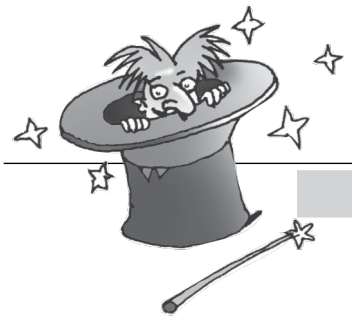


MATEMAGIČAR

Petar Mladinić, Zagreb

STVARANJE NASLUĆIVANJA

Kako su stari Matemagičari uočavali i uobličavali svoje tvrdnje koje bi kasnije dokazivali – mi to najčešće ne znamo. Mnoga su od tih naslućivanja bila „bezvrijedna". **Leonhard Euler** jedan je od najpoznatijih Matemagičara koji se nije „sramio" uobličavati stotine svojih „bezvrijednih" naslućivanja. No, niz se njegovih naslućivanja pokazao dalekosežnima, po čemu je postao poznat. Jedno njegovo naslućivanje uobličeno kao $e^{i\pi} = -1$ prekrasan je primjer uočavanja veze između temeljnih matematičkih činjenica.

Mladim Matemagičarima poznato je naslućivanje koje je uobličio **K. F. Gauss** rješavajući problem zbroja prvih 100 prirodnih brojeva. To je naslućivanje poznato kao *Gaussova dosjetka*.

M M M M M M M

U podlozi naslućivanja, koja ćemo u ovome tekstu ilustrirati na nekoliko različitih primjera, nalaze se razlike i količnici podataka.

M M M M M M M

Naslućivanje pomoću razlika



Talijanski Matemagičar i jedan od utemeljitelja moderne fizike, **Galileo Galilei** (1564. – 1642.), eksperimentalno je proučavao kretanje tijela po kosini. Mjerio je vrijeme kretanja tijela i prijeđeni put. Sve je to opisao u djelu *Razgovori i matematički dokazi o dvjema novim znanostima koje se tiču mehanike i mjesnih gibanja* (1638.). Trećeg dana razgovora opisuje rezultate pokusa koji bismo danas mogli interpretirati kao u sljedećem primjeru:

Uvodni primjer: Niz kosinu se kotrlja tijelo. Vrijeme (u sekundama) i putovi prijeđeni od početka gibanja (u centimetrima) zapisani su u tablici.

proteklo vrijeme t_n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
prijeđeni put s_n	0	$\frac{3}{4}$	3	$6\frac{3}{4}$	12	$18\frac{3}{4}$	27	$36\frac{3}{4}$	48

Ima li pravilnosti/zakonitosti u ovim podatcima? Možemo li „predvidjeti" koliki će put tijelo prijeći za 9 sekunda, za 1 minutu ili za pola sata?

U sljedećem primjeru ilustrirat ćemo kako se uočavaju podatci za tablicu koja nam onda omogućuje stvaranje naslućivanja.

Primjer 1. U ravnini je zadano 100 pravaca od kojih dva pravca nikada nisu međusobno usporedna i tri pravca nikada nemaju zajednički presjek. Na koliko dijelova ti pravci dijele ravninu?

Rješenje. Neka je n broj pravaca i m broj dijelova ravnine.

Razmotrimo uvjete problema.

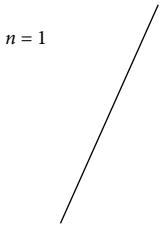
a) Nikoja dva pravca nisu međusobno usporedna. To znači da jedan pravac presijeca ostalih 99 pravaca.

b) Nikoja tri pravca nemaju zajednički presjek, tj. ne prolaze istom točkom. To znači da svaki pravac ima 99 točaka presjeka s drugim pravcima.

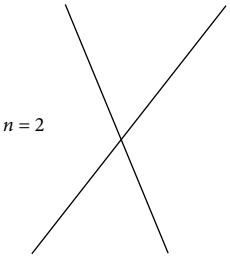
Pogledajmo problem u nekoliko jednostavnijih slučajeva, tj. za $n = 1, 2, 3, 4$ i 5.

Za $n = 1$ imamo 1 pravac koji dijeli ravninu na 2 dijela (vidi Sliku 1.).

Za $n = 2$ pravci dijele ravninu na 4 dijela (vidi Sliku 2.).

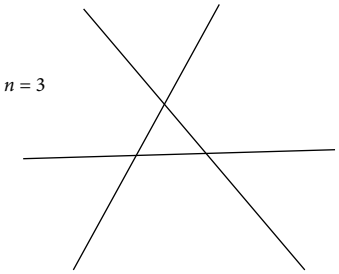


Slika 1.



Slika 2.

Za $n = 3$ dobivamo 7 dijelova ravnine (vidi Sliku 3.).



Slika 3.

Na sličan način za $n = 4$ uočavamo da ti pravci dijele ravninu na 11 dijelova, a za $n = 5$ na 16 dijelova.

Upišimo te podatke u tablicu:

n	1	2	3	4	5
m	2	4	7	11	16

Možemo li uočiti istu zakonitost ako tablicu nadopunimo s tri nova podatka?

Evo te nove tablice.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
m	2	4	7	11	16	22	29	37

Razmotrimo razlike m-ova i upišimo ih u sljedeći redak.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
m	2	4	7	11	16	22	29	37
razlike	4 – 2 = 2	7 – 4 = 3	11 – 7 = 4	16 – 11 = 5	22 – 16 = 6	29 – 22 = 7	37 – 29 = 8	

Uočimo da se te razlike povećavaju za 1 i naslućujemo da će u 8. stupcu razlika biti jednaka 9. Ako izračunamo razlike ovih razlika, u sljedećem će retku ove tablice sve te razlike međusobno biti jednake 1.

Stari su Matemagičari naslutili da se u slučaju kada se razlike međusobno izjednače radi o polinomu. Dakle, ako se izjednače na 1. razini razlika, onda se radi o polinomu 1. stupnja. Slično tome, kao u našem slučaju, radi se o polinomu drugog stupnja. Općenito, na kojoj se razini te razlike izjednače, radi se o polinomu toga stupnja.

Dakle, naslućujemo da se radi o polinomu $f(x) = ax^2 + bx + c, a, b, c \in R$. Odredimo nepoznate koeficijente a, b, c. Za tri podatka iz tablice, $f(1) = 2$, $f(2) = 4$, $f(3) = 7$, dobivamo sustav triju jednadžbi s trima nepoznanicama:

$$a + b + c = 2,$$

$$4a + 2b + c = 4,$$

$$9a + 3b + c = 7.$$

Rješenje toga sustava je $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}, c = 1.$

Traženi polinom je $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$. Provjera na podatcima iz tablice potvrđuje naše naslućivanje.

Sada možemo odgovoriti da je $f(100) = 5051$, odnosno da 100 pravaca dijeli ravninu na 5051 dio/područje.

Zadatak 1. Riješite uvodni primjer koji je rješavao Galilei.

Zadatak 2. U ravnini je zadano 100 pravaca za koje vrijedi

a) da su neka dva pravca usporedna,

b) da neka tri pravca imaju zajedničko sjecište.

Na koliko se dijelova u ovim slučajevima dijeli ravnina?



Naslućivanje pomoću količnika (omjera)

Razmotrimo podatke koji ne omogućuju naslućivanje pomoću razlika, nego treba računati količnike (omjere) podataka.

Primjer 2. Promotrimo niz: 2, 4, 8, 16, 32, 64... Nastavimo li ga prema istom pravilu, koji je broj deseti član toga niza?

Rješenje. Zapišimo podatke u tablicu

n	1	2	3	4	5	6
a_n	2	4	8	16	32	64

Odredimo li omjere susjednih a_n-ova, tj. $\frac{a_n}{a_{n-1}}$, odmah uočavamo da su svi omjeri susjednih vrijednosti jednaki 2.

n	1	2	3	4	5	6
a_n	2	4	8	16	32	64
$\frac{a_n}{a_{n-1}}$	2	2	2	2	2	2

Dakle, naslućujemo da je zakonitost $f(x)=2^x$, pa je $f(10)=2^{10}=1024$.

Ovdje se radi općenito o eksponencijalnoj zakonitosti $f(x)=ab^x+c$. Iz tablice dobivamo $f(1)=2, f(2)=4, f(3)=8$, odnosno sustav triju jednadžbi s trima nepoznanicama:

$$a\cdot b^1+c=2,$$
$$a\cdot b^2+c=4,$$
$$a\cdot b^3+c=8.$$

Rješenje ovog sustava je $a=1, b=2, c=0$. Dakle, naša naslućena zakonitost je $f(x)=2^x$.

Razmotrimo problem vrijednosti automobila i ispunimo tablicu.



Zadatak 3. Automobil godišnje gubi 10 % vrijednosti. Početna je vrijednost automobila 30 000 eura.

a) Kad će automobil izgubiti na vrijednosti 10 000 eura?
b) Kolika mu je vrijednost nakon 10 godina?

Rješenje. Početna je vrijednost automobila 30 000 eura. Nakon godine dana ta se vrijednost smanji za 10 %, tj. za 3000 eura, pa iznosi 27 000 eura. Sljedećih godina te su vrijednosti 24 300, 21 870, 19 683 …

godina	0	1	2	3	4	…
vrijednost	30 000	27 000	24 300	21 870	19 683	…
omjer		$\frac{27000}{30000}=\frac{9}{10}$	$\frac{24300}{27000}=\frac{9}{10}$	$\frac{21870}{24300}=\frac{9}{10}$	$\frac{19683}{21870}=\frac{9}{10}$	

Dakle, radi se o naslućivanju zakonitosti $f(x)=ab^x+c$. Iz prva tri podatka dobivamo sustav triju jednadžbi s trima nepoznanicama:

$$a\cdot b^1+c=30000,$$
$$a\cdot b^2+c=27000,$$
$$a\cdot b^3+c=24300,$$

čije je rješenje $a=30000$, $b=\frac{9}{10}$, $c=0$.

Zakonitost promjene vrijednosti automobila je $f(x)=30000\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^x$.



a) U 4. godini ukupna će se vrijednost automobila smanjiti za 10 000 eura.

b) Nakon 10 godina vrijednost automobila bit će $1040\frac{7}{20}$ eura.

Zadatak 4. Kolonija bakterija udvostručuje se svakih 15 sati. Znanstvenica započinje eksperiment sa 100 bakterija. Za koliko će sati u koloniji biti 30 000 bakterija?

Rješenje. Iz tablice početnih podataka

sati	0	15	30	45	...
broj bakterija	100	200	400	800	...

i rješavanjem pripadnog sustava jednadžbi dobivamo da je naslućivanje/zakonitost $f(x)=100\cdot 2^x$. U koloniji će biti 30 000 bakterija za 5 dana, 3 sata i 26 minuta.

Jedan dodatni zadatak

Kojim se naslućivanjem može riješiti ovaj dodatni zadatak?

Zadatak 5. Liječnik je pacijentu pripisao lijek za smanjivanje kolesterola u krvi. Lijek se uzima redovito, bez prekidanja terapije, najdulje 15 mjeseci. Pacijent je počeo uzimati lijek kad mu je razina kolesterola u krvi bila $9\frac{9}{50}$. Mjesečni kontrolni pregledi dali su sljedeće rezultate pacijentovog kolesterola u krvi:

mjesec	0	1	2	3	4
kolesterol	$9\frac{9}{50}$	$8\frac{3}{5}$	$8\frac{3}{50}$	$7\frac{14}{25}$	$7\frac{1}{10}$

Kada se očekuje da će pacijent s lijekovima smanjiti razinu kolesterola na $5\frac{1}{20}$?