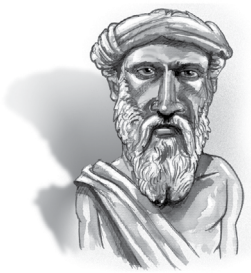


Lucija Brekalo Mandić, Zagreb

DOKAZ PITAGORINA POUČKA POMOĆU *GEOGEBRE*

Pitagorin poučak jedna je od najslavnijih matematičkih tvrdnji koje su oblikovale razvoj geometrije i cijele matematike. U povijesti matematike postoji više od stotinu različitih dokaza Pitagorina poučka, među kojima se posebno ističu geometrijski, algebarski te vizualni pristupi. Dokaz u matematici nije samo formalna potvrda tvrdnje, nego i sredstvo razvijanja logičkog mišljenja, kritičkog stava i matematičke pismenosti.

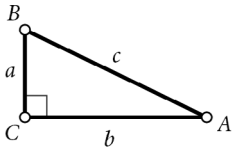
Pitagora i kratka povijest Pitagorina poučka



Kako je gore istaknuto, poučak nazvan po grčkom filozofu i matematičaru Pitagori iz 6. stoljeća pr. Kr. zasigurno je jedan od najvažnijih elementarnih poučaka u matematici jer njegove posljedice i generalizacije imaju vrlo široku primjenu. Često je teško na temelju povijesnih izvora pouzdano utvrditi koliko su dugo određene činjenice bile poznate. Međutim, u slučaju Pitagorina poučka postoji babilonska glinena pločica, poznata kao Plimpton 322, koja datira otprilike iz 1700. g. pr. Kr. Na toj pločici zabilježeno je petnaest Pitagorinih trojki, uključujući (3, 4, 5), (28, 45, 53) i (65, 72, 97). Koja god interpretacija svrhe Plimptona 322 bila točna, jasno je da su i Pitagorin poučak i postupci za konstruiranje Pitagorinih trojki bili poznati i prije 1700. g. pr. Kr. Priroda matematike počela se mijenjati oko 600. g. pr. Kr., što je bilo usko povezano s usponom grčkih gradova-država. Zbog intenzivne trgovine ideje su se slobodno širile iz ranijih civilizacija Egipta i Babilonije. Iako je velik dio povijesti zauvijek izgubljen, predaja pripisuje Talesu, Pitagori i njihovim učenicima razvoj brojnih ključnih ideja, a osobito uvođenje potrebe za dokazivanjem poučaka.

Motivacija

Pitagorin utjecaj nadilazi isključivo matematičko područje. Tijekom života volio je putovati na različita mjesta, poput Egipta i Babilona. Učio je svoje učenike da se sve u svemiru može izraziti brojevima. Zbog toga su Pitagora i njegovi sljedbenici osobitu važnost pridavali brojevima i omjerima koji se njima mogu izraziti. Pitagorin poučak tvrdi da je površina kvadrata nad hipo-



tenuzom pravokutnog trokuta jednaka zbroju površina kvadrata nad njegove dvije katete. Simbolički često pišemo

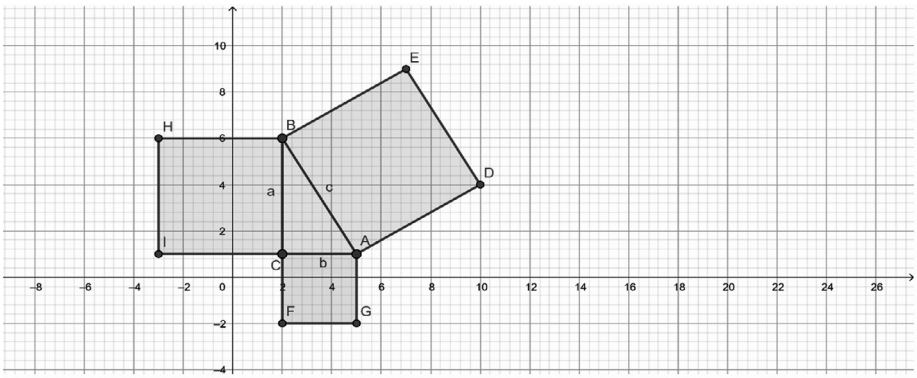
$$a^2 + b^2 = c^2$$

gdje je c duljina hipotenuze, dok su a i b duljine preostalih dviju stranica (kateta) trokuta. Ovaj poučak poznat je većini ljudi, jednostavan je, ali ujedno vrlo zanimljiv i primjenjiv u svakodnevnici. Dokazi Pitagorina poučka izrazito su raznoliki te postoji velik broj načina dokazivanja, od jednostavnih do vrlo složenih. U digitalnom dobu vizualizacija i dokazivanje Pitagorina poučka može se ostvariti i uz pomoć tehnologije, primjerice kroz softver *GeoGebra*. U nastavku pokazujemo kako se *GeoGebra* može primijeniti kao alat kojim se omogućava vizualizaciju i dokazivanje Pitagorina poučka.

Dokaz Pitagorina poučka pomoću *GeoGebre*

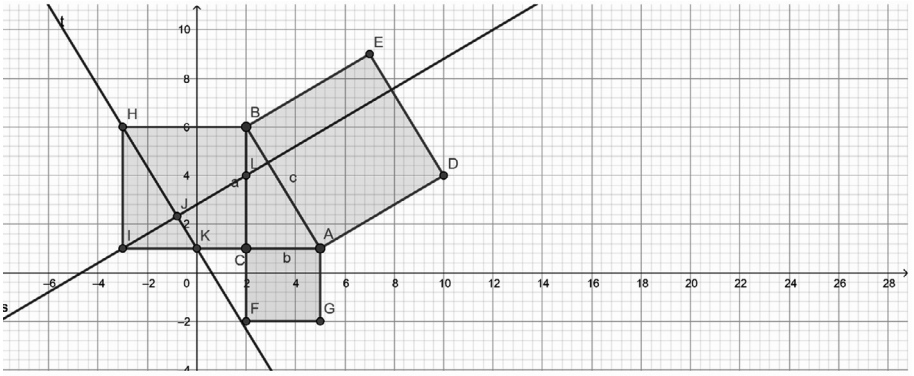
GeoGebra je računalni program koji se može koristiti u istraživanju i učenju matematike. Ovaj dokaz temelji se na površini kvadrata konstruiranih nad svakom stranicom pravokutnog trokuta te na animaciji translacije mnogokuta. Pokušajmo ga dokazati pomoću sljedećih uputa:

a) Konstruirajte pravokutni trokut ABC s pravim kutom u vrhu C i tri kvadrata nad svakom njegovom stranicom. Stranice $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ su katete, a stranica $\overline{AB}$ hipotenuza tog trokuta. Nad svakom se stranicom trokuta prema van konstruira kvadrat: kvadrat $CFGA$ nad stranicom $\overline{AC}$, kvadrat $BHIC$ nad stranicom $\overline{BC}$ te kvadrat $ADEB$ nad hipotenuzom $\overline{AB}$.



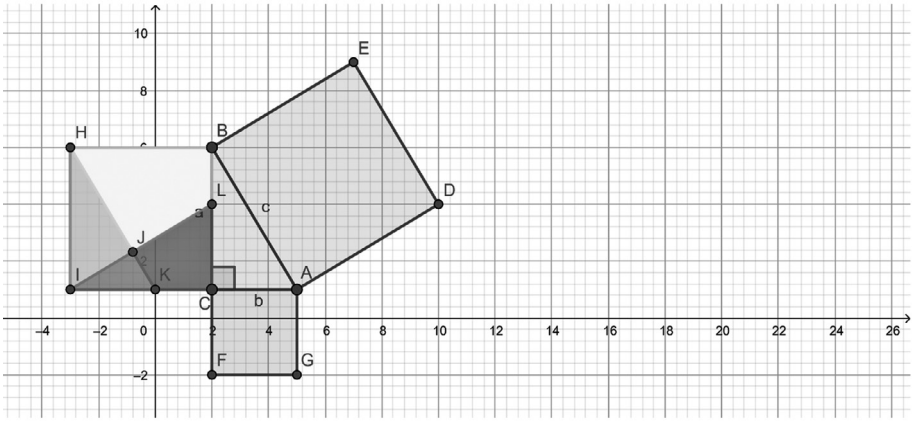
Slika 1. Pravokutni trokut i tri kvadrata nad svakom stranicom trokuta

b) Vrhovima I i H kvadrata $BHIC$ nacrtajte pravce paralelne stranicama kvadrata $ADEB$ i odredite njihove presječne točke na sljedeći način: na stranici $\overline{BC}$ je točka L, a na stranici $\overline{IC}$ točka K. Sjecište tih pravaca (u unutrašnjosti kvadrata $BHIC$) je točka J. Nakon toga možete sakriti pravce.



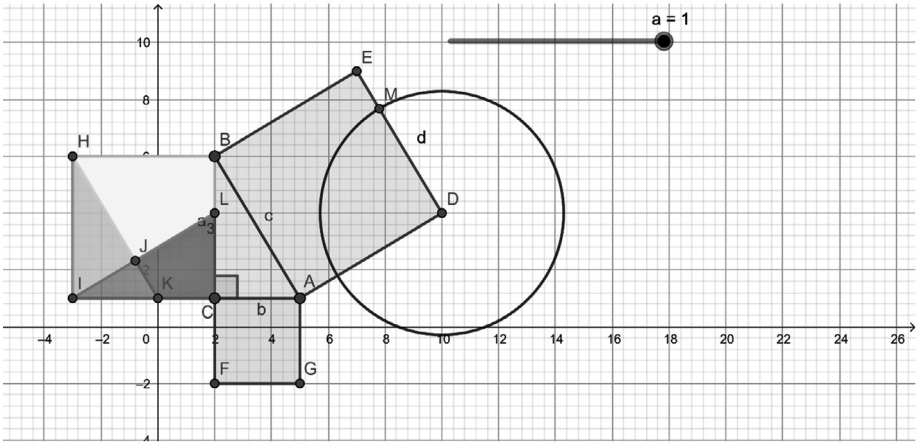
Slika 2. Prikaz dvaju pravaca sa sjecištem u točki J

c) Nacrtajte mnogokute i obojite ih različitim bojama radi bolje vizualizacije: unutar kvadrata nad stranicom $\overline{BC}$ istaknite četiri mnogokuta: $JLBH$, JHI, JIK i $JKCL$ Svakom mnogokutu dodijelite različitu boju, uključujući i kvadratu $CFGA$.



Slika 3. Prikaz mnogokuta u kvadratu BHIC

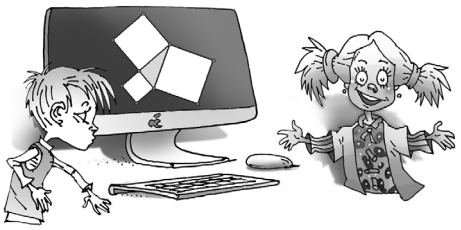
d) Nacrtajte potom kružnicu sa središtem u točki D i polumjerom $\overline{JH}$. Označite s M presjek nacrtane kružnice i dužine $\overline{DE}$ te izradite klizač a s parametrima: $min = 0$, $max = 1$, $povećanje = 0.01$, $brzina = 3$ i $način = odjednom$.



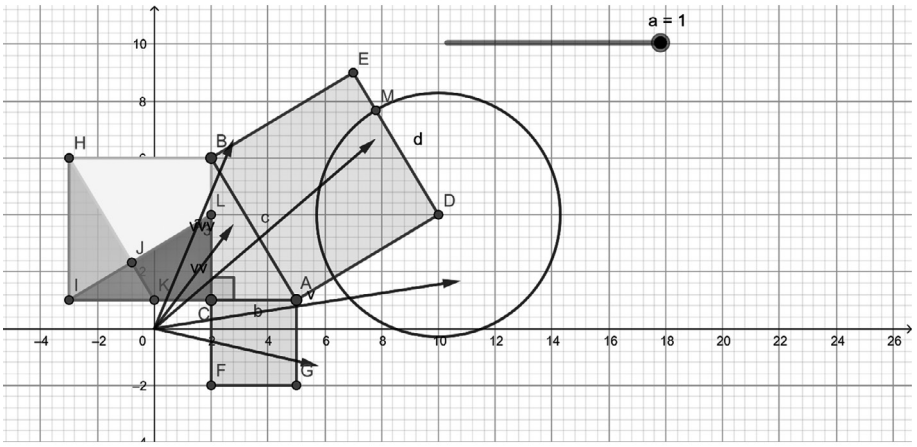
Slika 4. Kružnica (D, |JH|) i klizač a

e) Nacrtajte vektore i definirajte translacije mnogokuta na sljedeći način:

1. $\vec{u} = a \cdot vektor(J, E)$
2. $\overrightarrow{vv} = a \cdot vektor(J, D)$
3. $\overrightarrow{vvv} = a \cdot vektor(J, B)$
4. $\vec{tt} = a \cdot vektor(J, A)$
5. $\vec{rr} = a \cdot vektor(A, M)$

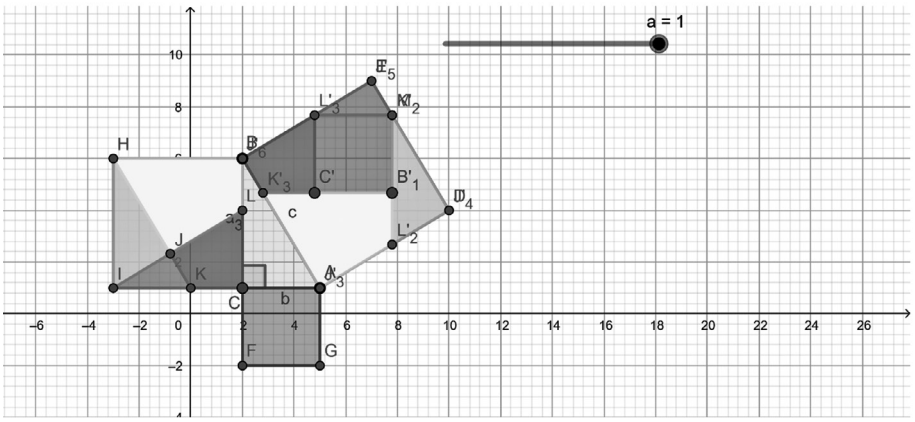


Odaberite opciju „*Translacija objekta za vektor*" te pomoću definiranih vektora translatirajte mnogokute prema kvadratu *ADEB*.



Slika 5. Vektori pomoću kojih se izvodi translacija mnogokuta

f) Možete zatim pokrenuti klizač kako bi se prikazao dokaz Pitagorina poučka.



Slika 6. Dokaz Pitagorina poučka preslagivanjem mnogokuta

GeoGebra sada prikazuje animaciju kojom se, pomicanjem klizača od $a = 0$ do 1, mnogokuti s kvadrata nad katetama preslaguju u kvadrat nad hipotenuzom. Točnije, kvadrati *BHIC* i *CFGA* (podijeljen na četiri mnogokuta - *JLBH*, *JHI*, *JIK* i *JKCL*), koji su konstruirani nad katetama mogu se presložiti, odnosno translatirati nad hipotenuzu. Tako se pokaže da je ukupna površina kvadrata nad katetama jednaka površini kvadrata nad hipotenuzom. Drugim riječima, to je formalno rečeno ono poznato:

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

gdje je a oznaka za duljinu stranice kvadrata *BHIC* podijeljenog u ovom dokazu na četiri mnogokuta, b oznaka za duljinu stranice kvadrata *CFGA*, a c oznaka za duljinu stranice kvadrata *ADEB*.

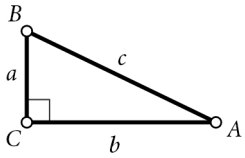
GeoGebra omogućava algebarsku provjeru: površina kvadrata *ADEB* nad hipotenuzom trokuta *ABC* iznosi 34, a površina kvadrata *CFGA* nad katetom $\overline{AC}$ iznosi 9. Površina kvadrata *BHIC* nad katetom $\overline{BC}$ podijeljena je na četiri mnogokuta: $P_{JLBH} = 11.99$, $P_{JHI} = 5.51$, $P_{JIK} = 1.99$ i $P_{JKCL} = 5.51$.

Zbroj površina kvadrata *CFGA*, *JLBH*, *JHI*, *JIK* i *JKCL* jednak je površini kvadrata *ADEB*:

$$9 + 11.99 + 5.51 + 1.99 + 5.51 = 34.$$

Površina kvadrata nad hipotenuzom pravokutnog trokuta jednaka je zbroju površina kvadrata nad njegovim katetama.

Bitno je naglasiti kako se u ovom dokazu ne radi o proizvoljnim vektorima, nego o pažljivo konstruiranim translacijama koje omogućuju da se povr-



šine kvadrata nad katetama točno preslože u kvadrat nad hipotenuzom. Time se dokazuje da vrijedi jednakost već spomenutih površina:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Uočite da ovi vektori nisu samo tehnički alat u *GeoGebri*, nego i matematičko sredstvo koje pokazuje kako se geometrijske transformacije mogu koristiti za vizualno dokazivanje jedne od najvažnijih jednakosti u matematici. Dokaz tako povezuje algebru ($a^2 + b^2 = c^2$), geometriju (površine kvadrata) i analitičku geometriju (vektori i translacije).

Očito je da se dostupna i jednostavna tehnologija može koristiti kao izvor učenja, za vizualizaciju, provjeru i dokazivanje Pitagorina teorema korištenjem programa *GeoGebra*.

