200 godina neeuklidskih geometrija

Sanja Sruk[1]

Gdje smo bili, kamo idemo?

Stoljećima se matematika dijelila na „čistu" i „primijenjenu". Matematičari su često razvijali ideje i teorije radi ljepote matematike, ne razmišljajući o njihovoj praktičnoj primjeni, dok su fizičari, kemičari i inženjeri pronalazili načine kako iskoristiti nove matematičke spoznaje u rješavanju problema s kojima su se susretali. Iako je izgledalo da višedimenzionalna geometrija nikad neće naći svoju primjenu jer mi živimo u trodimenzionalnom svijetu, ona se primjenjuje u teoriji relativnosti i računalnoj grafici; teorija grupa nalazi svoju primjenu u kvantnoj mehanici i kristalografiji; kompleksni su brojevi važni ne samo u teoriji elektriciteta (izmjenična struja), nego i u kvantnoj teoriji, procesiranju signala, pa čak i određivanju profila krila zrakoplova, a kriptografija se temelji na modularnoj aritmetici. Danas matematika nije usko povezana samo s drugim prirodnim znanostima, nego i s društvenim, humanističkim, medicinskim...

Od stare Grčke do danas matematika se širila, nastajale su nove discipline koje su isprepletanjem s drugim matematičkim i nematematičkim disciplinama stvarale nove grane matematike. Nacionalno vijeće za znanost donijelo je 2009. godine *Pravilnik o znanstvenim i umjetničkim područjima, poljima i granama* (NN 118/09). Prema tom *Pravilniku*, znanost se dijeli na područja, područja na polja, a polja na grane. Polje matematike pripada području prirodnih znanosti zajedno s fizikom, geologijom, kemijom, biologijom i geofizikom. Kao grane (discipline) matematike navode se: algebra, geometrija i topologija, diskretna i kombinatorna matematika, matematička analiza, matematička logika i računarstvo, numerička matematika, primijenjena matematika i matematičko modeliranje, teorija vjerojatnosti i statistika, financijska i poslovna matematika te kao deseta grana ostale matematičke discipline. Međutim, prema klasifikaciji *Mathematical Subject Classification* (MSC) trenutno postoji 97 matematičkih disciplina (od kojih se svaka grana u poddiscipline) podijeljenih u pet kategorija:

1. Općenito (povijest matematike, matematička logika, teorija skupova...)
2. Diskretna matematika i algebra (kombinatorika, teorija brojeva, teorija matrica...)

[1]Sanja Sruk, I. gimnazija, Zagreb

3. Analiza (realne funkcije, funkcije kompleksne varijable, diferencijalne jednadžbe, funkcionalna analiza...)
4. Geometrija i topologija (diferencijalna geometrija, algebarska topologija...)
5. Primijenjena matematika (teorija vjerojatnosti, statistika, teorija igara, numerička analiza, računalne znanosti, kvantna teorija...)

Znanost se nezaustavljivo širi pa se možda već od trenutka kad je nastao ovaj članak do trenutka u kojem ga čitate broj matematičkih disciplina povećao.

Euklidov peti postulat

Prve grane matematike bile su geometrija, aritmetika i algebra. Geometrija je matematička disciplina koja je prva aksiomatizirana. Kao što joj ime kaže, nastala je zbog potreba mjerenja zemlje. Proučava prostor i oblike te prostorne odnose, a mnogi rezultati iz algebre i aritmetike pronađeni su upravo zahvaljujući geometrijskim metodama. Iz geometrije su se razvile nove geometrijske discipline: analitička, nacrtna, projektivna, diferencijalna, fraktalna, neeuklidska i mnoge druge geometrije, kao i topologija. Aksiomatizaciju geometrije učinio je Euklid u svojim *Elementima* prije gotovo dva i pol tisućljeća. *Elementi* započinju s 23 definicije, 5 postulata i 5 aksioma, i oni su osnova na kojoj je izgrađena cijela geometrija. Iako se u Euklidovu djelu može pronaći više nedostataka, matematičare je stoljećima zaokupljao 5. postulat. On je dosta zamršen i u izvornome obliku glasi: Ako pravac koji siječe dva druga pravca tvori s njima s iste strane unutarnje kutove čiji je zbroj manji od dva prava kuta, ta se dva pravca sastaju s one strane na kojoj je taj zbroj manji od dva prava kuta. Može se izreći i u ekvivalentnom, ali jednostavnijem obliku: Točkom izvan pravca može se povući točno jedan pravac paralelan s tim pravcem (*Playfairov aksiom*).

Među matematičarima je prevladavalo mišljenje da taj 5. postulat nije neovisan, nego se može izvesti kao teorem pomoću preostala četiri postulata, ali nikome nije pošlo za rukom to dokazati. Taj „problem petog postulata" ili „problem paralela" bio je naročito aktualan krajem 18. i početkom 19. stoljeća. Samo u 1786. godini objavljeno je sedam rasprava o tome problemu, a u razdoblju od 1813. do 1826. tridesetak samo na njemačkom i francuskom jeziku.

Što se dogodilo 23. veljače 1826. godine?

23. veljače 1826. godine na sjednici Fizičko-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Kazanju profesor toga fakulteta Nikolaj Ivanovič Lobačevski (1792. – 1856.) održao je predavanje *Kratko izlaganje osnova geometrije sa strogim dokazom teorema o paralelnim pravcima*, a u godinama koje slijede objavio je niz radova na tu temu. Nakon neuspjelog pokušaja dokazivanja zavisnosti petog postulata, promijenio je pristup. Odvojio je sve teoreme iz geometrije koji se ne dokazuju pomoću problematičnoga petog postulata (to je tzv. apsolutna geometrija), a zatim je kao polaznu točku nove

geometrije Euklidov peti postulat zamijenio novim, suprotnim: Postoje barem dva pravca u ravnini paralelna danom pravcu koja prolaze točkom izvan toga pravca. Tako je rođena neeuklidska geometrija. Ovo otkriće predstavljalo je prekretnicu ne samo u geometriji, nego i u cjelokupnom razvoju matematike. Stvorile su se nove koncepcije prostora i otvorile nove mogućnosti.

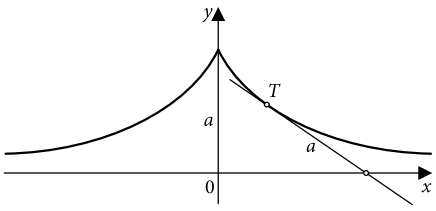


Slika 1. Nikolaj Ivanovič Lobačevski (1792. - 1856.)

Premda je Lobačevski prvi objavio svoje radove pa mu se stoga i pripisuje otkriće nove, hiperboličke geometrije koja je po njemu dobila ime *geometrija Lobačevskog*, do istog su otkrića istodobno došla još dva matematičara. Bili su to János Bolyai i Carl Friedrich Gauss. Da je Gauss otkrio neeuklidsku geometriju tridesetak godina prije Lobačevskog doznalo se iz korespondencije u kojoj je Farkas Bolyai, otac Jánosa Bolyaija i Gaussov prijatelj, slao radove svoga sina Gaussu pitajući ga za mišljenje. Pitanje je zašto Gauss nije objavio svoje radove. Neki smatraju da je bio uvjeren da većina ljudi to ne bi prihvatila s razumijevanjem i da nije imao hrabrosti suprotstaviti se metafizičkoj filozofiji svoga vremena i ondašnjem shvaćanju prostora i vremena, iako je svojim ugledom mogao postići da nove smione ideje budu prihvaćene i ubrzaju razvoj matematike i drugih znanosti. Drugi smatraju da razlog neobjavljivanja leži u Gaussovoj navici da se svojim radovima godinama vraća, ponovno ih razmatra i razrađuje pa tek onda objavljuje, a neeuklidska geometrija svakako je tema o kojoj je trebalo dugo razmišljati. Treći su mišljenja da Gauss nije objavio svoje radove jer je još nešto nedostajalo, a Gauss nije znao odgovor na to pitanje.

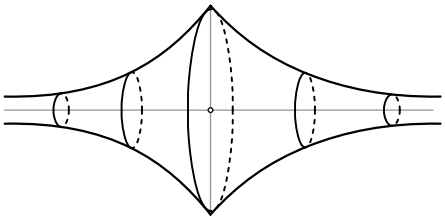
Što je nedostajalo?

Trebalo je još dokazati neproturječnost nove geometrije i taj je problem mučio Lobačevskog do kraja života, ali ga nije riješio. Prvi korak u tom dokazivanju napravio je talijanski matematičar Eugenio Beltrami proučavajući krivulju traktrisu.



Slika 2. Traktrisa - duljina dijela tangente od dirališta T do zadanoga pravca (npr. osi apscisa) je konstanta a.

Svojstvo traktrise je da je duljina odsječka tangente u bilo kojoj njezinoj točki od dirališta do sjecišta s jednim čvrstim pravcem (osi) konstantna (Slika 2.), a njenom rotacijom nastaje pseudosfera (Slika 3.), ploha na kojoj vrijedi hiperbolička geometrija. Beltramijev dokaz nije bio potpun, a upotpunio ga je njemački matematičar Felix Klein 1872. godine.



Slika 3. Rotacijom traktrise oko njezine asimptote dobiva se pseudosfera

Mogućnost konstrukcije bar jednog modela neke aksiomatike ujedno je i dokaz njene neproturječnosti, a to je uspjelo Kleinu na jednom euklidskom modelu hiperboličke ravnine. Osim toga, Klein je uočio mogućnost postojanja i drugih neeuklidskih geometrija, a Bernhard Riemann razvio je eliptičku i sfernu geometriju, što je upozorilo na mogućnost postojanja prostora različitih od tradicionalnoga i na temelju ideja Lobačevskog, Bolyaija i Gaussa otkrio plohe koje se nazivaju Riemannove mnogostrukosti.

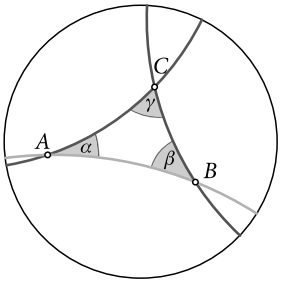
Aksiomi od kojih polazi neka teorija moraju biti međusobno nezavisni i neproturječni, a dokazivanje neproturječnosti neeuklidske geometrije odigralo je važnu ulogu u preispitivanju osnova same matematike te dalo stimulans razvoju mnogih matematičkih disciplina, a prvenstveno matematičke logike, ali i utjecalo na druge znanosti, primjerice na Einsteinovu teoriju relativnosti kojoj se već Lobačevski podosta približio. To dokazuju njegove riječi iz uvoda knjige *Nova načela geometrije*: „U prirodi mi ustvari spoznajemo samo gibanje, bez kojega su nemogući osjetni dojmovi. Svi dakle daljnji pojmovi, npr. geometrijski, proizvedeni su umjetno našim umom, jer se zasnivaju na svojstvima gibanja, pa zato prostor sam po sebi odijeljeno za nas ne postoji. Nakon toga u našoj misli ne može biti nikakvog proturječja kada pretpostavljamo da se neke sile u prirodi ravnaju prema jednoj, a druge prema svojoj vlastitoj geometriji." Svojom općom teorijom relativnosti Einstein je uspio pokazati da prostor realnog svijeta nije ni euklidski ni neeuklidski, nego je složena Riemannova mnogostrukost.

Razlike u geometrijama

Naziv neeuklidska geometrija dao je Gauss misleći pritom na hiperboličku geometriju Lobačevskog. Imena hiperboličkoj i eliptičkoj (u koju možemo svrstati i sfernu) geometriji dao je Klein, a danas postoji čitav niz neeuklidskih geometrija, čak i višedimenzionalne, iako se osnovnima i dalje smatraju hiperbolička i eliptička.

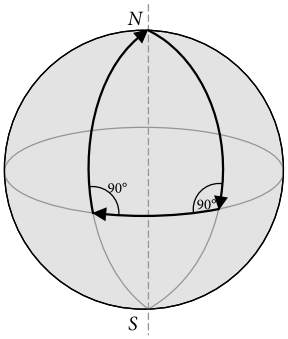
Neka od svojstava *hiperboličke* geometrije su:

- postoji beskonačno mnogo pravaca u ravnini koji prolaze zadanom točkom izvan nekog pravca i paralelni su s tim pravcem
- ne postoje slični nesukladni trokuti jer je trokut određen svojim kutovima
- zbroj kutova u trokutu manji je od 180° (razlika do 180° naziva se defektom toga trokuta).



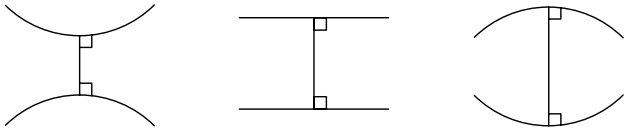
Slika 4. Hiperbolički trokut

Osnovne značajke *sferne*, odnosno *eliptičke* geometrije su da se svaka dva pravca u ravnini sijeku (nema paralelnih pravaca), a zbroj kutova u trokutu veći je od 180° (razlika se naziva ekscesom toga trokuta). Najzorniji model sferne trigonometrije predstavlja Zemlja. Pogledamo li trokut kojemu su stranice ekvator i dva meridijana, vidimo da taj trokut ima dva prava kuta. Odabirom 0. i 90. meridijana dobivamo trokut s tri prava kuta.



Slika 5. Sferni trokut s tri prava kuta

Lako možemo primijetiti da je euklidska geometrija prijelaz, odnosno granica između hiperboličke i eliptičke geometrije.



Slika 6. Usporedni prikaz ortogonalnosti u hiperboličkoj, euklidskoj i eliptičkoj geometriji

Geometrija Lobačevskog nije ostavila trag samo u znanosti. Promijenila je i filozofska shvaćanja svijeta, a utjecala je i na umjetnost (jedan od mnogobrojnih primjera je roman *Braća Karamazovi* F. M. Dostojevskog u kojemu glavni lik Ivan diskutira o neeuklidskoj geometriji). Za znanost je ovo otkriće predstavljalo pravu revoluciju, zbog čega je engleski matematičar William Kingdon Clifford Lobačevskog nazvao *Kopernikom geometrije.*

Literatura:

1. Bilinski, S., Utjecaj otkrića neeuklidske geometrije na suvremeni razvoj nauke, Matematičko-fizički list br. 1/197 (str. 7-10), Zagreb, 1999.
2. Kurnik, Z.,175 godina od otkrića neeuklidske geometrije, Matematika i škola br.8 (str. 129-133), Zagreb, 2001.
3. Bell, E.T., Veliki matematičari, Znanje, Zagreb, 1972.
4. Non-Euclidean geometry, https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Non-Euclidean_geometry/
5. Bogdanić, N., Matematičke discipline, MFL 4/128, 2006.-2007. (str. 226-232), Zagreb
6. Pravilnik o znanstvenim i umjetničkim poljima i granama, http://www.rektorski-zbor.hr/fileadmin/rektorat/O_Sveucilistu/Tijela_sluzbe/Rektorski_zbor/dokumenti/Pravilnik_o_znanstvenim_i_umjetnickim_podrucjima_poljima_i_granama.pdf
7. AMS MathSciNet https://mathscinet.ams.org/msc/msc2010.html
8. Mathematics Subject Classification (Wikipedia) https://en.wikipedia.org/wiki/Mathematics_Subject_Classification