nužno različitih prirodnih brojeva većih od 1. U jednom potezu Konfucije bira dva broja $m > 1$ i $n > 1$ napisana na različitim mjestima na ploči i mijenja ta dva broja s

$$\mathrm{nzd}(m,n) \quad \text{i} \quad \frac{\mathrm{nzv}(m,n)}{\mathrm{nzd}(m,n)}.$$

On nastavlja raditi ove poteze dok god je to moguće.

a) Dokaži da, bez obzira na Konfucijeve izbore, nakon konačno mnogo poteza točno jedan broj M na ploći je veći od 1.

b) Dokaži da vrijednost broja M ne ovisi o Konfucijevim izborima.

(**Napomena.** *$nzd(x,y)$ označava najveći zajednički djelitelj prirodnh brojeva x i y, a $nzv(x,y)$ označava najmanji zajednički višekratnik prirodnih brojeva x i y.*)

Zadatak 2. Neka je ABC trokut i neka su točke M i N polovišta stranica $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$, tim redom. Neka su točke K i L odabrane strogo unutar trokuta BMC i BNC, tim redom, takve da K leži strogo unutar trokuta ABL i L leži strogo unutar trokuta AKC. Pretpostavimo da vrijedi

$$\sphericalangle KBA = \sphericalangle ACL, \quad \sphericalangle LBK = \sphericalangle LNC \quad \text{i} \quad \sphericalangle LCK = \sphericalangle BMK.$$

Neka je O centar opisane kružnice trokuta AKL. Dokaži da je $|OM| = |ON|$.

Zadatak 3. Neka je n prirodan broj. Liu Bang i Xiang Yu imaju štap duljine 1 i žele ga podijeliti među sobom. Liu označava najviše n točaka na štapu, a zatim Xiang također označava najviše n točaka na štapu. Sve označene točke su različite. Zatim se štap prereže na svim označenim točkama čime se dobije određen broj komada. Nakon toga oni naizmjenično uzimaju komade koji još nisu uzeti. Liu igra prvi. Svaki igrač želi maksimizirati ukupnu dužinu komada koje je uzeo.

Za svaki n odredi najveći realan broj c takav da Liu može sigurno postići ukupnu dužinu od barem c, bez obzira kako Xiang igra.

Drugi dan, četvrtak, 16. srpnja 2026.

Zadatak 4. Shan-Yu i Mulan igraju igru. Neka je θ kut za koji vrijedi $0° < \theta < 180°$ i čiju vrijednost znaju oba igrača. Na početku Shan-Yu pravi papirnati trokut T s dimenzijama po svom izboru. Zatim igrači ponavljaju sljedeće korake:

- Ako T ima barem jedan kut čija je mjera točno θ, igra završava i Mulan pobjeđuje.
- U suprotnom, Mulan bira točku P na jednoj od stranica trokuta T, različitu od njegovih vrhova. Ona zatim reže trokut T po dužini koja spaja P s nasuprotnim vrhom trokuta T, čime ga dijeli na dva trokuta.
- Shan-Yu odbacuje jedan od dva novonastala trokuta. Preostali trokut postaje novi T.

Za koje realne vrijednosti θ Mulan može sigurno pobijediti u konačno mnogo koraka, bez obzira kako Shan-Yu igra?

Zadatak 5. Neka je $R_{>0}$ skup pozitivnih realnih brojeva. Odredi funkcije $f : R_{>0} \to R_{>0}$ takve da je

$$\sqrt{\frac{x^2 + f(y)^2}{2}} \geq \frac{f(x) + y}{2} \geq \sqrt{xf(y)}$$

za sve $x, y \in R_{>0}$.

Zadatak 6. Neka je $a_1, a_2, a_3, \ldots$ beskonačan niz prirodnih brojeva većih od 1. Pretpostavimo da je za sve prirodne brojeve n broj a_{n+1} najmanji prirodan broj veći od a_n takav da za sve $i = 1, 2, \ldots, n$ vrijedi $\text{nzd}(a_{n+1}, a_i) > 1$. Dokaži da postoje prirodni brojevi T i L takvi da je

$$a_{n+T} = a_n + L$$

za sve prirodne brojeve n.

(**Napomena.** *$nzd(x, y)$ označava najveći zajednički djelitelj prirodnih brojeva x i y.*)

Vrijeme rješavanja svakog dana: 4 sata i 30 minuta.
Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.

Rang-lista

	nagrade				broj		nagrade				broj
	I	II	III	poh.	bod.		I	II	III	poh.	bod.
Kina	6				232	Južnoafrička Republika		1	1	3	94
SAD	4	1	1		207	Tađikistan		1	2	2	93
Rusija	4	2			196	Azerbajdžan			1	4	92
Singapur	3	2	1		169	Indonezija			4	1	91
Vijetnam	2	3	1		168	Nizozemska			2	4	91
Republika Koreja	3	2		1	167	Kuba			3		90
Indija	2	4			166	Belgija			2	4	89
DNR Koreja	2	2	2		163	Kolumbija			2	3	89
Ujedinjeno Kraljevstvo	2	1	3		163	Litva		1	1	3	89
Japan	2	1	3		159	Latvija			4	1	86
Brazil		5	1		155	Portugal			4	2	86
Rumunjska	1	3	2		152	Finska			2	3	85
Kanada	1	3	2		151	Makau			2	4	84
Iran	2	1	3		147	Danska			1	5	83
Francuska		5	1		146	Luksemburg			2	4	83
Mađarska	1	1	4		144	Island			1	4	78
Turska	1	3	2		144	Sirija			1	3	73
Izrael	1	1	4		143	Šri Lanka		1		3	72
Bugarska	1	2	3		142	Tunis			2	1	72
Njemačka	1	2	3		142	Pakistan			2	2	70
Malezija	1	3	1	1	142	Albanija			2	1	69
Kazahstan		3	3		141	Urugvaj				4	66
Slovačka	2		4		140	Maroko				4	64
Tajvan	1	3	2		140	Alžir				3	59
Hong Kong		4	2		138	Nepal				3	57
Poljska	2	1	3		138	Ruanda				2	57
Peru		3	2	1	137	Ekvador				2	56
Australija	1	2	2	1	135	Kosovo				3	55
Ukrajina	1	2	2	1	135	Kostarika				2	53
Tajland	1	1	4		133	Cipar			1	1	52
Srbija	1	2	3		132	Kenija				3	46
Bosna i Hercegovina	1	2	1	2	129	Mianmar				2	43
Mongolija			2	4	129	Obala Bjelokosti			1		42
Češka		4	1	1	128	UAE				2	39
Kirgistan		3	2	1	125	Irak				1	37
Saudijska Arabija		3	3		124	Dominikanska Republika				2	34
Italija	1	1	3		123	Čile				2	33
Švicarska	2		2	2	122	Bolivija			1		31
Bangladeš		1	5		121	Uganda				1	31
Meksiko			5	1	117	Venecuela				1	30
Estonija		1	5		115	Libija		1			29
Uzbekistan		2	3		114	Honduras				1	27
Armenija		1	4	1	110	Paragvaj				1	26
Gruzija	1	1	1	2	110	Gana				2	24
Sjeverna Makedonija	1		3	1	110	Tanzanija					22
Turkmenistan		1	3	2	110	Salvador				1	21
Bjelorusija			6		108	Kamerun			1		20
Hrvatska			3	2	107	Katar				1	19
Španjolska		2	2	2	107	Crna Gora					18
Austrija		2	1	2	105	Senegal					17
Norveška			4	2	105	Oman					14
Moldavija		1	2	2	100	Bocvana				1	12
Švedska			4	1	100	Panama					10
Grčka		1	2	2	98	Palestina					10
Filipini		1	2	1	98	Portoriko				1	9
Slovenija		1	2	2	98	Butan					8
Argentina			4	1	94	Namibija					8
Irska		1	2	3	94	Kambodža					6
Novi Zeland		1	1	2	94						