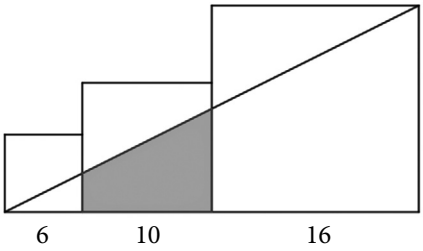


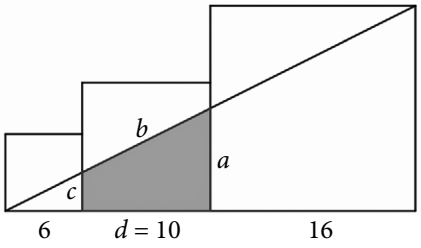
TROKUT, ČETVEROKUT I KRUG

Zlatko Lobor, Zagreb

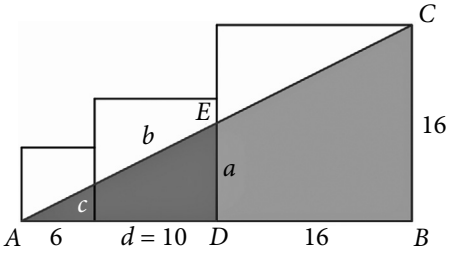
Primjer 1. Izračunajmo površinu osjenčanoga trapeza.



Rješenje: Površinu osjenčanog trapeza može se izračunati ako se izračunaju duljine osnovica, tj. duljine paralelnih stranica. Na slici su njihove duljine označene s a i c. Duljine krakova trapeza označene su s b i d. Kako je trapez pravokutan (ima dva prava kuta), duljina visine jednaka mu je duljini kraka d.

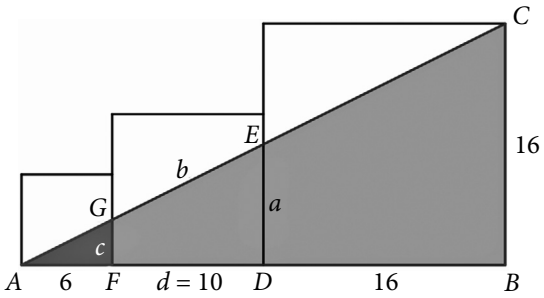


Osnovica a izračuna se pomoću sličnosti trokuta. Uočimo slične pravokutne trokute ABC i ADE kojima su odgovarajući šiljasti kutovi jednake veličine.



Za te trokute vrijedi $\frac{|DE|}{|BC|} = \frac{|AD|}{|AB|}$, tj. $\frac{a}{16} = \frac{16}{32}$, iz čega slijedi da je $a = 8$.

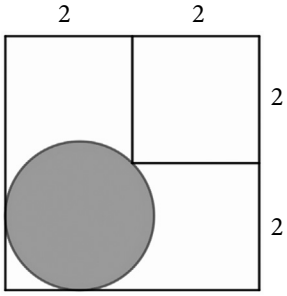
Na sličan način odredimo i duljinu osnovice c. Uočimo također slične pravokutne trokute ABC i AFG.



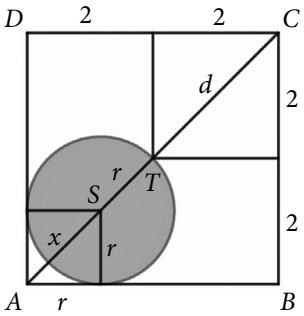
Za te trokute vrijedi $\frac{|FG|}{|BC|}=\frac{|AF|}{|AB|}$, tj. $\frac{c}{16}=\frac{6}{32}$, iz čega slijedi da je $c = 3$.

Kako je d ujedno i visina trapeza, vrijedi da je $P=\frac{(a+c)\cdot d}{2}=\frac{(8+3)\cdot 10}{2}=55$.

Primjer 2. Izračunajmo radijus kruga.



Rješenje: Dopunimo sliku na sljedeći način.



Primijetimo da je dijagonala $\overline{AC}$ kvadrata $ABCD$ točkama S i T podijeljena na tri dijela.

Dužina $\overline{TC}$ dijagonala je manjeg kvadrata i njezina je duljina $|TC| = d = 2\sqrt{2}$.

Dužina $\overline{ST}$ radijus je kruga pa je $|ST| = r$.

Dužina $\overline{AS}$ dijagonala je najmanjega kvadrata sa stranicom duljine r. Stoga vrijedi da je $|AS| = x = r\sqrt{2}$.

Cijela dijagonala $\overline{AC}$ kvadrata $ABCD$ sa stranicom duljine 4 ima duljinu $|AC| = 4\sqrt{2}$.

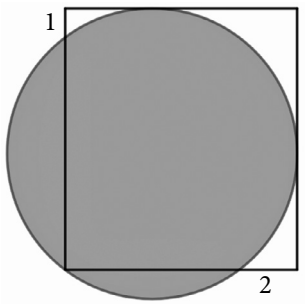
Dakle, vrijedi da je $|AC| = |AS| + |ST| + |TC| = r\sqrt{2} + r + 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$.

Rješavanjem ove jednadžbe dobiva se radijus kruga.

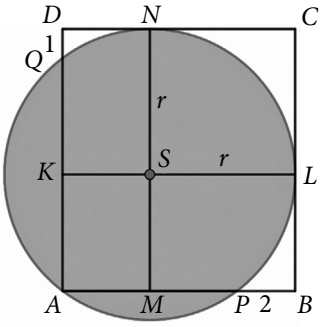
$r\left(\sqrt{2}+1\right) = 2\sqrt{2} \quad / : \left(\sqrt{2}+1\right)$

$r = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} \approx 1.17$.

Primjer 3. Izračunajmo površinu kruga.

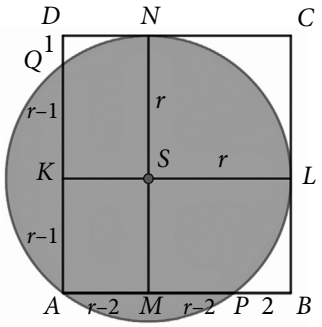


Rješenje: Dopunimo sliku na sljedeći način, pri čemu su dužine $\overline{KL}$ i $\overline{MN}$ međusobno okomite i paralelne stranicama pravokutnika $ABCD$. One se sijeku u središtu kruga S.

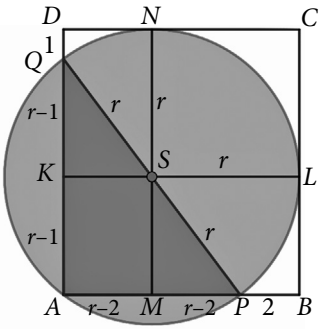


Pravac MN simetrala je tetive $\overline{AP}$ pa je $|AM| = |MP| = r - 2$.

Isto tako je i pravac KL simetrala tetive $\overline{AQ}$ pa je $|AK| = |KQ| = r - 1$. Te su duljine prikazane na sljedećoj slici.



Promotrimo pravokutni trokut APQ. Njemu je zadana kružnica opisana jer prolazi kroz sva tri vrha trokuta. To znači da je središte kružnice S ujedno polovište hipotenuze $\overline{PQ}$ trokuta APQ.



Dakle, $\overline{PQ}$ je promjer kruga, tj. $|PQ| = 2r$.

Katete trokuta APQ imaju duljine $|AP| = 2(r-2)$ i $|AQ| = 2(r-1)$.

Prema Pitagorinu poučku vrijedi $|AP|^2 + |AQ|^2 = |PQ|^2$.

Slijedi:

$$4(r-2)^2 + 4(r-1)^2 = 4r^2 \quad / : 4$$

$$(r-2)^2 + (r-1)^2 = r^2$$

$$r^2 - 4r + 4 + r^2 - 2r + 1 = r^2$$

$$r^2 - 6r + 5 = 0$$

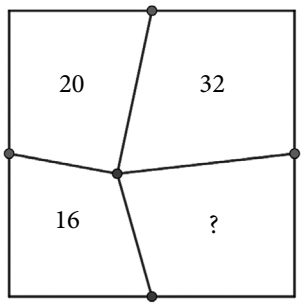
$$r^2 - 5r - r + 5 = 0$$

$$r(r-5) - (r-5) = 0$$

$$(r-5)(r-1) = 0$$

Da bi lijeva strana bila jednaka 0, mora biti $r = 5$ ili $r = 1$. Međutim, prema uvjetima zadatka mora biti $r > 2$. Dakle, $r = 5$, pa je površina kruga jednaka $P = 5^2\pi = 25\pi$.

Zadatak 1. Točka unutar kvadrata spojena je s polovištima stranica i tako dijeli kvadrat na četiri dijela. Ako su poznate površine tri dijela, kolika je površina četvrtog dijela?



Izvor:

1. https://www.youtube.com/@MathQueenSusanne
2. https://www.youtube.com/@PreMath