ZADATAK O TROKUTU S KUTOM VELIČINE 120°

Dragoljub Milošević, Gornji Milanovac

Tijekom priprema za matematička natjecanja, Ana, Darko, Lucija i Marijan rješavali su sljedeći zadatak: *Neka je AD simetrala kuta ∠CAB trokuta ABC, pri čemu je* $|\angle CAB| = 120°$. *Dokažite jednakost*

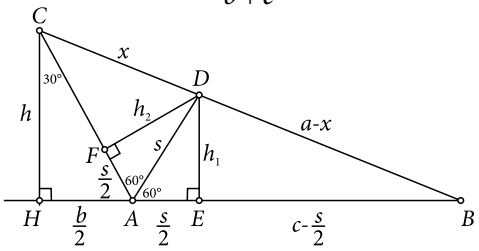
$$\frac{1}{|AD|} = \frac{1}{|AB|} + \frac{1}{|AC|}.$$

Anino rješenje. Na temelju poučka o simetrali unutarnjeg kuta trokuta (simetrala unutarnjeg kuta trokuta dijeli nasuprotnu stranicu toga trokuta u omjeru duljina drugih dviju stranica) možemo pisati:

$|CD| : |BD| = |AC| : |AB|$, tj. $x : (a - x) = b : c$, pri čemu je $x = |CD|$ (Slika 1.).

Odatle slijedi da je

(1) $$x = \frac{ab}{b+c}.$$



Slika 1.

Neka su $|DE| = h_1$ i $|DF| = h_2$ duljine visina trokuta *ABD* i *ADC*. U pravokutnim trokutima *AED* i *ADF* je $|\angle BAD| = |\angle DAC| = 60°$, pa je $|\angle ADE| = |\angle ADF| = 30°$. Tada je $|AE| = |AF| = \frac{1}{2}|AD| = \frac{1}{2}s$, što znači da je $|BE| = c - \frac{s}{2}$ i $|CF| = b - \frac{s}{2}$. Primjenom Pitagorina poučka na pravokutne trokute *AED* i *BDE* dobivamo redom: $|DE|^2 = |AD|^2 - |AE|^2$ i $|DE|^2 = |BD|^2 - |BE|^2$, ili $h_1^2 = s^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2$ i $h_1^2 = (a-x)^2 - \left(c - \frac{s}{2}\right)^2$. Iz posljednje dvije jednakosti slijedi $s^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2 = (a-x)^2 - \left(c - \frac{s}{2}\right)^2$, ili

(2) $$(a-x)^2 = c^2 + s^2 - cs.$$

Na analogan način se, primjenom Pitagorina poučka na pravokutne trokute *ADF* i *DCF*, dobiva

(3) $$x^2 = b^2 + s^2 - bs\,.$$

Razlika jednakosti (2) i (3) je $(a-x)^2 - x^2 = c^2 + s^2 - cs - \left(b^2 + s^2 - bs\right)$, odakle je $a^2 - 2ax = c^2 - b^2 - cs + bs$.

Odatle, radi jednakosti (1), slijedi $a^2 - 2a \cdot \frac{ab}{b+c} = (c-b)(c+b) - s(c-b)$ ili $\frac{a^2(c-b)}{b+c} = (c-b)(c+b) - s(c-b)$. Iz ovoga pak, poslije dijeljenja lijeve i desne strane jednakosti izrazom $c - b$, nalazimo da je $s = -\frac{a^2}{b+c} + (b+c)$ ili $s = \frac{-a^2 + b^2 + 2bc + c^2}{b+c}$, tj.

(4) $$\frac{1}{s} = \frac{b+c}{b^2 + c^2 - a^2 + 2bc}\,.$$

Neka je $|CH| = h$ duljina visine trokuta *ABC* (Slika 1.). Primjenom Pitagorina poučka na pravokutne trokute *ACH* i *BCH* imamo $|CH|^2 = |AC|^2 - |AH|^2$ i $|CH|^2 = |BC|^2 - |BH|^2$ ili $h^2 = b^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2$ i $h^2 = a^2 - \left(c + \frac{b}{2}\right)^2$, a odavde je $b^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = a^2 - \left(c + \frac{b}{2}\right)^2$, tj.

(5) $$b^2 + c^2 - a^2 = -bc\,.$$

Iz jednakosti (4) i (5) slijedi $\frac{1}{s} = \frac{b+c}{bc}$, tj. $\frac{1}{s} = \frac{1}{c} + \frac{1}{b}$.

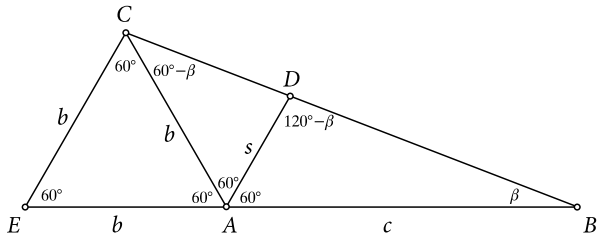
Darkovo rješenje. Obilježimo duljine visina trokuta *ABD*, *ADC* i *ABC* kao u primjeru 1: $|DE| = h_1$, $|DF| = h_2$ i $|CH| = h$. Površina trokuta *ABC* jednaka je zbroju površina trokuta *ABD* i *ADC*, tj.

$$\frac{|AB| \cdot h}{2} = \frac{|AB| \cdot h_1}{2} + \frac{|AC| \cdot h_2}{2} \text{ ili } ch = ch_1 + bh_2.$$

Primjenom Pitagorina poučka na trokute *ACH*, *AED* i *ADF* (Slika 1.) dobivamo redom da je $h = \frac{b\sqrt{3}}{2}$, $h_1 = h_2 = \frac{s\sqrt{3}}{2}$, pa je $c \cdot \frac{b\sqrt{3}}{2} = c \cdot \frac{s\sqrt{3}}{2} + b \cdot \frac{s\sqrt{3}}{2}$.

Dijeljenjem posljednje jednakosti sa $\frac{bcs\sqrt{3}}{2}$ dobivamo traženu jednakost $\frac{1}{s} = \frac{1}{c} + \frac{1}{b}$.

Lucijino rješenje. Konstruiramo jednakostranični trokut *ACE* (Slika 2.).

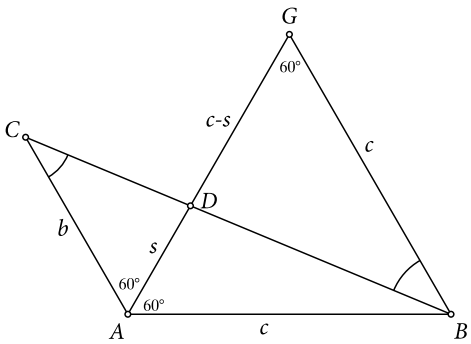


Slika 2.

Tada je $|BE| = b + c$. Kako u trokutu *ABC* imamo $|\angle ACB| = 180° - (|\angle CAB| + |\angle ABC|) = 180° - (120° + \beta) = 60° - \beta$, onda je $|\angle BCE| = 60° + (60° - \beta) = 120° - \beta = 180° - (60° + \beta) = |\angle BDA|$. Trokuti *ABD* i *EBC* imaju jednake veličine kutova, pa su oni slični. Na temelju te sličnosti zaključujemo da je $|AB| : |AD| = |EB| : |EC|$ ili $c : s = (b + c) : b$.

Odavde dobivamo da je $bc = s(b + c)$, ili $s = \frac{bc}{b+c}$, tj. $\frac{1}{s} = \frac{b+c}{bc} = \frac{1}{c} + \frac{1}{b}$.

Marijanovo rješenje. Konstruirajmo jednakostranični trokut *ABG* (Slika 3.).



Slika 3.

Tada je $|DG| = |AG| - |AD| = c - s$. Budući da vrijedi $|\angle CAD| = |\angle BGD| = 60°$ i $|\angle ADC| = |\angle GDB|$ (vršni kutovi), trokuti *ADC* i *GDB* su slični. Tada je $|AD| : |AC| = |GD| : |GB|$ ili $s : b = (c - s) : c$. Odatle je $cs = bc - bs$ ili $cs + bs = bc$.

Nakon dijeljenja posljednje jednakosti sa *bcs* slijedi da je $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{s}$.