STEREOMETRIJA U KONKATEDRALI

Tomislav Pejković, Zagreb

U zagrebačkoj grkokatoličkoj crkvi svetih Ćirila i Metoda možemo razabrati različite matematičke ideje. U ovome članku proučit ćemo nekoliko zadataka vezanih uz volumene i udaljenosti u prostoru. Ti su problemi inspirirani onim što pronalazimo u navedenoj crkvi, ali smo situaciju redovito idealizirali, pojednostavnili i dijelom poopćili. Takve modifikacije donekle smanjuju realističnost naših modela, ali nam i omogućuju primjenu osnovnih geometrijskih formula i teorema.

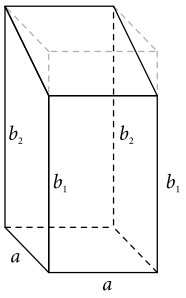
Volumeni predmeta i šupljina

Tetrapod ili *analoj* četveronožni je stolić s nakošenom gornjom plohom na koju se polaže ikona, tj. slika nekog blagdana ili svetca.



Slika 1. – Tetrapod iza kojega je ambon

Tetrapod u grkokatoličkoj konkatedrali možemo promatrati kao kvadar s kvadratnom bazom kojemu je odozgo odrezan jedan dio, vidi Sliku 2.

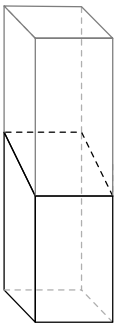


Slika 2.

Volumen tetrapoda lako dobijemo tako da od volumena kvadra oduzmemo volumen uspravne trostrane prizme kojoj je baza pravokutni trokut s katetama duljine a i $b_2 - b_1$ te visina na tu bazu duljine a. Dakle, traženi je volumen

$$a^2 b_2 - \frac{1}{2} a\left(b_2 - b_1\right) a = a^2 \cdot \frac{b_1 + b_2}{2}.$$

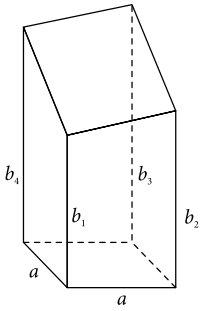
Ovaj smo rezultat mogli dobiti brže tako da uzmemo još jedan takav tetrapod, okrenemo ga naopako i položimo na prvo tijelo kao na Slici 3.



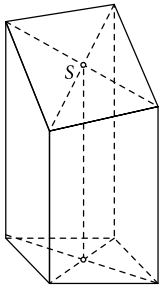
Slika 3.

U uniji ovih dvaju tijela dobivamo kvadar s bridovima duljina a, a i $b_1 + b_2$, a traženi volumen jednak je polovini volumena toga kvadra.

Zamislimo sada nepravilni tetrapod na Slici 4. kojemu su bočni bridovi i dalje okomiti na bazu, ali imaju različite duljine b_1, b_2, b_3 i b_4. Tražimo da gornja ploha i dalje pripada jednoj ravnini tako da se na nju može položiti ikona. Koliki je volumen takvog tijela?



Slika 4.



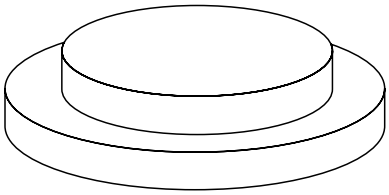
Slika 5.

Presiječemo li dvije paralelne ravnine nekom trećom ravninom, dobit ćemo par paralelnih pravaca. Zato su na gornjoj strani promatranog tijela nasuprotni bridovi paralelni, pa je ta strana paralelogram.

Označimo sjecište dijagonala tog paralelograma sa S. U paralelogramu se dijagonale raspolavljaju, pa gledajući srednjicu trapeza s osnovicama b_1 i b_3 i srednjicu trapeza s osnovicama b_2 i b_4 (Slika 5.) dobivamo da je $\frac{b_1+b_3}{2}=\frac{b_2+b_4}{2}$. Sada primijenimo isti trik kao maloprije. Dano tijelo zajedno sa slikom toga tijela po centralnoj simetriji s obzirom na točku S čini jedan kvadar s bazom površine a^2 i bočnim bridom duljine $b_1 + b_3 = b_2 + b_4$. Stoga je volumen nepravilnog tetrapoda jednak $\frac{1}{2}a^2\left(b_1+b_3\right)$.

Iza tetrapoda nalazi se *ambon* (Slika 1.). Ovdje su to dvije stube kružnog tlocrta. Mjerenjem smo dobili da je svaka od stuba visine 15 cm, promjer gornjega kruga je 159 cm, a gazište, tj. dubina donje stube 33 cm, pri čemu je

istureni dio gazišta stuba zanemaren. Odredimo najprije ukupni volumen ambona. Računamo ga kao zbroj volumena dvaju valjaka (Slika 6.).



Slika 6.

Volumen valjka jednak je umnošku visine, kvadrata promjera baze i konstante $\frac{\pi}{4}$. Dobivamo

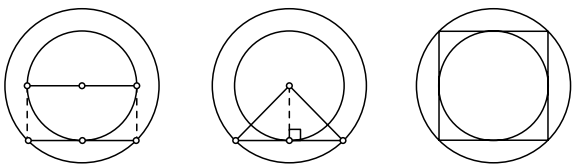
$$15 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \left(159^2 + \left(159 + 2 \cdot 33\right)^2\right) \approx 894\ 246.5\ \text{cm}^3.$$

Koliko najviše stuba možemo dodati na ambon zadržavajući isti nagib stubišta? Koji je omjer volumena nadodanih stuba i volumena postojećeg ambona?

Sljedeća je stuba valjak širine 159 – 2 · 33 = 93 cm, a ona na njoj širine je 93 – 2 · 33 = 27 cm. Stoga možemo dodati još najviše dvije stube i omjer volumena novih stuba i starog ambona je $\frac{15 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \left(93^2 + 27^2\right)}{15 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \left(225^2 + 159^2\right)} \approx 0.124$.

Primijetimo da nam za odgovore na zadnja dva pitanja uopće nije bila potrebna točna visina stuba, bilo je dovoljno znati da su sve stube iste visine.

Prilikom mjerenja navedenih dimenzija ambona zamijetili smo jednu zanimljivu činjenicu. Položimo li razvučenu traku metra na donju stubu i privučemo je skroz do čela iduće stube, izmjerena širina gotovo je potpuno jednaka promjeru gornjeg kruga. Drugim riječima, pogledamo li ambon odozgo kao na Slici 7. lijevo, u većoj kružnici tetiva koja ujedno dodiruje manju kružnicu ima istu duljinu kao promjer te manje kružnice.

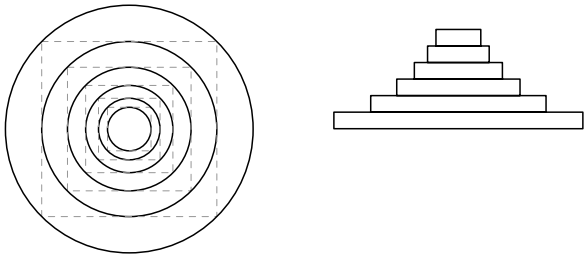


Slika 7.

Odmah dobivamo da je trokut istaknut u sredini Slike 7. pravokutan, odnosno kvadrat upisan velikoj kružnici opisan je maloj kružnici kako vidimo na

desnom dijelu iste slike. Možemo to provjeriti i numerički. Omjer promjera je $\frac{225}{159} = 1.41509...$, što je vrlo blizu $\sqrt{2} = 1.41421...$, tj. omjeru duljina dijagonale i stranice kvadrata.

Ovo otkriće daje nam ideju kako na drugi način možemo nadograditi ambon. Zadržavajući jednaku visinu stuba, svaku iduću upišemo u kvadrat upisan zadnjoj konstruiranoj stubi. Tlocrt i nacrt dviju starih i prvih četiriju novih stuba prikazan je na Slici 8.

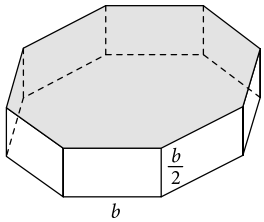


Slika 8.

Promjer n-te nove stube za $n = 1, 2, 3, ...$ je $\frac{159}{\left(\sqrt{2}\right)^n}$, a njihov je ukupni volumen $15 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 159^2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ...\right) = 15 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 159^2$ cm^3, tj. jednak je volumenu gornje stube postojećeg ambona. Ovdje smo iskoristili da je $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + ... = 1$, što odmah slijedi iz činjenice da za svaki prirodan broj n vrijedi $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$. Dakle, za izgradnju ovakvog stubišta u nebo (ili kule babilonske?) prepreka nam sigurno nije utrošak materijala.

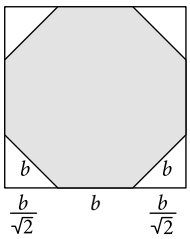
U blizini ambona nailazimo na stalak za svijeće prikazan na Slici 9. lijevo.





Slika 9.

Posuda s pijeskom u koji se zatiču svijeće uspravna je osmerostrana prizma visine $\frac{b}{2}$. Duljina jedne stranice pravilne osmerokutne baze je b, vidi Sliku 9. desno. Koliko pijeska može stati u tu posudu ako je napunimo ravno do vrha?



Slika 10.

Površinu pravilnog osmerokuta izračunat ćemo tako da ga smjestimo u kvadrat kao na Slici 10.

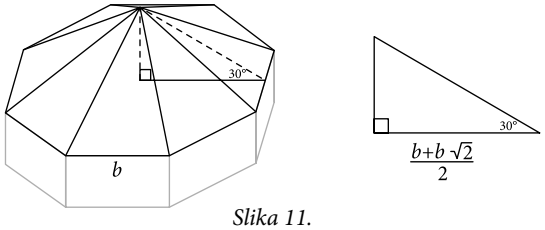
Dakle, površina osmerokuta je

$$\left(\frac{b}{\sqrt{2}}+b+\frac{b}{\sqrt{2}}\right)^2-4\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right)^2=b^2\left(1+\sqrt{2}\right)^2-b^2=2\left(1+\sqrt{2}\right)b^2.$$

Volumen posude je površina baze pomnožena visinom, tj. $\left(1+\sqrt{2}\right)b^3$.

Što ako pijesak smijemo usuti i iznad razine ruba posude, ali tako da nagib površine pijeska prema horizontalnoj ravnini ne bude veći od 30° jer će u protivnome doći do osipanja pijeska koji će ispadati iz posude?

U tom slučaju dobivenom volumenu treba još pribrojiti volumen uspravne osmerostrane piramide kojoj je baza promatrani osmerokut, a kut između bočne strane i baze je 30°. Situacija je prikazana na Slici 11. na kojoj smo dodatno naznačili i izdvojili pravokutni trokut pomoću kojega određujemo visinu piramide.



Slika 11.

Jedna kateta u naznačenom pravokutnom trokutu jednaka je polovici stranice kvadrata sa Slike 10. Budući da je taj pravokutni trokut polovica jednakostraničnog trokuta, odmah dobivamo da je druga njegova kateta duljine $\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{b+b\sqrt{2}}{2}$. Stoga je traženi volumen osmerostrane piramide jednak $\frac{1}{3}\cdot 2\left(1+\sqrt{2}\right)b^2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{b+b\sqrt{2}}{2}=\frac{3+2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}b^3$.

U sljedećem ćemo broju nastaviti s proučavanjem stereometrijskih zanimljivosti u konkatedrali.