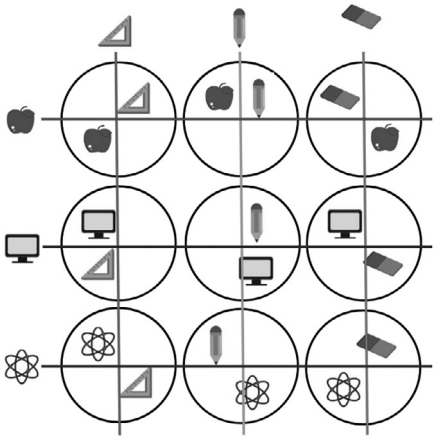
MATEMATIKA U IGRI *DOBBLE*

Rebeka Ćaćić, XV. gimnazija, Zagreb

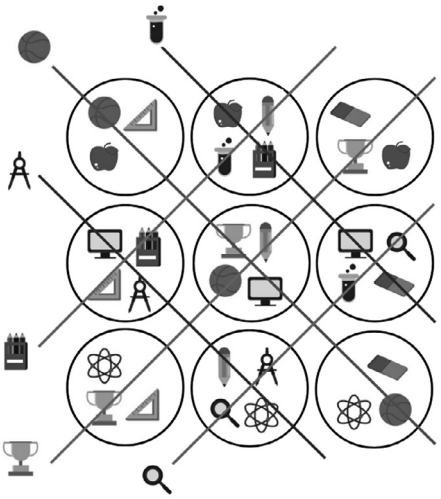
Sigurno ste se već susreli s popularnom i zabavnom igrom *Dobble* u kojoj je cilj pronaći zajedničku sličicu dvjema kartama i riješiti se svojih karata prije svih ostalih. Svi koji su je igrali znaju koliko jedna igra može postati napeta, no jeste li znali da su pravila po kojima je sastavljena temeljena na matematici? Naime, svake dvije karte u igri *Dobble* uvijek imaju točno jednu zajedničku sličicu. To nije slučajnost, takvo pravilo moguće je ostvariti samo ako se karte rasporede prema pravilima posebne grane matematike koja se zove projektivna geometrija (više o tome u dijelu *Za one koji žele znati više*).



Slika 1.

Da bismo jednostavnije prikazali kako se konstruira ovakva igra, uzmimo imaginarnu verziju u kojoj postoji 13 mogućih karata (umjesto 57 u klasičnoj verziji). Prvih 9 karata posložit ćemo kao točke u mreži 3×3. Počnimo ih popunjavati sličicama. Svaki stupac i svaki redak karata dijelit će po jednu zajedničku sličicu. Sličice možemo prikazati kao imaginarne pravce koji prolaze svim kartama na kojima se nalaze. Cilj nam je da svake dvije karte dijele jedan pravac koji ih spaja. (Slika 1.)

Na koji bismo još način mogli „povezati" karte koje se ne nalaze u istom retku ili stupcu? Dodat ćemo i dijagonalne pravce u kojima je pomak spojenih karata za jednu dolje i jednu desno ili za jednu desno i jednu gore. (Slika 2.)



Slika 2.

Razmislite koje sličice moramo dodati u 4 karte u kutovima kako bismo ih „povezali" s kartama koje nisu u istim redcima, stupcima ili dijagonalama? Kako tim kutnim kartama nedostaje još jedna sličica, dodat ćemo onu koja je zajednička dvjema kartama s kojima prva karta još nije spojena, tj. onima koje se nalaze dijagonalno s pomacima 2×1 ili 1×2 („u slovo L"). Ako promatramo kartu u gornjem lijevom kutu na poziciji (1, 1), to će biti sličica povećala koja se nalazi na kartama na pozicijama (2, 3) i (3, 2). Za kartu u donjem desnom kutu na poziciji (3, 1) to će

biti sličica epruvete koja je zajednička kartama na pozicijama (1, 2) i (2, 3). Popunit ćemo preostale karte s još 4 sličice. (Slike 3. i 4.)

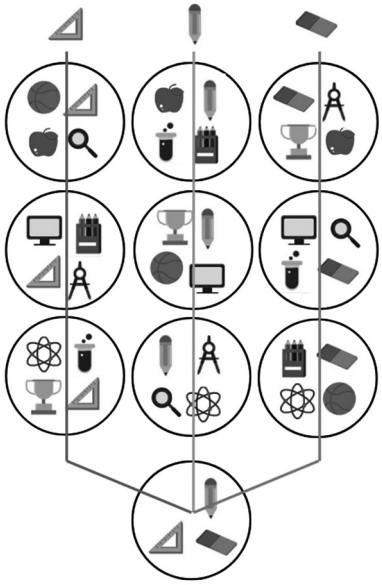


Slika 3.

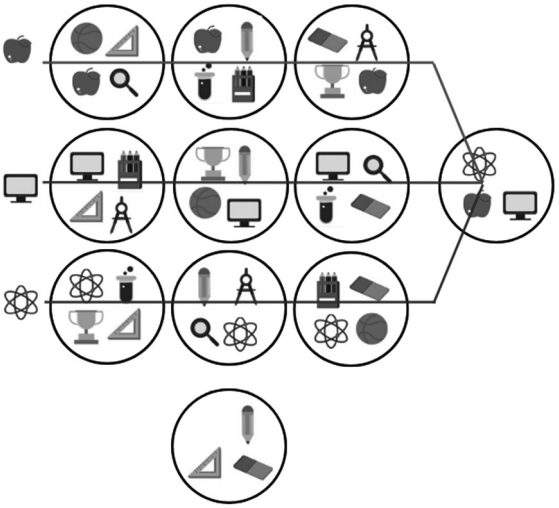


Slika 4.

Naše karte sada su gotovo potpune! Iako bi se igra mogla sasvim normalno igrati i s ovih 9 karata, primijetimo da su nam ostale još 4 moguće karte. Preostale 4 karte možemo zamisliti kao sjecišta svih paralelnih pravaca beskonačno udaljena u točki zamišljene ravnine u kojoj je moguće da se ti paralelni pravci spajaju. Dakle, u prvu od preostalih karata ubacit ćemo simbole s 3 linije koje prolaze stupcima (Slika 5.) i redcima (Slika 6.).



Slika 5.

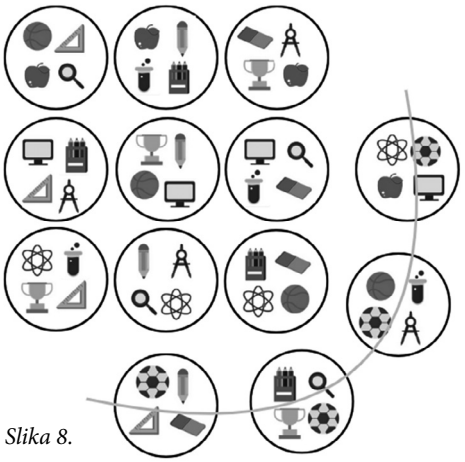


Slika 6.

Isti postupak ponovit ćemo i za dva seta dijagonala u kojima je pomak 1×1 iz kojih ćemo dobiti sljedeći set karata. (Slika 7.)



Slika 7.



Slika 8.

Sada smo skoro gotovi! Razmislite, kako bismo mogli „povezati" ove 4 karte izvan mreže? Možemo ih spojiti linijom, tj. dodati im jedan zajednički element. (Slika 8.)

Naš set karata je dovršen! (Slika 9.) Uz malo crtanja, malo mašte i matematike, svatko može izraditi svoj mali Dobble. Okušajte se u izradi, pozovite prijatelje, zaigrajte s vlastitim kartama i otkrijte tko ima „najbrže oko"!

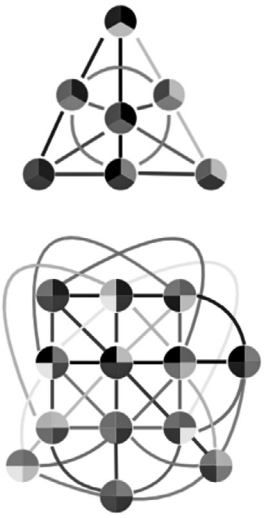


Slika 9.

Za one koji žele znati malo više:

Dobble se može konstruirati pomoću pravila koja dolaze iz projektivne ravnine određenog reda (nazovimo ga n). Projektivnu ravninu možemo shvatiti kao običnu (euklidsku) ravninu s dodatnim „točkama u beskonačnosti" u kojima se sijeku paralelni pravci. Ako svaka karta ima $n + 1$ simbola, tada: postoji $n^2 + n + 1$ karata, svaki simbol pojavljuje se $n + 1$ puta, svaka karta ima $n + 1$ simbol i svake dvije karte imaju točno jedan zajednički simbol. U pravoj igri koristi se $n = 7$ pa imamo:

- 8 simbola na svakoj karti,
- 57 karata ukupno,
- svaka slika ponavlja se 8 puta.



Slika 10. Prikazi projektivnih ravnina 2. i 3. reda

Taj broj 7 dolazi iz projektivne ravnine reda 7 u kojoj ima 57 točaka i 57 pravaca. Svaka se točka nalazi na 8 pravaca i svaki pravac prolazi kroz 8 točaka, kao i u originalnoj igri *Dobble*.

Projektivnu ravninu reda 7 nije jednostavno nacrtati, ali se može konstruirati pomoću aritmetike u polju sa 7 elemenata.

Zanimljivo je da konačne projektivne ravnine ne postoje za sve brojeve n. One postoje samo kada je n potencija prostog broja (2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 13...). Za neke brojeve, poput $n = 6$ ili $n = 10$, dokazano je da projektivne ravnine ne mogu postojati. Zato Dobble ne može postojati s bilo kojim brojem simbola na karti.

Ako vas ovakve ideje privlače, možete pokušati izgraditi i veće sustave od ovih prikazanih. Primjerice, ravnina reda 3 korištena u imaginarnom primjeru igre gore ima 13 točaka i 13 pravaca, a na svakoj se nalaze po 4 elementa. Kako n raste, konstrukcije postaju sve bogatije i zahtijevaju više kombinatornog razmišljanja, ali logika ostaje ista. Upravo u toj ravnoteži krije se ljepota ovakvih matematičkih modela.

Literatura:

1. https://en.wikipedia.org/wiki/Projective_plane (22. 11. 2025.)
2. https://www.youtube.com/watch?v=VTDKqW_GLkw&t=381s (14. 11. 2025.)