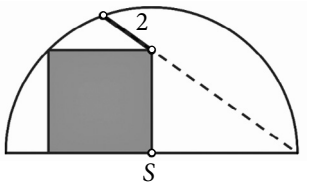


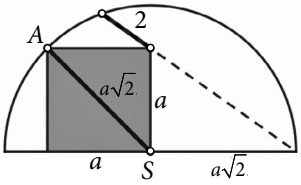
TROKUT, ČETVEROKUT I KRUG

Zlatko Lobor, Zagreb

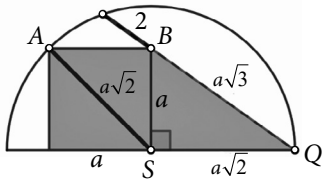
Primjer 1. Izračunajte površinu kvadrata.



Rješenje: Označimo vrh kvadrata koji pripada polukružnici s A, a duljinu stranica kvadrata s a. Dužina $\overline{AS}$ dijagonala je kvadrata, ali je ujedno i polumjer polukružnice. Duljina polumjera polukružnice stoga je $a\sqrt{2}$.



Označimo na slici gornji desni vrh kvadrata B i krajnju desnu točku promjera Q, te istaknimo pravokutni trokut SQB.



Primjenom Pitagorina poučka na taj trokut dobiva se redom

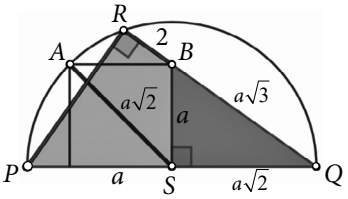
$$|BQ| = \sqrt{|BS|^2 + |SQ|^2},$$

$$|BQ| = \sqrt{a^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2},$$

$$|BQ| = \sqrt{a^2 + 2a^2},$$

odnosno $|BQ| = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$.

U nastavku istaknimo tetivu polukružnice $\overline{PR}$ kako je prikazano na slici. Točke P, Q i R vrhovi su trokuta kojemu je najdulja stranica $\overline{PQ}$ ujedno promjer polukružnice, a treći vrh R je na polukružnici.



Prema Talesovu poučku, $\angle PRQ$ pravi je kut jer je to obodni kut nad promjerom. Hipotenuza trokuta PQR ima duljinu $2a\sqrt{2}$, a za dulju katetu vrijedi $|QR| = a\sqrt{3}+2$.

Trokuti PQR i BQS su pravokutni te imaju jedan zajednički kut kod vrha Q. Prema KK poučku o sličnosti, ti su trokuti slični. Slijedi da su omjeri duljina njihovih odgovarajućih stranica jednaki, tj. redom vrijedi:

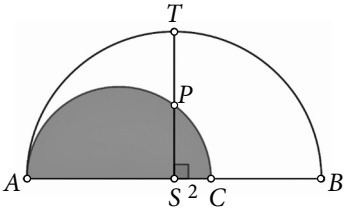
$$|PQ| : |BQ| = |RQ| : |SQ|,$$
$$2a\sqrt{2} : a\sqrt{3} = \left(a\sqrt{3}+2\right) : a\sqrt{2},$$
$$2\left(a\sqrt{2}\right)^2 = a\sqrt{3}\left(a\sqrt{3}+2\right),$$
$$4a^2 = 3a^2 + 2a\sqrt{3},$$

tj. $a^2 = 2a\sqrt{3}$, odakle je

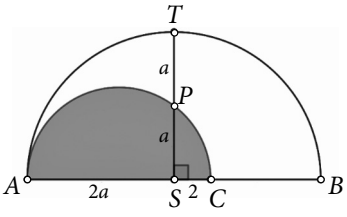
$$a = 2\sqrt{3}.$$

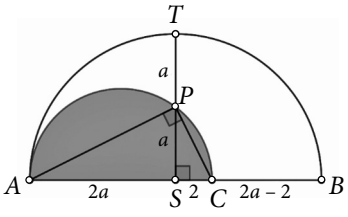
Sada je površina kvadrata jednaka $P = a^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 = 12$.

Primjer 2. Izračunajte površinu osjenčanoga polukruga ako je točka P polovište polumjera $\overline{ST}$ te vrijedi $|SC| = 2$.



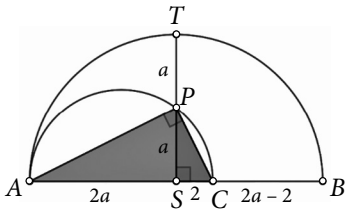
Rješenje: Označimo duljinu dužine $\overline{SP}$ s a. Tada je duljina polumjera velikoga polukruga $|ST| = 2a$, a dužina $\overline{BC}$ ima duljinu $|BC| = 2a - 2$ (slika dolje lijevo).





Istaknimo trokut ACP. Stranica $\overline{AC}$ promjer je osjenčanoga polukruga pa je to pravokutni trokut s pravim kutom pri vrhu P (slika gore desno).

Trokuti ASP i PSC slični su prema KK poučku o sličnosti jer se podudaraju u sva tri kuta. To znači da su im omjeri odgovarajućih kateta jednaki, pa slijedi



$|AS| : |PS| = |PS| : |SC|$,

$2a : a = a : 2$, tj,

$a^2 = 4a$,

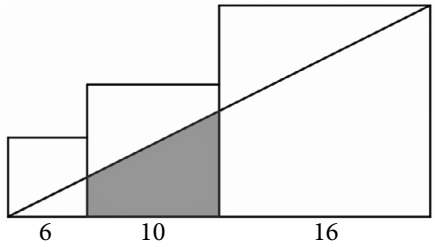
odakle je $a = 4$.

Stoga je promjer osjenčanoga polukruga jednak $|AC| = 2a + 2 = 2 \cdot 4 + 2 = 10$,

a polumjer je $r = \frac{|AC|}{2} = \frac{10}{2} = 5$.

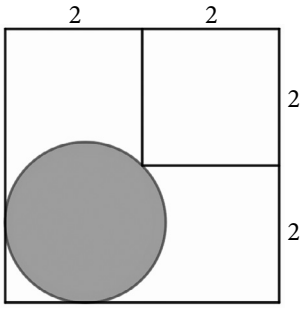
Konačno, površina toga polukruga je $P = \frac{r^2\pi}{2} = \frac{25\pi}{2}$.

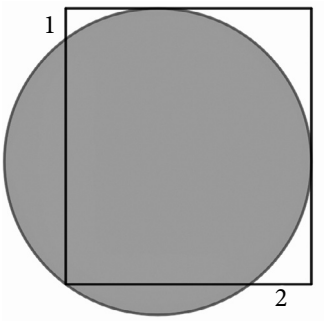
Zadatak 1. Izračunajte površinu osjenčanoga trapeza.



Zadatak 2. Izračunajte radijus kruga. (crtež dolje lijevo)

Zadatak 3. Izračunajte površinu kruga. (crtež dolje desno).





Izvor:

1. https://www.youtube.com/@math_with_alex/videos
2. https://www.youtube.com/@MathQueenSusanne/videos
3. https://www.youtube.com/@PreMath/videos