Rješenje nagradnog natječaja br. 255

Dokaži da za od nule različite realne brojeve x, y, z takve da je $x+y+z=0$ vrijedi jednakost

$$\frac{x^2+y^2}{x+y}+\frac{y^2+z^2}{y+z}+\frac{z^2+x^2}{z+x}=\frac{x^3}{yz}+\frac{y^3}{zx}+\frac{z^3}{xy}.$$

Rješenje. Kako je $x+y+z=0$ imamo

$$x+y=-z, \quad y+z=-x, \quad z+x=-y$$

ili, kvadriranjem i sređivanjem

$$x^2+y^2=z^2-2xy, \quad y^2+z^2=x^2-2yz, \quad z^2+x^2=y^2-2zx.$$

Dana jednakost ekvivalentna je sa

$$\frac{z^2-2xy}{-z}+\frac{x^2-2yz}{-x}+\frac{y^2-2zx}{-y}=\frac{x^3}{yz}+\frac{y^3}{zx}+\frac{z^3}{xy},$$

a sređivanjem se dobiva

$$-(x+y+z)+2\left(\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}\right)=\frac{x^3}{yz}+\frac{y^3}{zx}+\frac{z^3}{xy}.$$

Posljednja jednakost ekvivalenta je s

$$2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)=x^4+y^4+z^4.$$

S druge strane, iz $x+y+z=0$ dobivamo $(x+y+z)^2=0$, tj.

$$x^2+y^2+z^2=-2(xy+yz+zx).$$

Kvadriranjem i sređivanjem imamo

$$x^4+y^4+z^4+2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)=4(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)+8xyz(x+y+z)$$

ili

$$x^4+y^4+z^4=2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2),$$

što je i trebalo pokazati.

Knjigom Ivica Martinjak, *Kombinatorika in medias res*, Crotech, Zagreb, 2025., nagrađeni su rješavatelji:

1. *Ivan Jukić* (1), Gimnazija Vukovar, Vukovar;
2. *Nemanja Praška* (4), Gimnazija "20. oktobar", Bačka Palanka.

Riješili zadatke iz br. 4/304

a) Iz matematike: *Ivan Jukić* (1), Gimnazija Vukovar, Vukovar, 4085–4087, 4089–4091, 4093, 4096–4098; *Nemanja Praška* (4), Gimnazija "20. oktobar", Bačka Palanka, 4085-4098.

b) Iz fizike: *Marko Dorešić* (8), OŠ Mate Lovraka, Zagreb, 566, 567, 568, 569; *Ivan Jukić* (1), Gimnazija Vukovar, Vukovar, 1900.

Nagradni natječaj br. 257

Primijetimo da je $\binom{2}{2} = 1^2$ i $\binom{6}{2} + 2\binom{6}{4} + 4\binom{6}{6} = 7^2$. Dokaži da je

$$\sum_{i=1}^{2n-1} 2^{i-1}\binom{4n-2}{2i},$$

potpuni kvadrat za svaki pozitivan cijeli broj n.

SVIM SURADNICIMA

U Matematičko-fizičkom listu objavljuju se članci iz matematike, fizike i informatike, s malim prilogom iz astronomije, zadatci i rješenja, prikazi natjecanja i ljetnih škola iz matematike i fizike, zanimljivosti u obliku članaka i zadataka od učenika, profesora i ostalih matematičara i fizičara, novosti iz znanosti, prilozi o državnoj maturi i nagradni natječaj.

Prilozi trebaju biti napisani računalom (Word, Tex, Latex) ili pisaćim strojem.

Slike trebaju biti jasno nacrtane na posebnom papiru i pogodne za presnimavanje ili pošaljite slike crtane računalom (eps, jpg, png i sl.).

Članci neka ne budu dulji od osam stranica, a ako je to potrebno neka budu napisani u nastavcima.

Pozivaju se učenici da pošalju članak o nekoj zanimljivoj temi, originalne zadatke s rješenjima ili prikaze nekih manifestacija (ljetne škole, susreti učenika, rad školske grupe).

Kako se rukopisi ne vraćaju, sačuvajte original, a pošaljite kopiju na papiru formata A-4.

Svi rukopisi podliježu recenziji redakcije ili neke stručne osobe za određeno područje.

Prilozi se šalju na adresu ovog časopisa koja je na početku lista.

RJEŠAVATELJIMA ZADATAKA

Svako rješenje neka bude napisano na **posebnom** papiru i to samo na **jednoj** strani papira. Uz svako rješenje na vrhu papira treba potpuno ispisati tekst zadatka. Svako rješenje treba čitljivo potpisati (ime i prezime), naznačiti razred, školu i mjesto. **Rješenja se mogu slati i e-poštom na adresu glavnog urednika:** `zeljko.hanjs@math.hr`

Matematičko-fizički list na Facebooku

Možete pronaći MFL i na Facebooku na stranici

`https://www.facebook.com/MatFizL`

Uz razno-razne podatke o MFL-u moći ćete naći i nove zadatke za rješavanje.