JEDNA ALGEBARSKA NEJEDNAKOST I NJEZINA PRIMJENA

Dragoljub Milošević, Gornji Milanovac
Alija Muminagić, Frederiksberg, Danska

U matematici je često potrebno dokazati razne tvrdnje, a na temelju njih matematičari otkrivaju i dokazuju nova svojstva. U ovom je tekstu riječ je o sljedećoj nejednakosti za pozitivne realne brojeve a, b, c, x, y i z:

$$(*) \qquad \frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\geq\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}.$$

Dokaz: Iz $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}-\frac{(a+b)^2}{x+y}=\frac{a^2y(x+y)+b^2x(x+y)-xy(a^2+2ab+b^2)}{xy(x+y)}=$

$$=\frac{a^2xy+a^2y^2+b^2x^2+b^2xy-a^2xy-2abxy-b^2xy}{xy(x+y)}$$

$$=\frac{a^2y^2-2abxy+b^2x^2}{xy(x+y)}=\frac{(ay-bx)^2}{xy(x+y)}\geq 0$$

izravno dobivamo

$$(1) \qquad \frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\geq\frac{(a+b)^2}{x+y}.$$

Ako lijevoj i desnoj strani nejednakosti (1) dodamo po $\frac{c^2}{z}$, imamo

$$(2) \qquad \frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\geq\frac{(a+b)^2}{x+y}+\frac{c^2}{z}.$$

Primjenom nejednakosti (1) na desnu stranu nejednakosti (2) dobivamo

$$(3) \qquad \frac{(a+b)^2}{x+y}+\frac{c^2}{z}\geq\frac{((a+b)+c)^2}{(x+y)+z}.$$

Iz nejednakosti (2) i (3) slijedi tražena nejednakost (*).

Navodimo neke primjere primjene dokazane nejednakosti.

***Primjer* 1.** Dokažimo Nesbittovu[1] nejednakost za pozitivne brojeve a, b, c:

$$(4) \qquad \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}.$$

[1]Alfred Mortimer Nesbitt (1854. – 1926.), engleski matematičar

Dokaz: Ako u nejednakost (*) stavimo $x = a(b+c)$, $y = b(c+a)$ i $z = c(a+b)$, dobivamo

$$\frac{a^2}{a(b+c)}+\frac{b^2}{b(c+a)}+\frac{c^2}{(a+b)}\geq\frac{(a+b+c)^2}{a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)},\ \text{tj.}$$

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}. \tag{5}$$

S obzirom na to da je točna nejednakost $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geq 0$ ekvivalentna s nejednakošću $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$, odnosno s $2(ab+bc+ca)+a^2+b^2+c^2\geq 3(ab+bc+ca)$, odnosno s nejednakošću $(a+b+c)^2\geq 3(ab+bc+ca)$, iz nejednakosti (5) slijedi tražena nejednakost (4).

Primjer 2. Za pozitivne brojeve a, b, c vrijedi $\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}\geq\frac{1}{2}(a+b+c)$.

Dokaz. Željenu nejednakost dobivamo ako u nejednakost (*) stavimo $x=a+b$, $y=b+c$ i $z=c+a$.

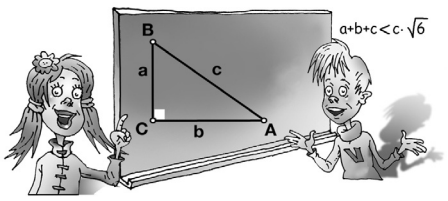
Primjer 3. Dokažimo da vrijedi nejednakost

$$\frac{a^3}{b+c}+\frac{b^3}{c+a}+\frac{c^3}{a+b}\geq\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2). \tag{6}$$

Dokaz. Ako u nejednakost (*) uvrstimo redom a^2, b^2 i c^2 umjesto a, b i c te $x=a(b+c)$, $y=b(c+a)$, $z=c(a+b)$, dobit ćemo

$$\frac{a^4}{a(b+c)}+\frac{b^4}{b(c+a)}+\frac{c^4}{c(a+b)}\geq\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)},\ \text{odnosno}$$

$$\frac{a^3}{b+c}+\frac{b^3}{c+a}+\frac{c^3}{a+b}\geq\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{2(ab+bc+ca)}. \tag{7}$$



Kako je $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$ (vidi primjer 1!), iz nejednakosti (7) slijedi nejednakost (6).

Primjer 4. Neka je o duljina opsega i c duljina hipotenuze pravokutnog trokuta ABC. Dokažimo da je $o<c\sqrt{6}$.

Dokaz. Neka su a i b duljine kateta pravokutnog trokuta ABC. Ako u nejednakost (*) uvrstimo $x=y=z=1$, onda je $\frac{a^2}{1}+\frac{b^2}{1}+\frac{c^2}{1}\geq\frac{(a+b+c)^2}{1+1+1}$, odakle, zbog $a+b+c=o$ i $a^2+b^2=c^2$ (Pitagorin poučak), slijedi $2c^2\geq\frac{1}{3}o^2$ ili $o^2\leq 6c^2$. Odatle je $o<c\sqrt{6}$ (ne može biti jednakost).