Gravitacija i neeuklidske geometrije

Ivica Smolić[1]

Sažetak. Gravitacijsko polje zaslužno je za pad jabuka s grana, međusobno kruženje nebeskih tijela i kolaps materije u crne rupe. Tradicionalni opis gravitacije dao je Isaac Newton u 17. stoljeću, vektorima sila koje su pripisane svakom komadiću materije i čiji iznos opada s kvadratom udaljenosti među komadićima materije u interakciji. Albert Einstein na početku 20. stoljeća donosi revolucionarnu, paradigmatsku promjenu u kojoj je gravitacija opisana geometrijskim jezikom mnogostrukosti i algebarskim jezikom tenzora. Ovdje ćemo se kratko osvrnuti na povijesni razvoj ideja u geometriji i gravitacijskoj fizici, njihovo objedinjenje u općoj teoriji relativnosti i najznačajnije rezultate teorijske gravitacijske fizike u proteklom stoljeću.

1. Odnos matematike i teorijske fizike

Matematika i teorijska fizika dvije su bliske znanstvene discipline. Apstraktne matematičke strukture i pripadni alati čine same temelje teorijske fizike, ali i nizu matematičkih grana izvore možemo pronaći upravo u pokušajima razumijevanja prirodnih pojava u fokusu fizike. Granice među disciplinama postaju još maglovitije ako uspoređujemo primijenjenu matematiku i matematičku fiziku, koje dijele matematičku rigoroznost definicija, iskaza i dokaza, te motivaciju temeljnih pitanja na koje žele odgovoriti.

Pitanje koliko je matematika uistinu efikasna u prirodnim znanostima, te možemo li aludiranu učinkovitost nekako racionalno razložiti, redovito je u periodičnim diskusijama. Fizičar Eugen P. Wigner se u eseju [Wig60] iz 1960. godine osvrnuo na fenomen u kojem matematički koncepti imaju primjenjivost u daleko širem kontekstu od onog u kojem su izvorno uvedeni. Pored čisto matematičkih primjera, poput kompleksnih brojeva koji otvaraju veliko područje kompleksne analize, Wigner u teorijskoj fizici izdvaja upotrebu čunjosječnica u klasičnoj mehanici i operatora u kvantnoj fizici (oba su pojma u matematici uvedeni znatno prije navedenih fizikalnih upotreba). Zaključno, autor ove opservacije prekriva velom misterija (citiram, *enormous usefulness of mathematics in the natural sciences is something bordering on the mysterious*) i tvrdi kako za njih „nema racionalnog objašnjenja". Međutim, kako je to već u više navrata istaknuto u kasnijim kritičkim osvrtima [GG08, Lüt11], Wigner

[1]Ivica Smolić, Fizički odsjek, Prirodoslovno-matematički fakultet, Sveučilište u Zagrebu

zaboravlja na obilje primjera u geometriji, analizi i linearnoj algebri, koji ukazuju na to da se grane matematike kojima je teorijska fizika protkana ne razvijaju izolirano, apstraktno, vođene puritanskim principima „formalne ljepote", već u čestoj interakciji s pitanjima i intuicijom koja dolazi izvan njihove usko ocrtane domene. Iz ove perspektive „nerazumna učinkovitost" prestaje biti toliko misteriozna. Osim toga, ne smijemo smetnuti s uma praktično zanemarivu upotrebu velikog dijela teorije skupova i teorije brojeva u fizici, kao kontrapunkt Wignerovoj euforičnoj perspektivi. Naivan pogled na kompatibilnost matematike i fizike podsjeća na parabolu Douglasa Adamsa (objavljenoj postumno u zbirci priča *The Salmon of Doubt*) o lokvi koja se jednog dana probudi zadivljena fascinantnim svijetom oko nje, u kojem rupa u kojoj ona leži savršeno odgovara njenom obliku.

2. Kratka povijest neeuklidske geometrije i gravitacijske fizike

Dva milenija euklidska je geometrija bila shvaćena kao formalno apstrahiranje jedine, istinske geometrije svemira. Pukotine u ovoj slici svijeta pojavile su se tijekom 19. stoljeća s otkrićem neeuklidskih geometrija i diferencijalne geometrije, a temeljiti konceptualni preokret nastupa tijekom kritičnog desetljeća relativističke fizike na početku 20. stoljeća.

2.1 Od Euklida do Riemanna

Euklidovi Elementi, napisani oko 300. godine pr. n. e. u formi 13 knjiga, najstariji su poznati sustavni, aksiomatički i deduktivni spis u matematici. Nažalost, izvorni tekst *Elemenata* nije sačuvan (najstariji kompletan primjerak potječe iz 9. stoljeća [Ins25]) pa nije moguće potpuno pouzdano razvrstati doprinose Euklidovih prethodnika, izvorna otkrića samog Euklida i naknadne dodatke u kasnijim prijepisima djela. U prvoj knjizi susrećemo pet postulata (aksioma) koje Euklid postavlja kao temelj planimetrije. Posebnu pažnju privlači peti postulat:

Ako pravac siječe dva pravca i čini s njima s iste strane unutrašnje kutove koji su zajedno manji od dva prava, ta se dva pravca sijeku na strani tih kutova.

Taj se postulat doima „manje elementarnim", stoga ne čudi što se tijekom stoljeća pojavio niz pokušaja izvođenja ovog postulata iz preostala četiri, uvijek uz prešutno oslanjanje na pretpostavke ekvivalentne tvrdnji koju se želi pokazati (vidi 15. poglavlje u [Lüt22]). Znakovit iskorak čini Giovanni Girolamo Saccheri u djelu *Euclides ab omni naevo vindicatus* objavljenom 1733. godine. U bezuspješnoj potrazi za kontradikcijom u negaciji petog postulata, Saccheri razotkriva dijelove onog što će kasnije postati neeuklidska geometrija.

Stoljeće kasnije nekoliko matematičara dolazi do uvida kako bi peti postulat uistinu mogao biti nezavisan, odakle se otvara mogućnost razvoja novih geometrija koje će imati osobine različite od kanonske, intuitivne euklidske geometrije.

Iz raznih korespondencija u obliku pisama znamo [Bon55] da je Carl Friedrich Gauss o ovom pitanju počeo razmišljati pred kraj 18. stoljeća, da bi negdje tijekom 1810-ih prevladao sumnje oko neovisnosti petog postulata. No, Gauss za života nikad nije objavio rad na temu neeuklidskih geometrija jer se, kako to navodi u pismu Friedrichu Wilhelmu Besselu 27. siječnja 1829. godine [Gau00], bojao „vike Beoćana" (u originalu „*das Geschrei der Boeoter*")[2]. Nešto kasnije, otprilike u slično vrijeme, dva matematičara izlažu studije neeuklidskih geometrija: Nikolaj Ivanovič Lobačevski u člancima objavljenima između 1829. i 1830. godine[3], te János Bolyai u *Appendix Scientiam Spatii Absolute Veram Exhibens,* dodatku udžbenika svoga oca Farkasa Bolyaia, objavljenom 1832. godine.

Modifikacije petog postulata za početak donose račvanje na dvije opcije: eliptičku i hiperboličku geometriju. U prvoj svi pravci koji prolaze kroz točku T koja ne leži na pravcu p sijeku pravac p, dok u drugoj postoji beskonačno mnogo pravaca kroz točku T koji ne sijeku pravac p. U nizu posljedica valja istaknuti da je u prvoj suma unutarnjih kutova u trokutu veća od dva prava kuta, dok je u drugoj manja od dva prava kuta. Model eliptičke geometrije imamo na *projektivnoj sferi* (sferi kojoj su antipodalne točke identificirane), gdje velike kružnice igraju ulogu pravaca. Eugenio Beltrami prvi je konstruirao model hiperboličke geometrije na *pseudosferi* (plohi koja nastaje rotacijom krivulje traktrise oko njezine osi), 1868. godine u članku *Saggio sulla interpretazione della geometria non euclidea*.

Ključna prekretnica u povijesti geometrije, s dalekosežnim posljedicama za matematiku i fiziku, dolazi u radu Bernharda Riemanna. Za stjecanje akademske titule tzv. privatnog docenta (njem. *Privatdozent*) na sveučilištu u Göttingenu, Riemann je pripremio habilitacijsku tezu (njem. *Habilitationsschrift*) na temu Fourierovih redova[4], predanu u prosincu 1853. godine, te habilitacijsko predavanje (njem. *Habilitationsvortrag*) pod naslovom *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*, održano 10. lipnja 1854. godine. U ovom predavanju Riemann proširuje pojam elementa duljine „ds" na prostore proizvoljne dimenzije te skicira poopćenje ranijih Gaussovih ideja intrinzične geometrije ploha i zakrivljenosti. Time su neeuklidske geometrije stavljene u daleko širi kontekst, a alati analize dovedeni u samo srce geometrije. Za razliku od habilitacijskog predavanja koje je prije svega bilo konceptualno, s tek pokojom formulom, u kasnijem eseju *Commentatio mathematica* iz 1861. godine[5] Riemann izlaže detalje među kojima se prvi put pojavljuje i tzv. Riemannov tenzor koji kvantificira zakrivljenost prostora [Dar15]. Bilo kakva detaljnija analiza evolucije svih ideja koje proizlaze iz Riemannovog pristupa geometriji odvela bi nas u nabujali

[2]Beoćani su stanovnici Beocije, povijesne pokrajine u Grčkoj između Korintskoga zaljeva i Eubejskoga kanala, a ovdje se koriste kao figurativna referenca na ograničene, neinteligentne ljude.
[3]Lobačevski je svoj rad usmeno izložio nešto ranije, u veljači 1826. godine (u literaturi se navode različiti, nekonzistentni datumi), u predavanju na Sveučilištu u Kazanju. Nažalost, tekst ovog izlaganja nije sačuvan.
[4]U analizi pitanja konvergencije Fourierovih redova Riemann je prvi put uveo pojam integrala koji je danas poznat kao Riemannov integral.
[5]Tekst habilitacijskog predavanja i esej *Commentatio mathematica* objavljeni su tek postumno, redom 1867. i 1876. godine.

panoramski pregled diferencijalne geometrije i njenih primjena, pa ćemo u nastavku teksta fokus zadržati samo na onim aspektima koji se dotiču gravitacijske fizike.

Pitanje možemo li empirijski testirati geometriju svemira kako bismo ustanovili je li ona euklidska ili neeuklidska otvorio je već Lobačevski uz prijedloge o astronomskim opažanjima koja bi nam mogla dati odgovor [Kra12]. Unatoč navodu na koji ponekad nailazimo u literaturi, o tomu kako je Gauss odstupanje od euklidske geometrije tražio u geodetskim mjerenjima u kojima je sudjelovao, danas znamo [Bre84] da ova priča nije točna: Gauss se oslanjao upravo na *euklidsku* geometriju kada je zbrojem unutarnjih kutova u trokutu testirao točnost premjeravanja. Sporadične spekulacije o neeuklidskoj geometriji svemira tijekom 19. stoljeća nisu urodile plodom [Kra12], prije svega jer dostupni opažački podatci nisu davali nikakve naznake odstupanja od euklidske geometrije, pa su neeuklidske geometrije i dalje predstavljale samo apstraktnu, akademsku konstrukciju. Ova će se slika drastično promijeniti na početku 20. stoljeća.

2.2 Od Newtona do Einsteina

Tradicionalna ideja o potpunoj odvojenosti zakona koji upravljaju „ovozemaljskim" i „nebeskim" prirodnim pojavama tijekom srednjeg vijeka postupno je zamjenjivala ideja univerzalnih fizikalnih zakona. Njihovo formalno objedinjavanje, koristeći matematički jezik diferencijalnog i integralnog računa, donio je Isaac Newton u epohalnom djelu *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, prvi put objavljenom 1687. godine. S jedne strane tu su tri Newtonova zakona koji definiraju općenitu kinematiku tijela na koje djeluju vanjske sile, a s druge konkretan univerzalan model gravitacijske interakcije među masivnim tijelima. Newton polazi od pretpostavke da je gravitacijska sila između dva komadića materije proporcionalna s produktom njihovih masa, a obratno proporcionalna s kvadratom njihove međusobne udaljenosti. Revolucija se sastoji u tome što sada isti fizikalni zakoni mogu kvantitativno objasniti pad jabuke sa stabla, kao i gibanje Mjeseca oko Zemlje. Jedan od trijumfa Newtonove teorije bila je teorijska reprodukcija tri empirijski utvrđena Keplerova zakona gibanja planeta u Sunčevu sustavu: (1) planeti se gibaju po elipsama, a Sunce se nalazi u jednom od fokusa elipse, (2) dužina Sunce – planet u jednakim vremenskim intervalima prebrisuje jednake površine, te (3) omjer kvadrata ophodnih vremena i kubova velikih poluosi elipse je konstanta. Ove zaključke možemo dobiti egzaktno u jednostavnom sustavu dvije točkaste mase, ali u složenijem planetarnom sustavu poput Sunčeva, zbog međudjelovanja više tijela, eliptične su putanje planeta deformirane i u najnižem redu popravke imamo precesiju elipsa, odnosno polaganu rotaciju njihovih osi. Razvojem perturbativnog računa te izoštravanjem i akumulacijom astronomskih opažanja u 18. i 19. stoljeću bile su omogućene minuciozne provjere Newtonove teorije gravitacije[6]. Kao što to obično biva u znanosti, tračak nove revolucije krio se u

[6]Na primjer, C. F. Gauss je 1801. godine uspješno predvidio položaj ranije opaženog asteroida Ceresa, a J. C. Adams i neovisno U. Le Verrier su u periodu između 1845. i 1846. godine, na osnovi smetnji u putanji planeta Urana, točno predvidjeli položaj do tada neviđenog planeta Neptuna.

finim detaljima: precesija putanje Merkura je, pored doprinosa gravitacijskog utjecaja ostalih planeta, sadržavala dodatnu sićušnu rotaciju u iznosu od otprilike 43 lučne sekunde[7] u stoljeću. U nizu bezuspješnih pokušaja objašnjenja unutar Newtonove teorije gravitacije našli su se i oni o postojanju novog planeta Vulkana između Merkura i Sunca (koji nikada nije bio opažen). Međutim, konačno objašnjenje moralo je pričekati jednu sasvim novu sliku gravitacijskog polja.

Paralelno s renesansom nebeske mehanike, tijekom prve polovice 19. stoljeća ubrzano se razvijala teorija jednog drugog fizikalnog polja, elektromagnetskog [Dar00]. Kulminacija je dosegnuta u radovima fizičara Jamesa Clerka Maxwella koji je postavio temelje klasičnog elektromagnetizma. Maxwell je u radu *On Physical Lines of Forces*, objavljenom u 4 dijela tijekom 1861. i 1862. godine, kompletirao sustav četiri linearne parcijalne diferencijalne jednadžbe, danas poznate kao Maxwellove jednadžbe, koje povezuju dva vektorska polja, električno i magnetsko, s gustoćama izvora, električnih naboja i struja. U kasnijem radu *A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field*, objavljenom 1865. godine, Maxwell je pokazao da električno i magnetsko polje u vakuumu (odnosno u odsustvu izvora) moraju zadovoljavati valnu jednadžbu, s brzinom propagiranja koja je jednaka brzini svjetlosti c. Drugim riječima, Maxwell je predvidio postojanje elektromagnetskih valova, koji su potvrđeni u pokusima Heinricha Rudolfa Hertza između 1886. i 1889. godine, te ukazao na to da svjetlost nije ništa drugo doli jedan primjer elektromagnetskog vala. Time je otvorena konceptualna tenzija jer su svi ranije poznati valovi, poput onih u fluidima ili krutinama, propagirali kroz neko materijalno sredstvo, dok su elektromagnetski valovi mogli putovati kroz naizgled prazan prostor. Stoga je predložena teorija tzv. *svjetlosnog etera*, hipotetičkog sveprisutnog fluida koji bi bio medij za elektromagnetske valove. Ipak, svi pokušaji direktne ili indirektne detekcije etera, poput interferencijskih pokusa Alberta A. Michelsona i Edwarda W. Morleyja iz 1887. godine, nisu urodili plodom.

Albert Einstein, do tada relativno nepoznat fizičar, privremeno zaposlen u patentnom uredu u Bernu, po prvi je put uzdrmao svijet fizike 1905. godine s četiri znanstvena rada. U prva dva objasnio je, redom, fotoelektrični efekt (izbijanje elektrona iz metala obasjanih svjetlošću) i nasumično gibanje čestica peluda u tekućini, koje je botaničar Robert Brown opazio još 1827. godine. U preostala dva rada, *Zur Elektrodynamik bewegter Körper* (u prijevodu, *O elektrodinamici tijela u gibanju*) i *Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig?* (u prijevodu *Ovisi li inercija tijela o njegovoj energiji?*), Einstein postavlja temelje specijalne teorije relativnosti, koja će radikalno promijeniti naše poimanje prostora i vremena. Za početak, on u potpunosti odustaje od teorije etera te prepoznaje da elektromagnetski valovi uistinu mogu putovati kroz vakuum. Stoga, ako više nemamo privilegiranih opažača (onih koji miruju u odnosu na eter), već su svi koji se međusobno gibaju konstantnim brzinama ravnopravni i „vide" isti oblik valne jednadžbe za električno i magnetsko

[7]Stupanj je definiran kao 1/360 punog kruga, a lučna sekunda kao 1/3600 stupnja.

polje, slijedi da elektromagnetski valovi imaju jednaku brzinu u odnosu na sve ove opažače! Nadalje, oslanjajući se na „misaone pokuse" (njem. *Gedankenexperimente*) Einstein izvodi nove, relativističke kinematičke zakone, koji odstupaju od dotadašnje intuicije. Na primjer, imamo li dva automobila koja putuju jedan drugome ususret brzinama u i v (u odnosu na cestu), prema predrelativističkoj Newtonovoj fizici svaki će od njih ovog drugog vidjeti kako mu se približava brzinom $u + v$. Egzaktan relativistički izraz za zbrajanje brzina je složeniji, $(u + v)/(1 + uv/c^2)$, i tek se u limesu kada su brzine male u odnosu na brzinu svjetlosti svodi na linearno zbrajanje. Posebno su intrigantne relativistička kontrakcija duljine (štap u gibanju ima kraću duljinu u odnosu na mirujući štap) i vremenska dilatacija (na gibajućim satovima vrijeme protječe sporije u odnosu na mirujuće). Valja naglasiti kako ovo nisu samo prividni, već stvarni, fizikalno mjerljivi učinci: na primjer, Hafele-Keatingovim eksperimentom 1971. godine s preciznim atomskim satovima u avionu zorno je dočarana stvarnost spomenute vremenske dilatacije. Konačno, Einstein uspostavlja vezu između energije tijela E, njegovog impulsa $\vec{p}$ i mase m u obliku relacije $E^2 = \left(c\vec{p}\right)^2 + \left(mc^2\right)^2$, koja se u slučaju mirujućeg tijela reducira na slavnu formulu $E = mc^2$.

Brzo nakon konceptualnog začetka specijalne teorije relativnosti, matematičar Hermann Minkowski je u izlaganjima *Das Relativitätsprinzip* 1907. i *Raum und Zeit* 1908. godine objasnio kako se ona može elegantno formulirati geometrijskim jezikom na prostoru $\mathbb{R}^4$. Ovdje su prostor i vrijeme objedinjeni jer imamo tri prostorne koordinate (x, y, z) i jednu vremensku koordinatu t. Umjesto da prostorne i vremenske udaljenosti izvodimo iz euklidske kvadratne forme (faktor brzine svjetlosti c kod vremenske koordinate ubačen je kako bi se koordinate ujednačile po fizikalnim jedinicama)

$$Q_E(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2 + (ct)^2, \tag{1}$$

Minkowski polazi od drugačije kvadratne forme,

$$Q_M(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2, \tag{2}$$

uz krucijalni minus, odakle prirodno reproducira sve ranije relativističke zaključke. Time je jasno pokazano kako specijalna teorija relativnosti predstavlja radikalan odmak od klasične, euklidske geometrije.

Einstein je već ovoj ranoj fazi bio svjestan činjenice da klasična, Newtonova teorija gravitacije, za razliku od Maxwellova opisa elektromagnetskog polja, ne poštuje principe specijalne teorije relativnosti. Stoga se nametnulo pitanje kako formulirati relativističku teoriju gravitacije na kojem će Einstein predano raditi sve do 1915. godine [GR15]. Kao ključna misao vodilja na ovom putu iskristalizirao se tzv. *princip ekvivalencije* koji povezuje jednoliko ubrzane sustave u odsustvu gravitacije sa sustavima u gravitacijskom polju. Na primjer, lokalni fizikalni pokusi ne mogu razlučiti nalazimo li se u liftu koji jednoliko ubrzava, negdje daleko od izvora gravitacijskog polja, ili je riječ o liftu koji miruje u gravitacijskom polju Zemlje. Kako će svjetlosna

zraka pri ulasku u prvi lift imati savijenu putanju u odnosu na sustav lifta, Einstein izvlači zaključak da se isti fenomen mora pojaviti i u drugom liftu, odnosno da su zrake svjetlosti općenito savijene u gravitacijskom polju. Tijekom 1912. i 1913. godine Einstein se upoznaje s Riemannovom geometrijom i tenzorskim računom uz pomoć prijatelja, matematičara Marcela Grossmanna, s kojim je objavio ranu verziju relativističke gravitacijske teorije u članku *Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie der Gravitation* iz 1913. godine. Finale ovog intenzivnog perioda četiri su Einsteinova priopćenja Pruskoj akademiji znanosti u Berlinu (njem. *Königlich Preußische Akademie der Wissenschaften zu Berlin*) u studenom 1915. godine. U trećem, naslovljenom *Erklärung der Perihelbewegung des Merkur aus der allgemeinen Realtivitätstheorie*, Einstein pomoću nove, relativističke teorije gravitacije, izvodi iznos precesije Merkurove putanje, suglasan s poznatim mjerenjima, koji je do tada „stršao" kao anomalija u kontekstu Newtonove teorije gravitacije. Konačnu formu opće teorije relativnosti Einstein je izložio 25. studenog 1915. godine i objavio u članku *Die Feldgleichungen der Gravitation* (u prijevodu, *Jednadžbe gravitacijskog polja*). U središtu opće teorije relativnosti nalazi se Einsteinova jednadžba gravitacijskog polja, o kojoj će nešto više riječi biti na kraju sljedećega poglavlja. U završnoj fazi oblikovanja nove teorije važnu ulogu odigrala je Einsteinova korespondencija s matematičarom Davidom Hilbertom (vidi diskusiju u [EG78]), koji je neovisno izveo jednadžbu za gravitacijsko polje varijacijskim postupkom, izložio[8] je pred Akademijom znanosti u Göttingenu (njem. *Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*) 20. studenog 1915. godine i objavio u članku *Die Grundlagen der Physik*.

3. Geometrija i gravitacija

Temelji gravitacijske fizike u općoj teoriji relativnosti izgrađeni su alatima topologije i diferencijalne geometrije. Ovdje ćemo ukratko skicirati nekoliko esencijalnih ideja, bilo kao grubi putokaz svima koji se prvi put upoznaju s ovom materijom ili kao brzi podsjetnik svima ostalima.

Jedan od ključnih pojmova matematičke analize je *okolina*, lajtmotiv niza formalnih „epsilon-delta definicija". Želimo li formalizam analize proširiti s euklidskih $\mathbb{R}^m$ na neke općenitije prostore, potrebno je prvo apstrahirati okolinu. Na skupu X definiramo *topologiju* odabirom podskupa partitivnog skupa $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$, takvog da su (1) prazan skup $\emptyset$ i cijeli skup X njegovi elementi, $\emptyset \in \mathcal{T}$ i $X \in \mathcal{T}$, (2) unija proizvoljnog broja elemenata skupa $\mathcal{T}$ opet element ovog skupa, te (3) presjek konačno mnogo elemenata skupa $\mathcal{T}$ opet element ovog skupa. Uređen par $(X, \mathcal{T})$ poznat je kao *topološki prostor*, a elementi skupa $\mathcal{T}$ kao *otvoreni skupovi*. Na svakom skupu X općenito možemo definirati mnoštvo različitih topologija, uključujući i „patološke primjere" poput tzv. trivijalne topologije $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ i tzv. diskretne topologije $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$. S druge

[8]Činjenica da je Hilbertovo izlaganje bilo pet dana prije Einsteinovog, povod je povremenih propitivanja prioriteta ovog teorijskog otkrića. Međutim, između Einsteina i Hilberta nikad nije postojao spor o tom pitanju, što je razvidno iz objavljenih tekstova i privatne korespondencije [Tod05].

strane, na skupu $\mathbb{R}^m$, na kojem je definirana euklidska udaljenost d_E među točkama i pripadne otvorene kugle $B(x,r)=\{y\in\mathbb{R}^m \mid d_E(x,y)<r\}$, možemo definirati tzv. *standardnu topologiju*

$$\mathcal{T}=\{O\subseteq\mathbb{R}^m \mid (\forall x\in O)(\exists r>0): B(x,r)\subseteq O\} \tag{3}.$$

Otvoreni skupovi iz standardne topologije upravo su okoline točaka kojima se služimo u uobičajenoj analizi na skupu $\mathbb{R}^m$.

Posebno zanimljiva klasa topoloških prostora su *mnogostrukosti* (eng. *manifolds*), topološki prostori koji imaju lokalna svojstva poput euklidskih prostora $\mathbb{R}^m$ za neki fiksni cijeli broj $m\geq 0$ (za precizniju definiciju vidi [Lee03]). Broj *m* poznat je kao dimenzija mnogostrukosti, a umjesto nezgrapne fraze *m*-dimenzionalna mnogostrukost, obično se koristi skraćeni termin *m*-mnogostrukost. Na primjer, točka je 0-mnogostrukost, krivulja 1-mnogostrukost, ploha 2-mnogostrukost, itd. U svakoj točki *m*-mnogostrukosti *M* definiramo *tangencijalni vektor* kao matematički objekt sa smjerom i iznosom (ovdje na raspolaganju imamo mnoštvo ekvivalentnih definicija, bilo preko derivacija glatkih funkcija ili familija krivulja koje se dodiruju u promatranoj točki). Tangencijalni vektori u točki $p\in M$, zajedno s prirodnim definicijama zbrajanja vektora i množenja vektora skalarima (realnim brojevima), tvore vektorski prostor T_pM (nad poljem realnih brojeva), poznat kao *tangencijalni prostor*. Može se pokazati da je njegova dimenzija upravo jednaka dimenziji mnogostrukosti, $\dim(T_pM)=m$. Intuitivna slika tangencijalnog prostora su tangencijalni pravci na krivulju i tangencijalne ravnine na plohu, objekti koji daju „lokalnu linearizaciju" promatranog prostora.

Bilo da želimo analizirati samu geometriju mnogostrukosti ili nam je namjera mnogostrukost „naseliti" veličinama koji imaju fizikalno značenje, korisno je uvesti novu familiju matematičkih objekata, *tenzore*. Ovdje ćemo se ograničiti na tenzore koji su multilinearna preslikavanja $F: T_pM\times\cdots\times T_pM\to\mathbb{R}$. Drugim riječima, tenzor *F* kao argumente uzima određen broj tangencijalnih vektora i u svakom argumentu djeluje linearno, tako da je

$$F(...,\alpha X+\beta Y,...)=\alpha F(...,X,...)+\beta F(...,Y,...) \tag{4}$$

za sve realne brojeve $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ i sve tangencijalne vektore $X,Y\in T_pM$ (pri čemu sve ostale argumente tenzora *F* držimo fiksnima). Ako smo zadali tenzor u svakoj točki mnogostrukosti, tada govorimo o *tenzorskom polju*, iako se u žargonu obično opet koristi skraćen naziv „tenzor". Nadalje, za tenzor $F: T_pM\times T_pM\to\mathbb{R}$ kažemo da je *simetričan* ako vrijedi $F(X,Y)=F(Y,X)$ za sve tangencijalne vektore $X,Y\in T_pM$. Istaknutu ulogu u diferencijalnoj geometriji igra *metrika g*, simetričan nedegeneriran tenzor (ne postoji tangencijalni vektor $X\in T_pM$, takav da je $g(X,Y)=0$ za sve $Y\in T_pM$. Rezultati iz linearne algebre jamče nam postojanje baze $(E_1,...,E_m)$ tangencijalnog prostora T_pM u kojoj komponente metrike $g_{ij}=g(E_i,E_j)$ imaju tzv. ka-

nonsku formu, odnosno mogu se zapisati kao dijagonalna matrica čiji su dijagonalni elementi ± 1 (odsustvo nula posljedica je pretpostavke o nedegeneriranosti). Poredak dijagonalnih elemenata možemo mijenjati permutiranjem elemenata baze, pa je jedina relevantna informacija broj pozitivnih i broj negativnih elemenata na dijagonali. Obično pretpostavljamo da metrika ima istu kanonsku formu u svakoj točki mnogostrukosti. Među metrikama valja izdvojiti dvije posebne familije:

a) ako su svi dijagonalni elementi kanonske forme istog predznaka, odnosno ako je $g_{ij} = \mathrm{diag}(+1,...,+1)$ ili $g_{ij} = \mathrm{diag}(-1,...,-1)$, tada kažemo da je metrika *Riemannovog tipa*;

b) ako je točno jedan dijagonalni element kanonske forme suprotnog predznaka od ostalih, odnosno ako je $g_{ij} = \mathrm{diag}(-1,+1,...,+1)$ ili $g_{ij} = \mathrm{diag}(+1,-1,...,-1)$, tada kažemo da je *metrika Lorentzovog tipa*.

Ovdje ćemo fiksirati konvencije po kojoj su kanonske forme metrike Riemannovog i Lorentzovog tipa redom $g_{ij} = \mathrm{diag}(+1,...,+1)$ i $g_{ij} = \mathrm{diag}(-1,+1,...,+1)$. Metrika Riemannovog tipa zadovoljava svojstva skalarnog produkta na tangencijalnom prostoru T_pM. Drugim riječima, vrijedi $g(X,X) \geq 0$ za sve $X \in T_pM$, pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako je $X = 0$. S druge strane, kod metrike Lorentzovog tipa pojavljuje se zanimljiv, kvalitativno drugačiji fenomen: postoje tangencijalni vektori $X \neq 0$ za koje vrijedi $g(X,X) = 0$!

Jedan od centralnih pojmova diferencijalne geometrije je „zakrivljenost", koju možemo konceptualno razdvojiti u dvije nepovezane sorte. Ako nas zanima na koji je način mnogostrukost M smještena u neku drugu mnogostrukost N preslikavanjem $f : M \to N$, tada govorimo o *vanjskoj* zakrivljenosti koja je definirana svojstvima funkcije *f*. Na primjer, mi možemo odabrati preslikavanje $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ kojom 2-mnogostrukost $\mathbb{R}^2$ smještamo u $\mathbb{R}^3$ kao jednostavnu ravninu ili kao složenu savijenu plohu. S druge strane, moguće je definirati i *intrinzičnu* zakrivljenost, koja je neovisna o eventualnom izboru smještanja promatrane mnogostrukosti M u neku drugu, već ovisi samo o njenim „internim svojstvima". Ključna ideja je uvođenje *paralelnog transporta* tenzora duž zadanog vektorskog polja X, koje je zadano tzv. *kovarijantnom derivacijom* ∇_X u smjeru vektorskog polja X (kažemo da je tenzorsko polje F paralelno transportirano duž vektorskog polja X ako vrijedi $\nabla_X F = 0$ u svim točkama mnogostrukosti). Izbor kovarijantne derivacije nije jedinstven, ali ako je na mnogostrukosti zadana metrika *g*, taj izbor donekle sužava nametanje tzv. uvjeta metričke kompatibilnosti, $\nabla_X g = 0$ za sva tangencijalna vektorska polja X. Lokalnu internu zakrivljenost mnogostrukosti „detektiramo" analizom paralelnog transporta vektora u okolini promatrane točke i formalno „upisujemo" u specijalni *Riemannov tenzor*[9] te iz njega izvedeni *Einsteinov tenzor* $G : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$.

[9]Precizna definicija Riemannovog tenzora izgrađena je na pojmu komutatora $[\nabla_X, \nabla_Y] = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X$; za detalje vidi [dC92] i [O'N83].

Iznimno korisno oruđe u radu s tenzorima su koordinatni sustavi. Naime, po konstrukciji svaka točka $p \in M$ m-mnogostrukosti M ima okolinu O i *homeomorfizam* $\phi : O \to U \subseteq \mathbb{R}^m$, neprekidnu bijekciju ϕ čiji je inverz ϕ^{-1} također neprekidan, koja omogućuje da Kartezijev koordinatni sustav na $\mathbb{R}^m$ iskoristimo za lokalnu „koordinatizaciju" okoline O, tako je svaka točka u okolini O jedinstveno označena m-torkom realnih brojeva $(x^1,...,x^m)$. Nadalje, lokalni koordinatni sustav u svakoj točki $q \in O$ izdvaja poseban izbor baze $\left(E_1,...,E_m\right)$ tangencijalnog prostora T_qM, kojom možemo definirati tzv. komponente tenzora F preko $F_{ij...} = F\left(E_i, E_j, ...\right)$. Slično tako, svaki tangencijalni vektor $X \in T_qM$ možemo zapisati u obliku jedinstvenog rastava $X = \sum_i X^i E_i$, s komponentama X^i. Ako je zadana krivulja na mnogostrukosti M preko preslikavanja $\gamma : \langle a,b \rangle \to M$, njene točke u lokalnom koordinatnom sustavu možemo promatrati kao m-torku funkcija $\left(x^1(\lambda),...,x^m(\lambda)\right)$ s parametrom λ. Ova nam perspektiva omogućava da u svakoj točki krivulje $q = \gamma(\lambda_0)$ među vektorima u tangencijalnom prostoru T_qM izdvojimo upravo one kojima su komponente $X^i = C\dot{x}^i(\lambda_0)$, gdje je $C \neq 0$ neka realna konstanta, a točkica označava derivaciju po parametru λ. Za ovakve vektore kažemo da su tangencijalni na krivulju u promatranoj točki. Znatno složeniji primjer upotrebe koordinatnih sustava imamo kod komponenti G_{ij} Einsteinovog tenzora koje možemo zapisati preko komponenti metrike g_{kl}.

Einsteinova opća teorija relativnosti opisuje gravitaciju i ostala fizikalna polja jezikom diferencijalne geometrije. Prostorvrijeme (eng. *spacetime*) je 4-mnogostrukost na kojoj je zadana metrika Lorentzovog tipa. Najjednostavniji primjer je prostorvrijeme Minkowskog, koje se sastoji od 4-mnogostrukosti $\mathbb{R}^4$, na kojoj imamo tzv. metriku Minkowskog η koja u svim točkama u Kartezijevu koordinatnom sustavu ima komponente $\eta_{ij} = \mathrm{diag}(-1,+1,+1,+1)$. Broj dimenzija je upravo 4 jer želimo pripremiti arenu za tri prostorne i jednu vremensku koordinatu. U modernoj gravitacijskoj fizici običaj je koordinate numerirati od 0 do 3, pri čemu je „nulta koordinata" rezervirana za vremensku. Tangencijalni prostor T_pM u svakoj točki prostorvremena možemo razdvojiti na tri podskupa: tangencijalne vektore *prostornog tipa* (za koje vrijedi $g(X,X) > 0$), *vremenskog tipa* (za koje vrijedi $g(X,X) < 0$) i *svjetlosnog tipa* (za koje vrijedi $g(X,X) = 0$). Analogno tomu, za krivulje kažemo da su prostornog, vremenskog ili svjetlosnog tipa ovisno o tipu njihova tangencijalnog vektora. Komadići materije u prostorvremenu „iscrtavaju" krivulje poznate kao *svjetske linije* (eng. *worldlines*). Svjetske linije masivnih čestica su vremenskog tipa, a svjetske linije bezmasenih čestica (poput fotona) svjetlosnog tipa (do danas nije opažena materija čije bi čestice imale svjetske linije prostornog tipa).

U općoj teoriji relativnosti gravitacija više nije njutnovska sila, već upravo sama metrika g. Informacije o energiji i impulsima materije koja ispunjava prostorvrijeme sadržane su u simetričnom tenzoru $T : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$, poznatom kao *tenzor ener-*

gije i impulsa. Izbor prostornovremenske metrike g nije slobodan, već ograničen tzv. Einstenovom gravitacijskom jednadžbom[10]

$$G + \Lambda g = 8\pi T\,, \tag{5}$$

gdje je G Einsteinov tenzor, Λ kozmološka konstanta, a T tenzor energije i impulsa svih negravitacijskih polja koja su prisutna u prostorvremenu. Raspisana u lokalnom koordinatnom sustavu, Einsteinova se jednadžba razmotava u sustav nelinearnih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi drugog reda za komponente metrike g_{ij}, čije rješavanje općenito predstavlja izniman izazov. U slučaju kada u prostorvremenu nema materije, pa je $T = 0$, govorimo o vakuumskoj Einsteinovoj jednadžbi (čija su rješenja obično oslovljena kao vakuumska rješenja). Najjednostavnije je vakuumsko rješenje, uz $\Lambda = 0$, upravo metrika Minkowskog.

4. Veliki rezultati i otvorena pitanja

Nakon više od stotinu godina, intenzivno istraživanje opće teorije relativnosti nimalo ne jenjava. Kako bismo bolje razumjeli prirodu gravitacijskog polja, a posredno i geometriju prostorvremena u kojem se nalazimo, potrebno je sustavno analizirati fenomene koji proizlaze iz Einstenove gravitacijske jednadžbe. Iz golemog kataloga poznatih rješenja [SKM+03], ovdje ćemo izdvojiti one koji su fizikalno najrelevantniji: gravitacijske valove, crne rupe i kozmološke modele.

Einstein je već 1916. godine u članku *Näherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation* primijetio da se gravitacijske jednadže linearizacijom (promatranjem perturbacija oko metrike Minkowskog) u najnižem redu svode na valnu jednadžbu. Odavde slijedi postojanje gravitacijskih valova, propagirajućih deformacija gravitacijskog polja, barem u lineariziranom režimu aproksimacije. Međutim, zbog konceptualnih zapreka koje su proizlazile iz nerazumijevanja uloge koordinatnih sustava[11] i izazova u analizi gravitacijskih valova u punoj, nelinearnoj teoriji [HN17], pitanje fizikalnosti ovog fenomena desetljećima je visilo u zraku [Ken97]. Prvi teorijski proboj dogodio se krajem 1950-ih godina, nakon što su Herman Bondi, Felix Pirani i Ivor Robinson [Pir57, Bon57, BPR59] ponudili općenitiju definiciju gravitacijskih valova, pronašli konkretan primjer u egzaktnom rješenju vakuumske Einsteinove jednadžbe i pokazali da gravitacijski val prenosi energiju. Stoga, riječ je o fizikalnom fenomenu, a ne pukom koordinatnom artefaktu. Otprilike u slično vrijeme, Andrzej M. Trautman [Tra58a, Tra58b] uveo je ključni element teorije gravitacijskih valova, rubne uvjete u beskonačnosti (odnosno, daleko od izvora) te time dao prvu rigoroznu definiciju gravitacijskog zračenja.

[10]David Lovelock je dokazao [Lov71, Lov72] da je Einstenova jednadžba u 4-dimenzionalnom slučaju jedinstvena, pod pretpostavkama uz koje ju je Einstein izvorno tražio (jednakost simetričnih tenzora iščezavajuće diveregencije, koji ne sadrže više od druge derivacije metrike).

[11]Korijeni miskoncepcija prisutni su već u Einsteinovu članku iz 1916. godine, s pogreškama u identifikaciji fizikalnih, koordinatno neovisnih stupnjeva slobode, koje je Einstein kasnije popravio u članku *Über Gravitationswellen* iz 1918. godine.

Rani pokušaji opažanja gravitacijskih valova iz 1960-ih godina, koje je fizičar Joseph Weber nastojao provesti pomoću aluminijskih valjaka s piezoelementima, pokazali su se neuspješnima, ponajprije zbog nedovoljne preciznosti. Russell A. Hulse i Joseph H. Taylor su 1974. godine otkrili binarni sustav neutronskih zvijezda i mjerenjem njihovog perioda ophoda posredno pokazali da ovaj sustav gubi energiju zračenjem gravitacijskih valova, u skladu s predviđanjem opće teorije relativnosti. Konačno, upotrebom modernih, iznimno preciznih interferometrijskih uređaja, gravitacijski val prvi je put direktno opažen 14. rujna 2015. godine u sklopu kolaboracija LIGO i Virgo. Moderne teorijske analize spektara gravitacijskog zračenja predmet su nepreglednog mnoštva znanstvenih radova [BCS09, KZ11].

Objekti koji posebno zaokupljaju pažnju znanstvenika i javnosti su crne rupe. Ugrubo, crna je rupa dio prostorvremena koji je kauzalno odvojen od njenog komplementa u smislu da ne postoje u budućnost usmjerene krivulje vremenskog ili svjetlosnog tipa koje iz unutrašnjosti crne rupe mogu doći do „beskonačnosti" (tehnički je izazov dati preciznu definiciju posljednje riječi). Drugim riječima, komadi materije koji upadnu u crnu rupu ostaju zarobljeni u njoj. Iako su prva rješenja Einsteinove jednadžbe koja predstavljaju crne rupe pronađene već u ranim danima opće teorije relativnosti, statično sferno simetrično Schwarzschildovo prostorvrijeme 1916. godine (vakuumsko rješenje) i Reissner–Nordströmovo prostorvijeme u radovima objavljenima između 1916. i 1921. godine (rješenje s elektromagnetskim poljem), njihova važnost je, zbog niza razloga, prepoznata znatno kasnije. Prije svega, rješavanje Einstenove jednadžbe velik je tehnički izazov — prvo stacionarno osno simetrično vakuumsko rješenje, koje predstavlja rotirajuću crnu rupu, pronašao je matematičar Roy P. Kerr [Ker63] gotovo pola stoljeća nakon Schwarzschilda! Nadalje, zbog nedostatka fizikalnih argumenata kako bi se takvi objekti uopće mogli formirati, crne rupe isprva su shvaćene kao „matematička egzotika". Sugestija da bi crna rupa mogla biti rezultat gravitacijskog sažimanja materije pojavila se u radu Roberta Oppenheimera i Hartlanda Snydera [OS39]. Međutim, generička materija u prirodi nema prostorne simetrije, pa se postavlja pitanje postoje li neke složenije crne rupe, tim više što je riječ o nelinearnim jednadžbama. Revolucionaran iskorak donosi Werner Israel [Isr67] dokazom da je Schwarzschildova crna rupa, uz fizikalno plauzibilne pretpostavke, jedinstveno statično rješenje vakuumske Einsteinove jednadžbe. Ovaj rezultat pokrenuo je val daljnjih poopćenja koji upućuju na zaključak da je Kerrovo prostorvrijeme jedinstveno vakuumsko stacionarno rješenje koje predstavlja rotirajuću crnu rupu (za pregled vidi [Heu96, CCH12]). S druge strane, u prisustvu drugih polja, inventar crnih rupa postaje nešto složeniji i u modernoj literaturi može se naći mnoštvo teorema koji barem donekle ograničavaju moguća rješenja[12]. Paralaleno s analizom pitanja jedinstvenosti, dio istraživanja posvećen je i problemu stabilnosti poznatih rješenja. Netrivijalnost ovog izazova ilustrira informacija da se dokaz stabilnosti najjednostavnijeg prostorvremena Minkowskog proteže na preko 500 stranica

[12]Općenitu slutnju o jednostavnosti crnih rupa fizičar John A. Wheeler slikovito je opisao metaforom o odsustvu „kose" crnih rupa (eng. black holes have no hair).

[CK14], a u trenutku pisanja ovog članka pitanje stabilnosti Kerrova prostorvremena još nije razriješeno.

U rješenjima Einstenove jednadžbe s crnim rupama odmah su primijećena dva fizikalno problematična aspekta. Jedan je bilo singularno ponašanje komponenti metrike na rubu crne rupe, poznatom kao horizont. Razjašnjenje se iskristaliziralo tijekom 1950-ih i 1960-ih godina, kada je pokazano da je riječ o pukom koordinatnom artefaktu koji se može ukloniti analitičkim produljenjem metrike, odnosno odabirom prikladnog koordinatnog sustava. Drugi problem, singularno ponašanje metrike unutar crne rupe, nije se mogao otkloniti promjenom koordinatnog sustava. Pokušaji razjašnjenja što je točno prostornovremenski *singularitet* nisu konvergirali već, umjesto jedne definicije, imamo mnoštvo konceptualno različitih, neekvivalentnih definicija [ES77, ES79]. Neovisnom pitanju sudbine materije koja je kolabirala u crnu rupu dugo se pristupalo kroz heurističke argumente i grube analize realističnih, asimetričnih procesa, s očekivanjem da je unutrašnjost crne rupe regularna u nekom smislu. Revoluciju na ovom planu donio je Roger Penrose [Pen65] upotrebom topoloških alata kako bi dokazao neminovnost singularnog prostorvremena pod pretpostavkama lokalne pozitivnosti energije i prisustva tzv. uhvaćene plohe (eng. *trapped surface*). Glavni nedostatak poznatih teorema o singularitetima je nepotpunost informacije o karakteru impliciranih singulariteta [SG15].

Opću teoriju relativnosti možemo upotrijebiti kako bismo modelirali cijeli svemir. Naravno, s obzirom na to da je naš svemir iznimno složen, obično se oslanjamo na neke razumne aproksimacije. Opažanja sugeriraju da je svemir na najvećim skalama približno homogen i izotropan. S tim u skladu, biramo familiju prostorvremena koja se globalno može rastaviti na produkt homogenog izotropnog prostornog dijela i jednodimenzionalnog vremenskog dijela (os vremenske evolucije svemira). Pripadna metrika poznata je pod složenim imenom Friedmann-Lemaître-Robertson-Walkerova metrika, prema imenima najvažnijih znanstvenika koji su u ranim danima kozmologije tražili adekvatna rješenja Einsteinove jednadžbe. Nešto kompliciranija familija rješenja su prostorno homogeni, anizotropni Bianchijevi kozmološki modeli (utemeljeni na Bianchijevoj klasifikaciji realnih 3-dimenzionalnih Liejevih algebri), obično numerirani rimskim brojevima od I do IX. Nakon što je Vesto M. Slipher 1910-ih izmjerio Dopplerove pomake spektralnih linija spiralnih galaksija, a Edwin Hubble 1920-ih odredio njihove udaljenosti pomoću cefeida te ih 1929. godine povezao s postojećim mjerenjima radijalnih brzina, postalo je razvidno da se svemir širi, u skladu s kozmološkim teorijskim okvirom koji je 1927. godine postavio Georges Lemaître. Time je potaknuta rasprava o stanju svemira u njegovoj ranijoj prošlosti. Počevši od kratke skice primordijalne kozmogonije Georgea Lemaîtrea iz 1931. godine [Lem31], fizika ranog svemira počela se razvijati tijekom 1940-ih godina, s nizom uspješnih predikcija poput temperature pozadinskog mikrovalnog zračenja ili udjela izotopa elemenata. Ime *veliki prasak* (eng. *Big Bang*) uveo je astronom Fred Hoyle 1949. godine [Kra13] kako bi slikovito dočarao razliku između dvije paradigme, one

o statičnom svemiru i one o svemiru koji se razvija iz ekstremno guste, vruće početne faze. Često korištena sintagma „teorija velikog praska" odnosi se samo na modeliranje razvoja svemira *nakon* njegova nastanka, a ne i na sam nastanak. Ključna informacija o potonjem pitanju pojavila se sredinom 1960-ih godina, na valu velikih rezultata gravitacijske fizike. Koristeći slične tehnike kao i Penrose, Stephen Hawking je dokazao [Haw65] nužnost singulariteta na početku svemira (za pregled vidi [HE73, SG15]). Ovaj rezultat sugerira da nam je za objašnjenje geneze svemira neophodan i kvantni opis gravitacije, koji još nije u potpunosti razriješen.

5. Završni komentari

Einsteinova opća teorija relativnosti uvela je geometriju na velika vrata u modernu teorijsku fiziku. Umjesto tradicionalne euklidske geometrije ili jedne specifične neeuklidske geometrije, relativistička fizika u Riemannovom duhu dopušta „geometrijski pluralizam". Geometrija prostorvremena povezana je s materijom preko Einsteinove gravitacijske jednadžbe, čija su rješenja neiscrpan izvor novih fenomena. Posebno su intrigantni singulariteti u unutrašnjostima crnih rupa ili na početku svemira, gdje postojeća paradigma o gravitaciji biva stavljena pred esencijalni ispit. Prostornovremenski singulariteti moderna su verzija bijelih ploha na starim geografskim kartama, simbol nepotpunosti našeg razumijevanja prirode i izazov koji nas neumoljivo priziva.

Literatura:

1. [BCS09] E. Berti, V. Cardoso, and A. O. Starinets, *Quasinormal modes of black holes and black branes,* Class. Quantum Grav. **26** (2009.), 163001.
2. [Bon55] R. Bonola, *Non-Euclidean Geometry*, Dover Publications, New York, 1955.
3. [Bon57] H. Bondi, *Plane gravitational waves in general relativity*, Nature 179 (1957.), 1072 – 1073.
4. [BPR59] H. Bondi, F. A. E. Pirani, and I. Robinson, *Gravitational waves in general relativity. 3. Exact plane waves*, Proc. Roy. Soc. Lond. A **251** (1959.), 519 – 533.
5. [Bre84] E. Breitenberger, *Gauss's Geodesy and the Axiom of Parallels*, Arch. Rational Mech. **31** (1984.), 273 – 289.
6. [CCH12] P.T. Chruściel, J.L. Costa, and M. Heusler, *Stationary Black Holes: Uniqueness and Beyond*, Living Rev. Rel. **15** (2012.), 7.
7. [CK14] D. Christodoulou and S. Klainerman, *The Global Nonlinear Stability of the Minkowski Space, Princeton University Press*, 2014.
8. [Dar00] O. Darrigol, *Electrodynamics from Ampère to Einstein*, Oxford University Press, 2000.

9. [Dar15], *The mystery of Riemann's curvature*, Hist. Math. **42** (2015.), 47 – 83.

10. [dC92] M. P. do Carmo, *Riemannian Geometry*, Birkhäuser, Boston, 1992.

11. [EG78] J. Earman and C. Glymour, Einstein and Hilbert: *Two months in the history of general relativity*, Arch. Hist. Exact Sci. **19** (1978.), 291 – 308.

12. [ES77] G. F. R. Ellis and B. G. Schmidt, *Singular Space-Times*, Gen. Rel. Grav. **8** (1977.), 915 – 953.

13. [ES79] G. F. R. Ellis and B. G. Schmidt, *Classification of singular space-times*, Gen. Rel. Grav. **10** (1979.), 989 – 997.

14. [Gau00] C. F. Gauss, *Werke. Volume 8*, Cambridge University Press, Cambridge, 2011 [1900], https://gauss.adw-goe.de/handle/gauss/77.

15. [GG08] I. Grattan-Guinness, *Solving Wigner's Mystery: The Reasonable (Though Perhaps Limited) Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences*, Math. Intell. **30** (2008.), 7 – 17.

16. [GR15] H. Gutfreund and J. Renn, *The Road to Relativity*, Princeton University Press, Princeton, 2015.

17. [Haw65] S. Hawking, *Occurrence of singularities in open universes*, Phys. Rev. Lett. **15** (1965.), 689 – 690.

18. [HE73] S. Hawking and G.F.R. Ellis, *The large scale structure of space-time*, Cambridge University Press, 1973.

19. [Heu96] M. Heusler, *Black Hole Uniqueness Theorems*, Cambridge University Press, 1996.

20. [HN17] C. D. Hill and P. Nurowski, *How the Green Light Was Given for Gravitational Wave Search*, Notices Amer. Math. Soc. **64** (2017.), 686 – 692.

21. [Ins25] *Clay Mathematics Institute, Euclid's elements,* 2025, http://www.claymath.org/onlineresources/euclids-elements/.

22. [Isr67] W. Israel, *Event horizons in static vacuum space-times*, Phys. Rev. **164** (1967.), 1776 – 1779.

23. [Ken97] D. Kennefick*, Controversies in the history of the radiation reaction problem in general relativity*, https://arxiv.org/abs/gr-qc/9704002, 1997.

24. [Ker63] R. P. Kerr, *Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics*, Phys. Rev. Lett. **11** (1963.), 237 – 238.

25. [Kra12] H. Kragh, Geometry and Astronomy*: Pre-Einstein Speculations of Non-Euclidean Space,* https://arxiv.org/abs/1205.4909.

26. [Kra13] , *Big Bang: the etymology of a name,* Astron. Geophys. **54** (2013.), 2.28 – 2.30.

27. [KZ11] R. A. Konoplya and A. Zhidenko, *Quasinormal modes of black holes: From astrophysics to string theory*, Rev. Mod. Phys. **83** (2011.), 793–

28. [Lee03] J. M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Springer, 2003.

29. [Lov71] D. Lovelock, *The Einstein Tensor and Its Generalizations*, J. Math. Phys. **12** (1971.), 498 – 501.

30. [Lov72], *The Four-Dimensionality of Space and the Einstein Tensor*, J. Math. Phys. **13** (1972.), 874 –876.

31. [Lüt11] J. Lützen, The Physical Origin of Physically Useful Mathematics, Interdiscip. Sci. Rev. **36** (2011.), 229–243.

32. [Lüt22] J. Lützen, *A History of Mathematical Impossibility*, Oxford University Press, Oxford, 2022.

33. [O'N83] B. O'Neill, *Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity*, Academic Press, 1983.

34. [OS39] J. R. Oppenheimer and H. Snyder, *On Continued gravitational contraction*, Phys. Rev. **56** (1939.), 45 5– 459.

35. [Pen65] R. Penrose, *Gravitational collapse and space-time singularities*, Phys. Rev. Lett. **14** (1965.), 57 – 59.

36. [Pir57] F. A. E. Pirani, *Invariant formulation of gravitational radiation theory*, Phys. Rev. **105** (1957.), 1089 – 1099.

37. [SG15] J. M. M. Senovilla and D. Garfinkle, *The 1965 Penrose singularity theorem*, Class. Quantum Grav. 32 (2015.), no. 12, 124008.

38. [SKM+03] H. Stephani, D. Kramer, M. A. H. MacCallum, C. Hoenselaers, and E. Herlt, *Exact solutions of Einstein's field equations*, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

39. [Tod05] I. T. Todorov, Einstein and Hilbert: *The Creation of general relativity*, arXiv: physics/0504179, 4 2005.

40. [Tra58a] A. Trautman, *Boundary Conditions at Infinity for Physical Theories,* Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. Math. Astron. Phys. **6** (1958.), no. 6, 403 – 406.

41. [Tra58b] , *Radiation and Boundary Conditions in the Theory of Gravitation*, Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. Math. Astron. Phys. **6** (1958.), no. 6, 407 – 412.

42. [Wig60] E. P. Wigner, *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences*, Commun. Pure Appl. Math. **13** (1960.), 1 – 14.