TANGENTA, KRUŽNICA I *SKETCHPAD*

Nikol Radović, Seget Donji/Sisak

U Matkama od 131 do 134 rješavali smo zadatke u kojima je trebalo konstruirali tangente kružnice ili kružnica (zadanih u različitim odnosima) primjenom Sketchpada kao alata za crtanje. No, što ako je zadana tangenta? Kako konstruirati/nacrtati kružnicu? Što ako su osim tangente zadani još neki uvjeti, primjerice kružnica koju tražena kružnica treba tangirati. Krenimo u nove geometrijsko konstruktivne avanture! Dokazi svih konstrukcija mogu se naći u matematičkim knjigama, ako nekog zanima.

Primjer 1. Zadani su pravac t i točka X koja nije na pravcu. Točkom X konstruirajmo kružnicu k tako da joj je zadani pravac t tangenta.

- Na početku nacrtajmo bilo koji pravac t i točku, označimo je s X. Pravac crtamo *Alatom za crtanje ravnih objekata-Pravac*, a točku *Alatom za crtanje točke*, Slika 1.
- Točke koje definiraju pravac možemo „izbrisati"; označimo točke i u izborniku *Zaslon* odaberemo naredbu *Sakrijte točke* ili istovremeno na tipkovnici pritisnemo tipke Ctrl H .

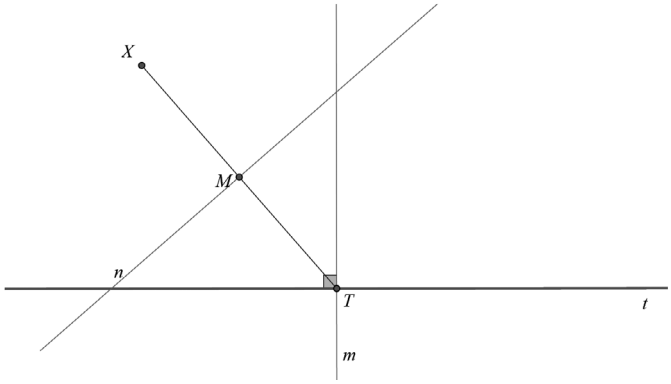


Slika 1.

- Na pravcu t nacrtajmo proizvoljnu točku (utječe li njezin izbor na rješenje?),neka je to primjerice točka T. Označimo pravac i u izborniku *Konstrukcije* odaberemo naredbu *Točka na pravcu.*
- Nacrtana točka T bit će diralište zadanog pravca t i tražene kružnice k. Središta svih kružnica kojima je pravac t tangenta i točka T diralište nacrtat/konstruirat ćemo tako da točkom T nacrtamo/konstruiramo okomicu m na pravac t, označimo točku i pravac,te u izborniku *Konstrukcije* odaberemo naredbu *Okomica*.
- Zadatak bi bio riješen (koliko bi bilo rješenja?) da nema još jednog uvjeta: i zadana točka X mora biti na kružnici.

- Točkama X i T nacrtajmo dužinu $\overline{TX}$, označimo točke i u izborniku *Konstrukcije* odaberemo naredbu *Dužina* ili istovremeno na tipkovnici pritisnemo tipke Ctrl L. Dok je dužina označena, u izborniku *Konstrukcije* odaberemo naredbu *Polovište*, *M*.

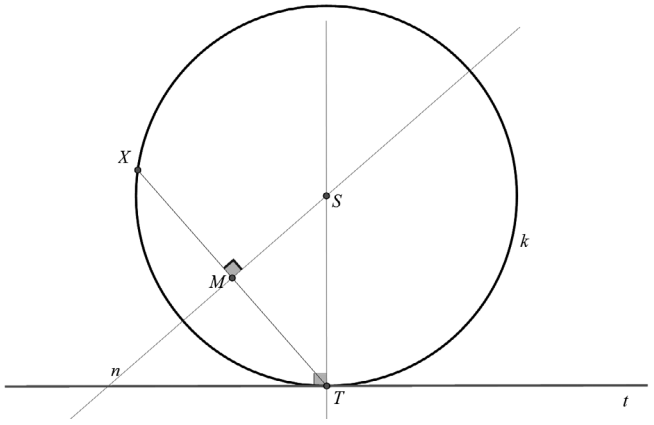
- Točkom M nacrtajmo/konstruirajmo okomicu n na dužinu $\overline{TX}$, označimo točku i dužinu,te u izborniku *Konstrukcije* odaberemo naredbu *Okomica*, Slika 2.



Slika 2.

- Pravci n i m sijeku se u točki S. Označimo pravce pa u izborniku *Konstrukcije* odaberimo naredbu *Presjek*.

- Točka S središte je tražene kružnice k.Označimo točke S i T (ili S i X) pazeći na poredak pa u izborniku *Konstrukcije* odaberemo naredbu *Kružnica : : središte + točka*, Slika 3.



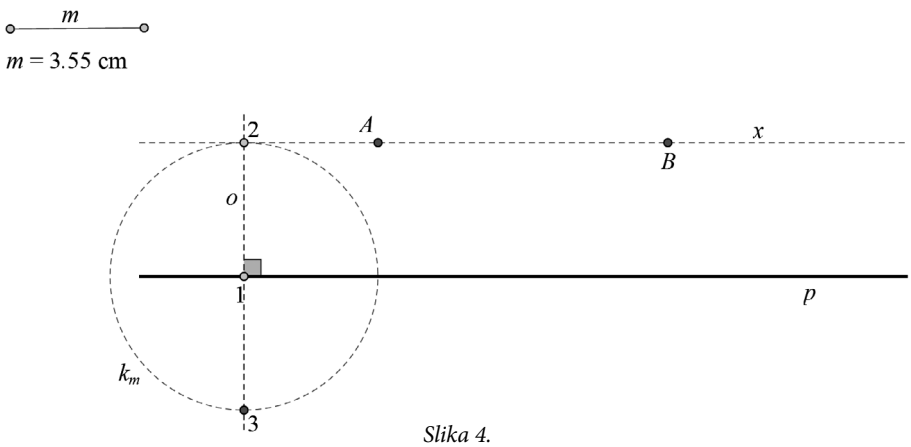
Slika 3.

- Prisjetimo se, točka T bila je proizvoljna točka pravca t. „Šetnjom" točke T po pravcu t iskoristi dinamičnost programa i provjeri kako i da li pomicanje točke T utječe na rješenje?

- Nadalje, što bi bilo s rješenjem kada bi točka X bila na pravcu?

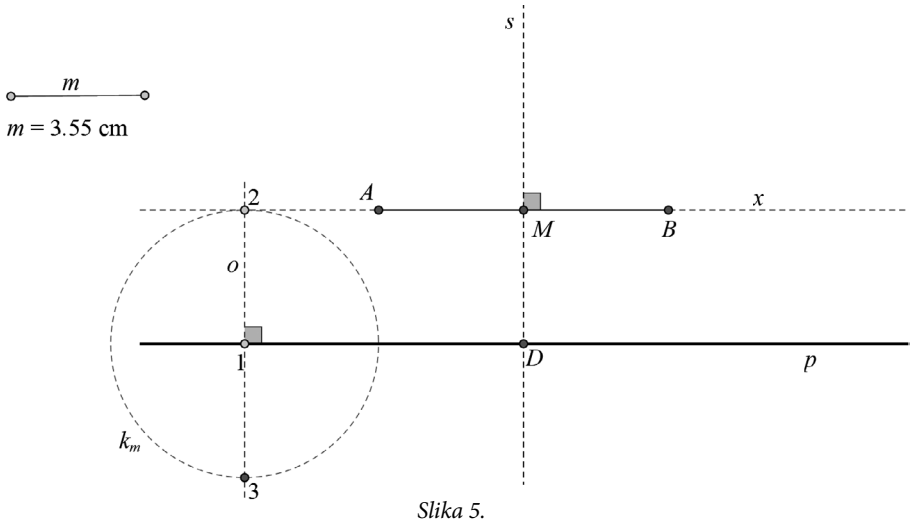
Primjer 2. Zadane su dvije točke A i B, te pravac p, pri čemu su točke jednako udaljene od pravca i nisu na pravcu. Nacrtajmo/konstruirajmo kružnicu k točkama A i B, kojoj je zadani pravac p tangenta.

- Na početku nacrtamo bilo koji pravac p. Budući da točke A i B moraju biti jednako udaljene od pravca p, morat ćemo ih nacrtati/konstruirati na jednakoj udaljenosti, primjerice crtanjem/konstruiranjem pomoćnog pravca x koji je na nekoj udaljenosti od pravca p. Ta udaljenost može se definirati da je promjenjive duljine m, dužinom.
- Nacrtamo pomoćnu dužinu *Alatom za crtanje ravnih objekata* i izmjerimo joj duljinu (označimo dužinu pa u izborniku *Mjerenja* odaberemo naredbu *Duljina*).
- Na pravcu p nacrtamo proizvoljnu točku 1, označimo pravac pa u izborniku *Konstrukcije* odaberemo naredbu *Točka na pravcu*.
- Točkom 1 konstruiramo okomicu o na pravac p, označimo točku i pravac,pa u izborniku *Konstrukcije* odaberemo naredbu *Okomica*.
- Nacrtamo kružnicu $k_m(1, m)$, označimo točku i dužinu,pa u izborniku *Konstrukcije* odaberemo naredbu *Kružnica: Središte + polumjer*.
- Pravac o i kružnica k sijeku se u točkama 2 i 3. Označimo kružnicu i pravac, pa u izborniku *Konstrukcije* odaberemo naredbu *Presjek*.
- Točkom 2 crtamo/konstruiramo pravac x usporedan s pravcem p tako da označimo točku i pravac, pa u izborniku *Konstrukcije* odaberemo naredbu *Paralela*. Na isti način mogli smo nacrtati i pravac točkom 3.
- Na pravcu x konstruiramo dvije različite točka i označimo ih A i B tako da označimo pravac pa u izborniku Konstrukcije odaberemo naredbu Točka na pravcu za svaku od točaka, Slika 4.



Slika 4.

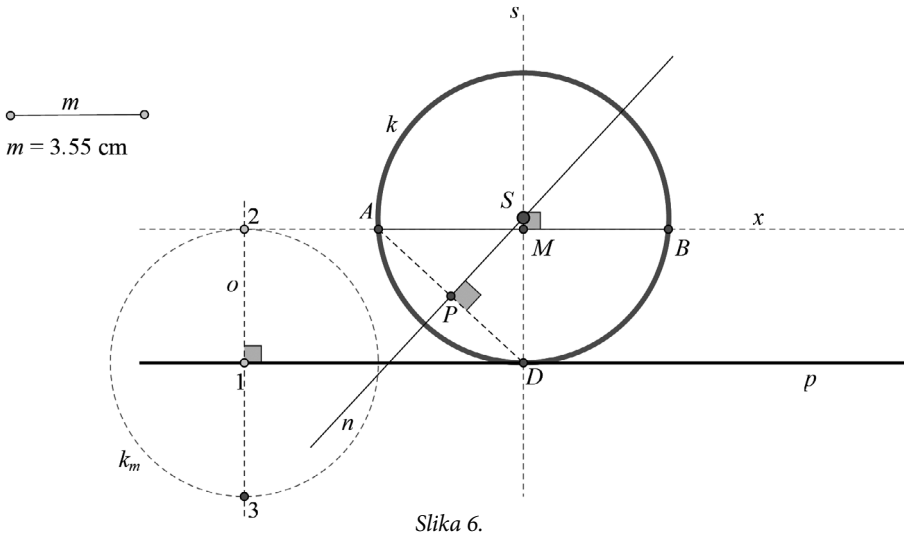
- Za razliku od prethodnog primjera, tražena kružnica mora ispunjavati tri uvjeta – pravac mora biti tangenta, dvije različite točke (koje nisu na pravcu) moraju biti točke kružnice. Način rješavanja Primjera 1. odabirom proizvoljne točke pravca za diralište ne možemo primijeniti, već ga moramo konstruirati.
- Točkama *A* i *B*nacrtamo dužinu $\overline{AB}$,označimo točke i u izborniku *Konstrukcije* odaberemo naredbu *Dužina*ili istovremeno na tipkovnici pritisnemo tipke Ctrl L . Dok je dužina označena, u izborniku *Konstrukcije* odaberemo naredbu *Polovište*, *M*.
- Točkom *M* nacrtamo/konstruiramo okomicu *s* na dužinu $\overline{AB}$, označimo točku i dužinu,te u izborniku *Konstrukcije* odaberemo naredbu *Okomica*, Slika 5.
- Zadani pravac *t* i okomica *s* sijeku se u točki *D*. Označimo pravce pa u izborniku *Konstrukcije* odaberemo naredbu *Presjek*.



Slika 5.

- Konstruirana točka *D* pravca *p*diralište je tražene kružnice *k*i pravca *p*. Sada možemo primijeniti Primjer 1. kako bismo konstruirali središte tražene kružnice. Točkama *A* i *D* (ili B i D) crtamo dužinu $\overline{AD}$ označimo točke pa u izborniku *Konstrukcije* odaberemo naredbu *Dužina* ili istovremeno na tipkovnici pritisnemo tipke Ctrl L . Dok je dužina označena, u izborniku *Konstrukcije* odaberemo naredbu *Polovište*, *Z,*ili istovremeno na tipkovnici pritisnemo tipke Ctrl M .
- Točkom *Z* konstruiramo okomicu *n* na dužinu $\overline{AD}$ tako daoznačimo točku i dužinu, te u izborniku *Konstrukcije* odaberemo naredbu *Okomica*.

- Pravci *n* i *s* sijeku se u točki *S*. Označimo pravce pa u izborniku *Konstrukcije* odaberemo naredbu *Presjek*.
- Točka *S* središte je tražene kružnice *k*, Slika 6.



Slika 6.

- Prisjetimo se, dužina *m* zadana je kao mjera. „Šetnjom" rubnih točaka dužine *m* mijenjamo njezinu duljinu. Provjeri utječe li promjena duljine dužine *m* na rješenje?
- Nadalje, što bi bilo s rješenjem kada bi se ili točka *A* ili točka *B* „šetale"? Što ako bi se u nekom trenutku „poklopile"?

Literatura:

1. Cheney, F. (1953.): Canwe Out Mascheroni?,TheMathematicsTeacher, Vol-47, No. 3, 152 – 156.
2. Garden, M. (1992.): MathematicalCircus, TheMathematicalAssociationof America, Washington DC.
3. Hlavaty, J. H. (1957.): *Macheroniconstructions*,TheMathematicTeacher, Vol. 50, No- 7., 482 – 487.
4. Palman, D. (1996.): *Geometrijske konstrukcija*, Element, Zagreb.
5. Palman, D. (1996.): Trokut i kružnica, Element, Zagreb.
6. Reynolds, B. E.; Fenton, W. E. (2005.): *CollegeGeometryUsingTheGeometer's Sketchpad*, KeyCollegePublishing, Emeryville.