20. Srednjoeuropska matematička olimpijada, Celje, Slovenija, 23. – 29. kolovoza 2026. g.

U Celju se ove godine održavala Srednjoeuropska matematička olimpijada (MEMO) na kojoj su Hrvatsku predstavljali:

Fran Čačinović, Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb
Ivan Katalenić, XV. gimnazija, Zagreb
Lovro Kličković, XV. gimnazija, Zagreb
Matej Križanić, Prva gimnazija Varaždin, Varaždin
Kristian Radić, III. gimnazija, Split
Martin Vidović, XV. gimnazije, Zagreb.

Voditelji hrvatske ekipe su bili *Vlatko Crnković* i *Tadej Petar Tukara*.



Sa svečanog otvaranja MEMO-a u Celju.

Na pojedinačnom dijelu natjecanja *Fran* i *Kristian* su osvojili brončane, a *Ivan*, *Lovro*, *Matej* i *Martin* srebrne medalje. Na ekipnom dijelu natjecanja naša je ekipa zauzela peto mjesto, od ukupno deset država sudionica.



Naši učenici okićeni srebrnim i brončanim medaljama na individualnom natjecanju.

Srednjoeuropska matematička olimpijada je regionalno natjecanje koje se održava od 2007. godine i uključuje Austriju, Hrvatsku, Češku, Njemačku, Mađarsku, Litvu, Poljsku, Slovačku, Sloveniju i Švicarsku, te se domaćinstvo natjecanja rotira među članicama. Izbor hrvatske ekipe vrši se na temelju rezultata Hrvatske matematičke olimpijade, koju organizira Hrvatsko matematičko društvo (HMD). Članovi ekipe sudjelovali su u dva ciklusa intenzivnih priprema u organizaciji HMD-a i udruge Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić". Troškove izbora, priprema i odlaska na natjecanje financiralo je Ministarstvo znanosti, obrazovanja i mladih. Više o ovogodišnjem natjecanju možete pročitati na

`https://memo2026.dmfa.si/`

Vlatko Crnković

Zadatci

Evo i zadataka sa samog natjecanja.

Individualno natjecanje

1. Odredi sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$f(x + yf(x + y)) = f(x)f(y) + y^2.$$

2. *Mješavina* $M(A)$ konačnog niza $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ je skup suma svih nepraznih podnizova uzastopnih članova, tj.

$$M(A) = \{a_i + a_{i+1} + \cdots + a_j | 1 \leq i \leq j \leq n\}.$$

Na primjer, mješavina niza $A = (2, 3, 2)$ je skup $M(A) = \{2, 3, 5, 7\}$. Za svaki $n \geq 1$ neka je $k(n)$ najmanja vrijednost za koju postoje dva konačna niza $A = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ i $B = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$ prirodnih brojeva čije su mješavine $M(A)$ i $M(B)$ disjunktne i

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n) + (b_1, b_2, \cdots, b_n) = k(n).$$

Odredi $k(n)$ za sve $n \geq 1$.

3. Neka je ABC šiljastokutan trokut u kojem je $|AB| < |AC|$ i neka je O središte tom trokutu opisane kružnica. Točke P i Q leže na pravcu koji prolazi točkom A i okomit je na pravac BC tako da vrijedi $|PA| = |PB|$ i $|QA| = |QC|$. Neka su M i N redom polovišta dužina $\overline{PQ}$ i $\overline{BC}$. Neka je $R \neq A$ drugo sjecište pravca AN i opisane kružnice trokuta ABC. Dokaži da se simetrale dužina $\overline{BC}$, $\overline{MO}$ i $\overline{NR}$ sijeku u jednoj točki.

4. Neka je $a_1, a_2, a_3, \ldots$ beskonačan niz pozitivnih racionalnih brojeva takav da za svaki $n \geq 1$ vrijedi $a_{n+1} = \dfrac{p_n + 1}{q_n + 1}$, gdje je prikaz $\dfrac{p_n}{q_n}$ broja a_n neskrativ razlomak. Odredi sve moguće vrijednosti broja a_1 takve da postoji prirodan broj k za koji je umnožak $a_1 a_2 \cdots a_k$ cijeli broj.

Napomena. Prikaz $r = \dfrac{p}{q}$ pozitivnog racionalnog broja r je neskrativ razlomak ako su p i q relativno prosti prirodni brojevi.

Ekipno natjecanje

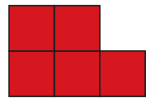
1. Odredi sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da za sve $x, y, z \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$f(x)f(y + z) \geq x(f(y) + f(z)).$$

2. Odredi sve pozitivne racionalne brojeve q za koje postoje prirodni brojevi a, b, c i n koji zadovoljavaju jednakosti:

$$a+b+c=qn,$$
$$ab+c=n^2.$$

3. Promatrajmo beskonačnu kvadratnu mrežu koja se sastoji od bijelih polja. Neka je n prirodni broj. Ilko je obojio $4n+1$ polja mreže u crveno, tako da su skup R svih crvenih polja i skup W svih bijelih polja oba povezana.



Dobiveni crveni oblik je k-terokut. Na primjer ovih 5 crvenih polja čini šesterokut.

Odredi, u ovisnosti o n, najveću vrijednost k za koju je to moguće.

Napomena. Za skup polja S kažemo da je *povezan* ako za svaka dva polja $a, b \in S$ postoji cijeli broj $m \geq 1$ i polja $c_1, c_2, \cdots, c_m \in S$, gdje je $c_1 = a$, $c_m = b$ i polja c_i i c_{i+1} dijele brid za svaki $1 \leq i \leq m-1$.

4. Neka je n prirodni broj. Škrinja s blagom ima na sebi $2n-1$ lokota označenih s 1 do $2n-1$. Svaki od $n \cdot (2n-1)$ raspoloživih ključeva otvara točno jedan lokot. Za svaki $1 \leq i \leq 2n-1$, postoji i ključeva koji otvaraju taj lokot. Svi ti ključevi su raspoređeni među $2n-1$ ljudi tako da svaka osoba ima n ključeva (svaka osoba može imati više ključeva koji otvaraju isti lokot). Odredi najmanji prirodni broj k takav da, bez obzira kako su ključevi raspoređeni među tih $2n-1$ ljudi, postoji grupa od k ljudi koji zajedno mogu otvoriti sve lokote.

5. Neka je $ABCD$ jednakokračan trapez takav da je $AD \| BC$ i $|AD| < |BC|$. Neka je O središte opisane kružnice trokuta ABC. Neka je X točka takva da je $\overline{BX}$ promjer kružnice opisane trokutu ABO, te neka je Y točka takva da je $\overline{CY}$ promjer kružnice opisane trokutu ACO. Dokaži da točke A, D, X i Y leže na kružnici.

6. Neka je ABC šiljastokutan trokut. Neka je I_a središte tom trokutu pripisane kružnice nasuprot vrha A. Točke D i E leže na pravcima I_aB i I_aC redom, tako da vrijedi $|DA| = |DB|$ i $|EA| = |EC|$. Opisana kružnica trokuta I_aDE siječe pravac BC u (različitim) točkama F i G. Dokaži da su kružnice opisane trokutima ABC i AFG dodiruju.

Napomena. Pripisana kružnica trokuta ABC nasuprot vrhu A je kružnica koja dodiruje stranicu $\overline{BC}$ i produžetke stranica $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$.

7. Neka je α pozitivan racionalan broj. U početku je na ploči napisan broj 2026. U svakom koraku, ako je z broj koji je trenutno napisan na ploči, možemo ga zamijeniti jednim od sljedećih brojeva:

i) $x+\alpha$, ii) $x-\alpha$, iii) $\dfrac{1}{x}$ ako je $x \neq 0$.

Kažemo da je racionalan broj y *dokučiv* ako se može pojaviti na ploči nakon konačno mnogo koraka.

Odredi sve pozitivne racionalne brojeve α za koje su *svi* racionalni brojevi dokučivi.

8. Odredi sve prirodne brojeve n koji nemaju proste djelitelje veće od 2026 takve da je za svaki odabir dva *neparna* i *relativno prosta* pozitivna djelitelja broja n njihova aritmetička sredina također djelitelj broja n.

Vrijeme rješavanja svakog dana: 5 sati
Vrijeme za pitanja: 60 minuta
Svaki zadatak vrijedi 8 bodova
Poredak zadataka ne ovisi o njihovoj težini