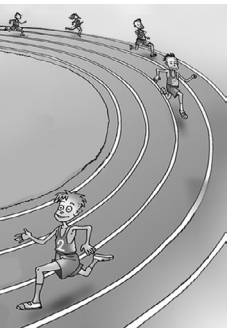
HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA KADETE

Sanja Stilinović, Zagreb

HMOK – Hrvatska matematička olimpijada za kadete (HMOK) natjecanje je učenika osnovne škole: 4. razred – A kategorija, 5. razred – B kategorija i 6. razred – C kategorija. Natjecanje se provodi u organizaciji Hrvatskoga matematičkog društva (HMD), a ideja za pokretanje ovog natjecanja potekla je iz činjenice da za naše najmlađe natjecatelje – učenike 4. razreda – matematičko natjecanje završava na županijskoj razini, dok za ostalu populaciju natjecatelja imamo Državno natjecanje, a za učenike od 7. razreda i Olimpijade. Time su učenici četvrtog razreda diskriminirani u kontekstu mogućnosti sudjelovanja na natjecanjima koja nisu isključivo popularizacijskog karaktera (npr. Klokan bez granica) jer je Regionalno natjecanje, koje je slijedilo nakon Županijskog, posljednji put održano 2010. godine. Stoga je skupina od desetak matematičara, koji su godinama članovi raznih povjerenstava za matematička natjecanja, 2020. godine osmislila natjecanje HMOK te ga organizira i provodi u sklopu takvih aktivnosti HMD-a.

Natjecanje HMOK provodi se u dva kola. U početku je natjecanje održavano krajem nastavne godine, a zbog organizacijskih razloga sada se drugo kolo provodi početkom nove školske godine. U prvo kolo natjecanja pozivaju se učenici koji su ostvarili izvrsne rezultate (unutar prvih 75-80 mjesta) na županijskoj razini natjecanja. Poziv se objavljuje na stranicama *Matematička natjecanja* te se učenici i njihovi mentori prijavljuju putem prijavnog obrasca. Prvo kolo provodi se *online*, učenici rješavaju 10 zadataka, a ove školske godine održat će se 23. svibnja. Na osnovi rezultata prvog kola objavljuje se bodovni prag za drugo kolo na koje se poziva tridesetak najuspješnijih natjecatelja po kategoriji iz prvog kola te nagrađeni učenici Državnog natjecanja i najuspješniji učenici prošlogodišnjeg HMOK-a ako iz nekog razloga nisu ostvarili plasman na osnovi rezultata u prvom kolu. Drugo kolo održava se početkom listopada u regionalnim centrima diljem Hrvatske, a učenici rješavaju 5 zadataka.

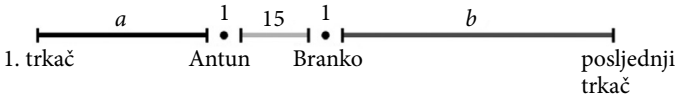


U ovom članku izdvojeno je nekoliko primjera zadataka 2. kola natjecanja HMOK-a s naglaskom na zadatke koji su bili zadani u više kategorija. Dane su i metode rješavanja primjerene dobi učenika te analiza riješenosti.

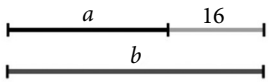
1. primjer: 2. kolo HMOK 2020. - 4. i 5. razred (kategorije A i B)

Antun i Branko sudjelovali su u jednoj utrci. Svi su trkači završili utrku, a nikoja dva nisu završila utrku u isto vrijeme. Broj trkača koji su završili utrku prije Antuna dva je puta manji od broja trkača koji su je završili nakon njega. Broj trkača koji su završili utrku prije Branka jednak je broju trkača koji su je završili nakon njega. Točno 15 trkača završilo je utrku nakon Antuna, a prije Branka. Koliko je trkača sudjelovalo na utrci?

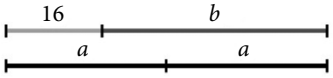
Rješenje: Kako je zadatak za 4. i 5. razred, rješavamo ga grafičkom metodom. Iz uvjeta zadatka očito je da je Antun utrku završio prije Branka. Označimo s a broj trkača koji su završili utrku prije Antuna, a s b broj trkača koji su završili utrku poslije Branka. Kako je nakon Antuna, a prije Branka utrku završilo točno 15 trkača, onda Antunov i Brankov položaj u odnosu na ostale trkače možemo prikazati ovako:



Broj trkača koji su završili utrku prije Branka jednak je broju trkača koji su utrku završili nakon njega, što možemo prikazati ovako:

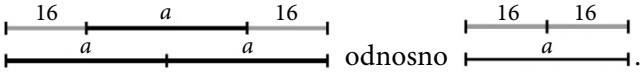


No broj trkača koji su utrku završili nakon Antuna dvostruko je veći od broja trkača koji su utrku završili prije, pa to možemo prikazati ovako:





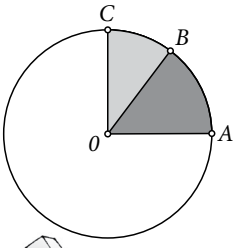
Na osnovi ovih dvaju prikaza dobijemo:



Sada zaključujemo da su prije Antuna utrku završila 32 trkača, pa je poslije njega utrku završilo 64 trkača, odnosno na utrci je sudjelovalo 32 + 1 + 64 = = 97 trkača.

Analiza riješenosti:

kategorija	ukupno natjecatelja	0 bodova	parcijalni bodovi		10 bodova
			1 - 4	5 - 9	
4. razred - A	29	11	10	5	3
5. razred - B	29	0	5	11	13



2. primjer: 2. kolo HMOK 2020. - 5. razred (kategorija B)

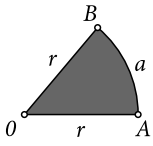
Na školskom igralištu nacrtan je veliki krug. Središte kruga je točka O, a na rubu su označene točke A, B i C. Pritom su kutovi $\angle AOB$ i $\angle BOC$ šiljasti, a dužine $\overline{OA}$ i $\overline{OC}$ međusobno su okomite. Dio kruga omeđen dužinama $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ i kružnim lukom $\overset{\frown}{AB}$ osjenčan je tamno sivo, a dio kruga omeđen dužinama $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ i kružnim lukom $\overset{\frown}{BC}$ osjenčan je svijetlo sivo. Ivica je svojim stopama izmjerio da je opseg kruga 240 stopa te da je opseg tamno sivog lika za

18 stopa veći od opsega svijetlo sivog lika. Ako je površina čitavog kruga 72 m², kolika je površina svijetlo sivog lika?

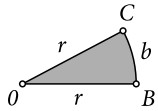
Napomena: Opseg geometrijskog lika je duljina njegova ruba.

Rješenje: Kako su dužine $\overline{OA}$ i $\overline{OC}$ međusobno okomite, osjenčani dio koji čine tamno sivi i svijetlo sivi kružni isječak omeđen je dvama njegovim polumjerima i četvrtinom kružnice.

Kružni luk $\overset{\frown}{AC}$ je četvrtina kružnice, a Ivica je izmjerio da je kružnica duljine 240 stopa, dakle duljina tog kružnog luka iznosi 240 : 4 = 60 stopa.



Opseg tamno sivog isječka je $|OA|+|OB|+|\overset{\frown}{AB}|$, a opseg svijetlo sivog $|OB|+|OC|+|\overset{\frown}{BC}|$. Označimo duljine kružnih lukova $\overset{\frown}{AB}$ i $\overset{\frown}{BC}$ redom a i b, tj. $|\overset{\frown}{AB}|=a$ i $|\overset{\frown}{BC}|=b$ (u stopama). Kako je r radijus kruga, onda opseg tamno sivog isječka možemo zapisati kao $2r + a$, a opseg svijetlo sivog kao $2r + b$.



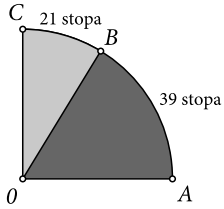
Opseg tamno sivog lika za 18 je stopa veći od opsega svijetlo sivog lika pa vrijedi:

$r \quad r \quad a$ / $r \quad r \quad b \quad 18$ odnosno a / $b \quad 18$.

Kako je $|\overset{\frown}{AB}|+|\overset{\frown}{BC}|=|\overset{\frown}{AC}|$ četvrtina duljine kružnice, tj. 60 stopa, vrijedi

$a \quad 18 \quad b$ / 60 odnosno $b \quad b$ / 42, što znači da je b / 21.

Dobili smo da je $b = 21$, pa je duljina luka $\overset{\frown}{BC}$ 21 stopa. Onda je $a = 39$, odnosno duljina luka $\overset{\frown}{AB}$ je 29 stopa.



Uočimo da upravo duljina luka u stopama određuje udio svakog od isječaka u ukupnoj površini isječka OAC. Duljina luka $\overset{\frown}{AC}$ je 60 stopa, što znači da u površini isječka OAC tamno sivi isječak ima udio $\frac{39}{60}$, a svijetlo sivi $\frac{21}{60}$

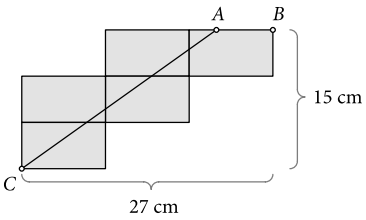
No kružni isječak OAC je četvrtina kruga pa mu je površina 72 : 4 = 18 m². Zato je površina tamno sivog isječka $\frac{39}{60}$ od 18 m², a površina svijetlo sivog $\frac{21}{60}$ od 18 m². Kako je $\frac{1}{60}$ od 18 = 18 : 60 = 3 : 10 = 0.3, površina svijetlo sivog isječka je $\frac{21}{60}$ od 18 = $21 \cdot 0.3 = 6.3$ m².

Analiza riješenosti:

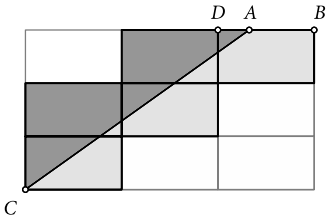
kategorija	ukupno natjecatelja	0 bodova	parcijalni bodovi		9 bodova	10 bodova
			1 - 4	5 - 8		
5. razred - B	29	2	12	7	5	3

3. primjer: 2. kolo HMOK 2022. - 4. i 5. razred (kategorije A i B)

Pet jednakih pravokutnika raspoređeno je tako da tvore lik duljine 27 cm i širine 15 cm, kao što je prikazano na slici. Unutar dobivenog lika nacrtana je dužina $\overline{AC}$ koja taj lik dijeli na dva dijela jednakih površina. Odredite duljinu dužine $\overline{AB}$.



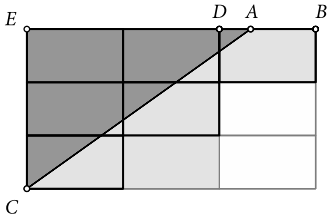
Napomena: U A kategoriji umjesto *sukladnih* pravokutnika bilo je zadano *jednakih* pravokutnika.



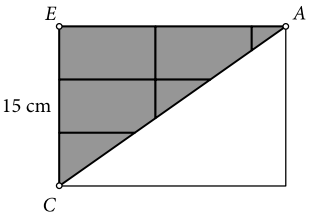
Rješenje: Smjestimo zadani lik u pravokutnu mrežu. Dimenzije svakog od pravokutnika su $27 : 3 = 9$ cm i $15 : 3 = 5$ cm pa je površina jednog pravokutnika $9 \cdot 5 = 45$ cm^2. Lik se sastoji od pet takvih pravokutnika pa mu je površina $5 \cdot 45 = 225$ cm^2.

Dužina $\overline{AC}$ dijeli zadani lik na dva dijela jednakih površina. Istaknimo jedan dio tamno sivo, a drugi svijetlo sivo.

Kako su svi pravokutnici u mreži iste površine, dodajmo tamno sivom dijelu i svijetlo sivom dijelu po jedan pravokutnik kao na slici. Površina novog lika je $225 + 2 \cdot 45 = 315$ cm^2. I dalje vrijedi da su novi tamno sivi i novi svijetlo sivi dio iste površine, a ona iznosi $315 : 2 = 157.5$ cm^2.



Promotrimo trokut CAE. Taj je trokut polovina pravokutnika širine 15 cm. Površina tog pravokutnika je 315 cm^2.



Vrijedi: $15 \cdot |EA| = 315$ pa je $|EA| = 21$ cm.

No kako je $|EB| = 27$ cm i $|EA| + |AB| = |EB|$, onda je $|AB| = 27 - 21 = 6$ cm.

Analiza riješenosti:

kategorija	ukupno natjecatelja	0 bodova	parcijalni bodovi		10 bodova
			1 - 4	5 - 9	
4. razred - A	26	6	18	1	1
5. razred - B	25	0	22	3	1

4. primjer: 2. kolo HMOK 2024. - 5. i 6. razred (kategorije B i C)

U nizu od deset prirodnih brojeva treći i svaki sljedeći član niza jednak je zbroju dvaju prethodnih članova, a sedmi je član niza 184.

B – Dokažite da je u svakom takvom nizu zbroj prvih deset članova isti, te odredite taj zbroj.

C – Koliko ima takvih nizova? Za svaki od njih napišite prva dva člana i odredite zbroj svih deset članova niza.

Rješenje: Označimo članove traženog niza s $F_1, F_2, ..., F_{10}$. Ako su prva dva člana niza *a* i *b*, sve ostale članove niza prema uvjetu zadatka možemo zapisati pomoću *a* i *b,*

$$F_1 = a$$
$$F_2 = b$$
$$F_3 = a + b$$
$$F_4 = a + 2b$$
$$F_5 = 2a + 3b$$
$$F_6 = 3a + 5b$$
$$F_7 = 5a + 8b$$
$$F_8 = 8a + 13b$$
$$F_9 = 13a + 21b$$
$$F_{10} = 21a + 34b.$$

Označimo njihov zbroj sa *Z*.

$$Z = a + b + a + b + a + 2b + 2a + 3b + 3a + 5b + 5a + 8b + 8a + 13b + 13a + 21b + 21a + 34b$$

$$Z = 55a + 88b = 11 \cdot (5a + 8b).$$

No sedmi član niza je 184, tj. $F_7 = 5a + 8b = 184$, pa vrijedi:

$Z = 55a + 88b = 11 \cdot (5a + 8b) = 11 \cdot 184 = 2024$, odnosno zbroj prvih deset članova takvog niza je 2024.

Napomena:

Učenici C kategorije trebali su, osim zbroja prvih deset članova takvog niza, odrediti koliko ima takvih nizova te za svaki takav niz zapisati prva dva člana.

Kako su članovi niza prirodni brojevi, odredimo sve $a, b \in \mathbb{N}$ za koje vrijedi $5a + 8b = 184$.

Uočimo da su u zbroju $5a + 8b = 184$ pribrojnik $8b$ i zbroj 184 djeljivi s 8, pa i pribrojnik $5a$ mora biti djeljiv s 8. No, $D(5, 8) = 1$, pa a mora biti djeljiv s 8. Dakle, najmanji mogući a je 8.

Nadalje, kako su a i b prirodni brojevi, $5a$ mora biti manje od 184. Kako je $184 : 5 = 36.8$, najveći mogući a je 32 (najveći višekratnik broja 8 koji je manji od 36.8).

a	$b = (184 - 5a) : 8$
8	18
16	13
24	8
32	3

Zaključujemo da postoji četiri takva niza:

1. niz je 8, 18, 26, 44...

2. niz je 16, 13, 29, 42...

3. niz je 24, 8, 32, 40...

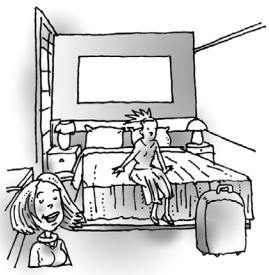
4. niz je 32, 3, 35, 38...

Analiza riješenosti:

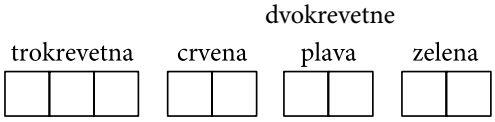
kategorija	ukupno natjecatelja	0 bodova	parcijalni bodovi		10 bodova
			1 - 4	5 - 9	
5. razred - B	33	15	10	5	3
6. razred - C	25	4	3	9	9

5. primjer: 2. kolo HMOK 2025. - 4., 5. i 6. zadatak (kategorije A, B i C)

Devet djevojčica sudjeluje na matematičkom kampu. Trebaju se smjestiti u sobe, a na raspolaganju su im jedna trokrevetna soba i tri dvokrevetne sobe – crvena, plava i zelena. Među djevojčicama su dva para sestara: sestre Božić i sestre Lovrić. Na koliko se načina djevojčice mogu rasporediti po sobama tako da sestre ne budu u različitim sobama? Bitno je samo tko je u kojoj sobi, a ne i raspored unutar soba.



Rješenje: Ponuđena mjesta u sobama prikazat ćemo ovako:

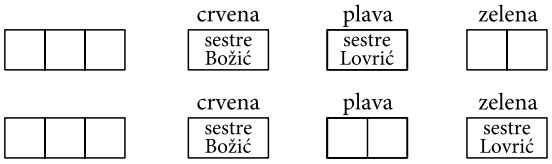


Uočimo da broj rasporeda ovisi o tome je li u trokrevetnoj sobi jedan par sestara ili ne.

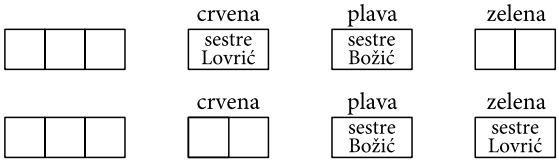
1. slučaj: oba para sestara smještena su u dvokrevetnim sobama

Prikažimo moguće rasporede grafički u ovisnosti o odabiru sobe za npr. sestre Božić.

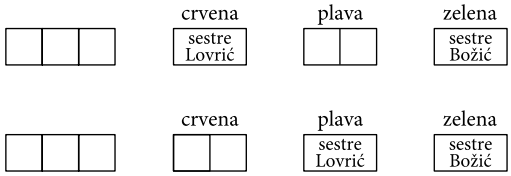
Ako sestre Božić smjestimo u crvenu sobu, za sestre Lovrić imamo dvije mogućnosti:



Ako sestre Božić smjestimo u plavu sobu, za sestre Lovrić imamo dvije mogućnosti:



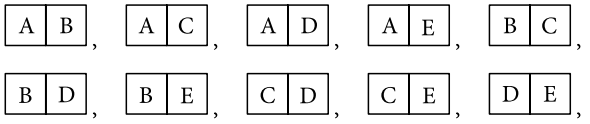
Ako sestre Božić smjestimo u zelenu sobu, za sestre Lovrić imamo dvije mogućnosti:



Isti raspored dobili bismo da smo najprije birali sobu za sestre Lovrić, pa zaključujemo da ima ukupno 6 mogućih načina za takav raspored.

Do tog zaključka mogli smo doći i bez crtanja svih mogućnosti. Uočimo da dvokrevetnu sobu za sestre Božić možemo odabrati na tri moguća načina, a za svaki taj odabir dvokrevetnu sobu za sestre Lovrić možemo odabrati na dva načina, stoga postoji ukupno 6 različitih načina za odabir dvokrevetnih soba za oba para sestara.

Označimo preostalih pet djevojčica s A, B, C, D i E. Za svaki od rasporeda sestara preostala je jedna dvokrevetna soba u koju trebamo rasporediti dvije od preostalih pet djevojčica. To možemo napraviti na deset različitih načina:



Do tog zaključka mogli smo doći i bez crtanja svih mogućnosti. Prvu djevojčicu u preostalu dvokrevetnu sobu možemo odabrati na 5 različitih načina, a drugu na 4. No, kako nije važan njihov raspored unutar sobe, ukupan broj različitih načina je $(5 \cdot 4) : 2 = 10$.

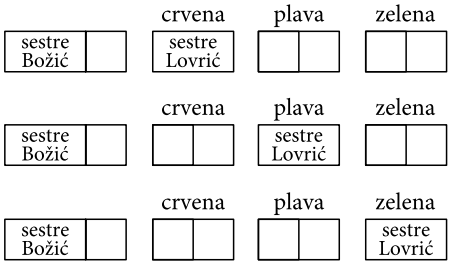
Preostale tri djevojčice raspoređene su u trokrevetnu sobu i njihov raspored u sobi nije važan pa to možemo napraviti na samo jedan način.

Konačno, u prvom slučaju (oba para sestara smještena su u dvokrevetnim sobama) ukupan broj rasporeda je $6 \cdot 10 = 60$.

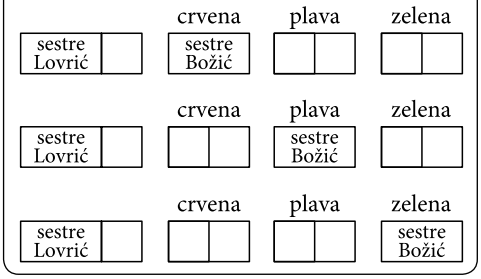
2. slučaj: jedan par sestara smješten je u trokrevetnoj sobi

Prikažimo grafički moguće rasporede dva para sestara tako da je jedan par u trokrevetnoj sobi.

Ako su u trokrevetnoj sobi sestre Božić, imamo tri različita rasporeda.



Ako su u trokrevetnoj sobi sestre Lovrić, također imamo tri različita rasporeda.



Ukupno imamo 6 različitih rasporeda dva para sestara tako da je jedan par u trokrevetnoj sobi.

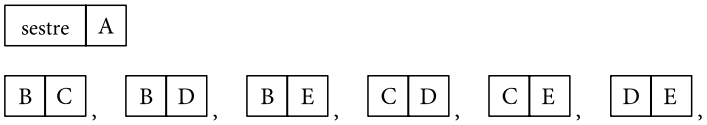
Bez grafičkog prikaza do tog zaključka mogli smo doći i na ovaj način: Par sestara koje ćemo smjestiti u trokrevetnu sobu možemo odabrati na dva načina, a dvokrevetnu sobu za drugi par možemo odabrati na tri načina pa imamo $2 \cdot 3 = 6$ *različita načina.*

Preostaje rasporediti ostalih pet djevojčica.

Za svaku od šest navedenih mogućnosti biramo jednu djevojčicu koja će biti u trokrevetnoj sobi sa sestrama, što možemo napraviti na pet različitih načina.



Za svaki od tih pet rasporeda preostale djevojčice treba rasporediti u dvije slobodne dvokrevetne sobe. Prikažimo sve mogućnosti za jedan od njih, npr. za prvi. Dvije djevojčice koje ćemo smjestiti u prvu slobodnu dvokrevetnu sobu možemo odabrati na šest načina:



Preostale dvije djevojčice smještene su u drugu slobodnu sobu.

Za svaki od 6 različitih rasporeda dva para sestara tako da je jedan par u trokrevetnoj sobi, ostalih pet djevojčica možemo rasporediti na $5 \cdot 6 = 30$

različitih načina, pa je konačno, u drugom slučaju (jedan par sestara smješten je u trokrevetnoj sobi), ukupan broj rasporeda $6 \cdot 30 = 180$.

Do zaključka smo mogli doći i na ovaj način: Za svaki od 6 različitih načina rasporeda dva para sestara tako da je jedan par u trokrevetnoj sobi, jednu djevojčicu koja će biti sa sestrama u trokrevetnoj sobi biramo na 5 različitih načina. Preostale četiri djevojčice smještamo u dvije prazne dvokrevetne sobe. U jednu od te dvije sobe prvu djevojčicu biramo na 4 načina, a drugu na 3 načina. No raspored djevojčica u sobi nije bitan pa imamo $(4 \cdot 3) : 2 = 6$ *različitih načina. Preostale dvije djevojčice smještene su u drugu slobodnu sobu. Konačno, u drugom slučaju imamo ukupno* $6 \cdot 5 \cdot 6 = 180$ *različitih načina.*

Ukupan broj rasporeda je $60 + 180 = 240$.

Analiza riješenosti:

kategorija	ukupno natjecatelja	0 bodova	parcijalni bodovi		10 bodova
			1 - 4	5 - 9	
4. razred - A	27	5	13	6	3
5. razred - B	30	1	16	9	4
6. razred - C	32	1	10	13	8

Natjecanje HMOK omogućuje učenicima 4. razreda i natjecanje nakon županijske razine, a za veliki broj učenika 5. i 6. razreda koji se nisu plasirali na državnu razinu mogućnost daljnjeg natjecanja. Zadatci u prvom kolu jednostavniji su, no ovih pet primjera i načini njihova rješavanja ukazuju na specifičnost zadataka koji se rješavaju u drugom kolu natjecanja HMOK. Odabrani primjeri ukazuju na visoku razinu složenosti zadatka kod kojih se u rješavanju očekuje povezivanje različitih koncepata te matematička komunikacija koja podrazumijeva argumentiranja svih zaključaka koji se navode u rješenju. U 7. i 8. razredu najuspješniji natjecatelji Državnog natjecanja pozivaju se na HJMO (Hrvatska juniorska matematička olimpijada), a upravo je HMOK natjecanje koje omogućuje učenicima i prije 7. razreda da se upoznaju s nekim metodama rješavanja zadataka koji se očekuju na olimpijskim razinama. Natjecanje HMOK prilika je svim učenicima koji vole matematiku i sudjeluju u matematičkim natjecanjima da razvijaju svoj matematički potencijal i da u budućnosti budu konkurentni na najvišim razinama natjecanja u Hrvatskoj, kao i na međunarodnim natjecanjima. Svi zadatci s dosad provedenih natjecanja nalaze se na web stranici Matematička natjecanja/HMOK/Arhiva, stoga pozivamo učenike i njihove mentore da se okušaju u rješavanju ovakvih zadataka te da se prijave i sudjeluju u natjecanju HMOK.

Literatura:

1. Mrežna stranica Hrvatskoga matematičkog društva – Matematička natjecanja https://natjecanja.math.hr/hmok/