

MATEMAGIČAR

Petar Mladinić, Zagreb

NASLUĆIVANJE MLADIH MATEMAGIČARA

Ovdje ćemo navesti niz primjera i zadataka koje mladi matemagičari mogu pronaći na internetu. Ako u internetski pretraživač upišete, primjerice, *Harvard University Interview Math Tricks* ili *PreMath.com* ili pak *Daily IQ Test*, naći ćete niz ovakvih problema i zadataka.

Za naslućivanje rješenja ovakvih zadataka/problema bitna je činjenica povezivanje/uočavanje problema s uobičajenom školskom matematikom.

U ovom ćemo tekstu prezentirati dvije vrste problema i naslućivanja u:

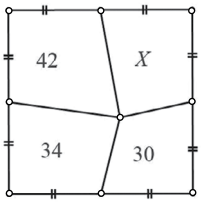
a) geometrijskim zadatcima,

b) numeričkim zadatcima.

Dakle, naslućivanje mladih matemagičara ključ je rješavanja.

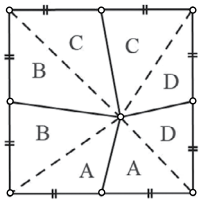
a) Naslućivanje u geometrijskim problemima

Trebamo se podsjetiti temeljnih geometrijskih činjenica, likova i poučaka i povezati ih sa zadanim problemom. Ako je naslućivanje uspješno, onda se rješavanje odvija bez poteškoća.



Primjer 1. Zadan je kvadrat podijeljen na 4 manja četverokuta (vidi sliku lijevo). Površine triju dijelova upisane su na slici. Kolika je površina četverokuta X?

Rješenje: Pokušajmo s naslućivanjem tako da se kvadrat podijeli na trokute. Triangulirajmo kvadrat, tj. podijelimo ga na trokute od vrhova kvadrata do točke unutar njega (vidi sliku desno).



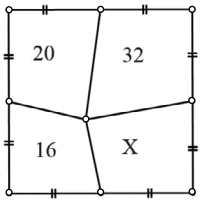
Trokuti označeni istim slovom A, B, C ili D sukladni su i imaju jednaku površinu.

Dakle, za površine četverokuta tada vrijedi:

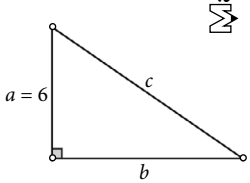
$$A + B = 34,\ B + C = 42;\ C + D = X \text{ i } D + A = 30.$$

Odavde je $B + C + D + A = 72$, odnosno $C + D = 72 - 34 = 38$, tj. $X = 38$.

Zadatak 1. Izračunajte površinu četverokuta X u kvadratu (vidi sliku).



Primjer 2. Mogu li se odrediti duljine katete i hipotenuze pravokutnog trokuta kojemu je zadana duljina samo jedne katete $a = 6$?



Rješenje: Naslućujemo da je u pozadini Pitagorin poučak. Nacrtajmo trokut i označimo mu duljine stranica kao na slici desno.

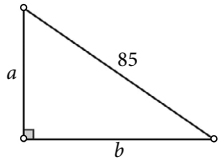
Primjenom Pitagorina poučka dobivamo $c^2 = 6^2 + b^2$, odnosno $(c - b)(c + b) = 36$.

Uočimo da broj 36 možemo napisati u obliku umnoška prirodnih brojeva na četiri načina:

1) $1 \cdot 36$, 2) $2 \cdot 18$, 3) $4 \cdot 9$ i 4) $6 \cdot 6$.

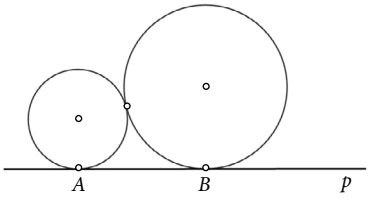
Jedino slučaj 2) daje sustav $c - b = 2$, $c + b = 18$ i rješenje $c = 10$, $b = 8$, $a = 6$.

Zadatak 2. Odredite površinu pravokutnog trokuta čiji je opseg $o = 182$ (vidi sliku).



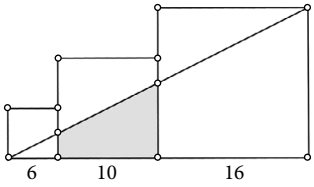
Rješenje: Površina trokuta jednaka je $P = 546$.

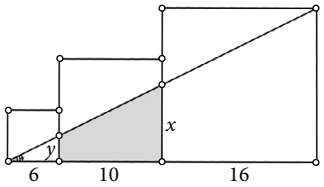
Zadatak 3. Odredite udaljenost dirališta A i B dviju kružnica s pravcem p (vidi sliku).



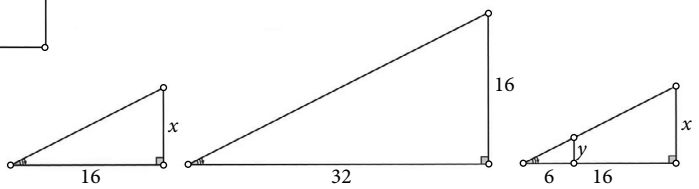
Rješenje: $|AB| = 2\sqrt{r \cdot R}$ gdje su r i R polumjeri zadanih kružnica.

Primjer 3. Zadana su tri kvadrata s duljinama stranica 6, 10 i 16 i dijagonala (vidi sliku). Izračunajte površinu sivo obojenog trapeza.





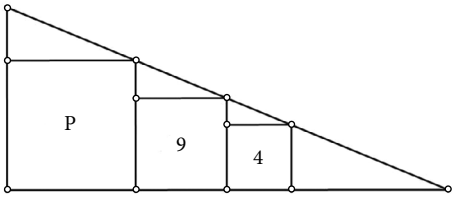
Rješenje: Iz slike možemo naslutiti da se možda radi o sličnim trokutima koje dijagonala definira. Izdvojimo 3 slična trokuta (vidi sliku dolje, uz oznake kao na slici lijevo gore).



Imamo $x : 16 = 16 : 32$, a odavde je $x = 8$. Također imamo $y : x = 6 : 16$, tj. $y : 8 = 6 : 16$, odnosno $y = 3$.

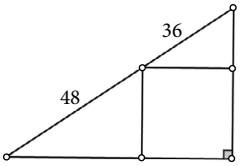
Površina trapeza može se izračunati iz površine većeg trokuta iz kojeg se oduzme površina manjeg trokuta, tj. $P = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 8 - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 = 55$.

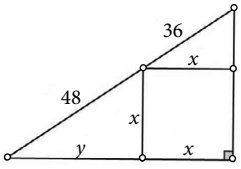
Zadatak 4. Odredite površinu kvadrata P ako su upisana tri kvadrata u pravokutnom trokutu (vidi sliku) od kojih jedan ima površinu jednaku 9, a drugi 4.



Rješenje: $P = x^2 = \frac{81}{4}$.

Zadatak 5. U pravokutnom trokutu upisan je kvadrat čiji vrh dijeli hipotenuzu na dva dijela duljina 36 i 48 (vidi sliku). Kolika je površina kvadrata?





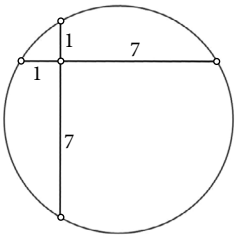
Rješenje: $P = x^2 = \frac{20\,736}{25}$

Uputa. Neka je stranica kvadrata duljine x (vidi sliku).

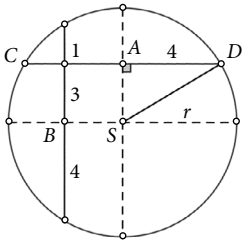
Vrijede sljedeće tvrdnje: $x^2 + y^2 = 48^2$, $36 : x = 48 : y$, $84 : (y + x) = 36 : x$.

Odavde je $y = \frac{4}{3}x$, odnosno $x^2 = \frac{20\,736}{25}$.

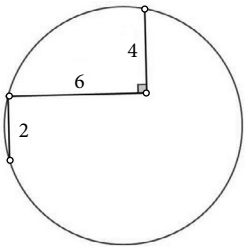
Primjer 4. U kružnici su zadane dvije međusobno okomite tetive (vidi sliku). Izračunajmo duljinu polumjera r.



Rješenje: Odredimo S središte kružnice. Simetrale tetiva iz A i B sijeku se u S. Označimo na slici točke S, A, B, C i D (vidi sliku).



Iz pravokutnog trokuta ASD dobivamo $|SD| = r = 5$.



Zadatak 6. Zadana je kružnica s dužinama duljina 6, 4 i 2 (vidi sliku). Izračunajte duljinu r polumjera kružnice.

Rješenje: $r = \sqrt{26}$

b) Naslućivanje u numeričkim problemima

U sljedećim tvrdnjama treba lijevu stranu nadopuniti tako da se iskoriste svi zadani brojevi i definira zakonitost koja daje sve tri vrijednosti desne strane i na taj način dati odgovor kolika je numerička vrijednost tvrdnje s upitnikom.

Treba ispitati je li to naslućivanje jedino točno ili se zadanim podatcima mogu definirati/naslutiti druge zakonitosti.

Primjer 5. Zadan je niz tvrdnji: $\begin{cases} 1+1=2 \\ 2+2=8 \\ 3+3=18 \\ 4+4=? \end{cases}$

Definirajmo zakonitost koja daje vrijednost desne strane, a onda odgovorite kolika je vrijednost upitnika.

Rješenje: Uočimo da zakonitost ovih tvrdnji možemo naslutiti kao (desno):

$$\begin{cases} 1\cdot 2\cdot 1=2 \\ 2\cdot 2\cdot 2=8 \\ 3\cdot 2\cdot 3=18 \\ 4\cdot 2\cdot 4=32 \end{cases}$$

Sve smo naznačene vrijednosti brojeva „ugradili" u zakonitost u kojoj smo oznaku „+" zamijenili s „· 2 ·". Dakle, ? = 32.

Zadatak 7. Zadane su tvrdnje koje treba nadopuniti tako da se dobije vrijednost desne strane:

$$\begin{cases} 1+3=20 \\ 1+4=30 \\ 1+5=42 \\ 1+2=? \end{cases}$$

Rješenje: Ovdje treba naslutiti uporabu zagrada i množenje sa sljedbenikom vrijednosti zagrade.

Početna je tvrdnja $(1 + 3) \cdot 5 = 20$, a posljednja $(1 + 2) \cdot 4 = 12$.

Primjer 6. Dane su sljedeće tvrdnje: $\begin{cases} 2\cdot 4=10 \\ 3\cdot 6=20 \\ 4\cdot 8=34 \\ 5\cdot 5=? \end{cases}$

Definirajmo zakonitost koja daje vrijednost desne strane, a onda odgovorite kolika je vrijednost upitnika.

Rješenje: Lako je naslutiti da se svakoj lijevoj strani treba pribrojiti broj „2" da se dobije vrijednost desne strane. Vrijedi $5 \cdot 5 = \ ? = 27$.

$\begin{cases} 3=6 \\ 4=12 \\ 5=20 \\ 8=? \end{cases}$

Zadatak 8. Dane su sljedeće tvrdnje iz kojih treba naslutiti i definirati zakonitost koja vrijedi u svima njima (lijevo):

Rješenje: Svaki je broj na lijevoj strani tvrdnje pomnožen svojim prethodnikom pa je $? = 8 \cdot 7 = 56$.

Zadatak 9. Dane su sljedeće tvrdnje iz kojih treba naslutiti i definirati zakonitost koja vrijedi u svima njima:

$$\begin{cases} 5=9 \\ 9=17 \\ 17=33 \\ 33=? \end{cases}$$

Rješenje: Vrijednost ? = 65.

Primjer 7. U ovom primjeru zadana je operacija dijeljenja. $\begin{cases} 40:5=24 \\ 30:5=18 \\ 20:5=12 \\ 10:5=? \end{cases}$

Odredimo vrijednost upitnika.

Rješenje: Zakonitost kojom se dobivaju vrijednosti desne strane je da se lijeva strana pomnoži s 3, tj. da primjerice vrijedi $40 : 5 \cdot 3 = 24$. U tom je slučaju ? = 6.

Primjer 8. Dana je sljedeća tablica:

4	8	20
9	3	15
6	6	?

Definirajmo zakonitost koja daje vrijednost upitnika.

Rješenje. Ako pokušamo zbrajati brojeve koji se nalaze u stupcima, tada dobivamo da se ti zbrojevi u prva dva stupca smanjuju za vrijednost 2, dok u trećem to nije moguće dobiti. Razmotrimo zbrojeve u prva dva reda tablice. Dobivamo

$$4 + 8 + 20 = 32,$$

$$9 + 3 + 15 = 27.$$

Ovi se zbrojevi razlikuju za vrijednost 5. Ako vrijedi zakonitost koju smo uočili, onda bi vrijednost trećeg reda trebala biti jednaka 22. U tom je slučaju vrijednost ? = 10 jer je $6 + 6 + 10 = 22$.

Drugo naslućivanje daje nam sljedeći račun. Prvi redak daje $(4 \cdot 8) - (4 + 8) = 32 - 12 = 20$, a drugi redak $(9 \cdot 3) - (9 + 3) = 27 - 12 = 15$.

Dakle, za takvo naslućivanje treći nam redak daje $(6 \cdot 6) - (6 + 6) = 36 - 12 = 24$.

U ovom smo primjeru uočili dvije različite zakonitosti za upitnik.

Zadatak 9. Dana je sljedeća tablica:

3	4	1
6	5	4
2	0	2
1	1	?

Definirajte zakonitost koja daje vrijednost upitnika.

Uputa. Razmotrite zbrojeve u stupcima. ? =1.

Zadatak 10. Dana je sljedeća tablica (desno):

43	13	10	8
	30	3	?
		27	1
			26

Definirajte zakonitost koja daje vrijednost upitnika.