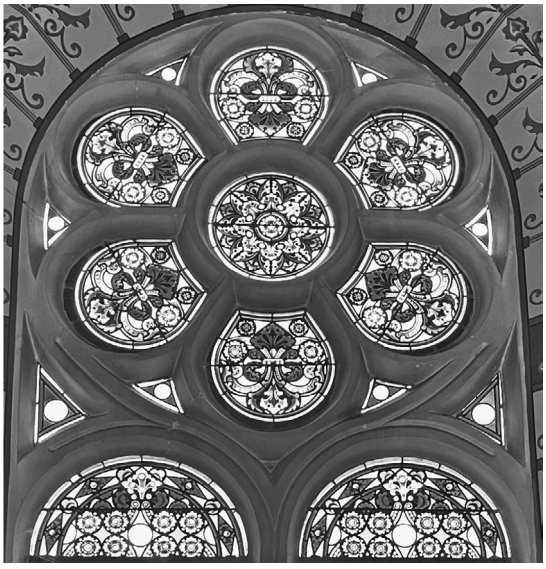
Rozeta

Tomislav Pejković[1]

1. Uvod

Na pročelju grkokatoličke konkatedralne crkve u Zagrebu nalazi se prozor s rozetom na vrhu. Slika 1. prikazuje gornji dio toga prozora koji uključuje šesterolisnu rozetu.

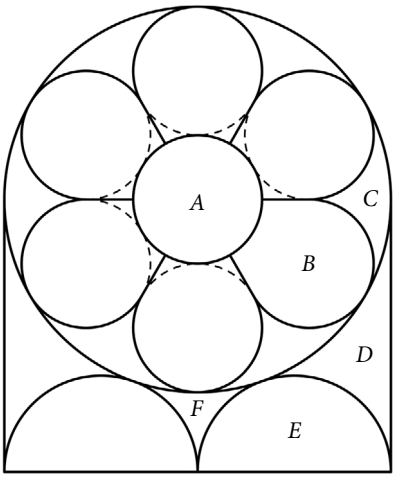


Slika 1.

Na Slici 2. skicirali smo geometrijske likove s fotografije zanemarujući pritom debljinu kamenog mrežišta. Uzmimo sada i nadalje da je polumjer velike kružnice 1. Drugim riječima, širina crteža na Slici 2. je 2.

Kao malu vježbu za zagrijavanje, pozivamo čitatelje da odrede površine i opsege likova označenih slovima *A* do *F*. Naznačili smo samo po jedan primjerak svakog oblika jer je iz simetrija jasno koje su površine i opsezi ostalih likova sa slike. Primjerice, svaka od šest „latica" sukladna je liku *B*.

[1]Tomislav Pejković, Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet, Matematički odsjek



Slika 2.

Nakon malo promatranja i računa, dobivamo

$$O_A = \frac{2\pi}{3} \qquad P_A = \frac{\pi}{9}$$

$$O_B = \frac{5\pi}{9} + \frac{2\sqrt{3}-2}{3} \qquad P_B = \frac{\pi}{18} + \frac{\sqrt{3}}{9}$$

$$O_C = \frac{7\pi}{9} \qquad P_C = \frac{5\pi}{54} - \frac{\sqrt{3}}{9}$$

$$\varphi = \arccos\frac{1}{3} \approx 1.23$$

$$O_D = \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{2} + \sqrt{2} \qquad P_D = \frac{3\sqrt{2}}{4} - \frac{\pi}{8} - \frac{3\varphi}{8}$$

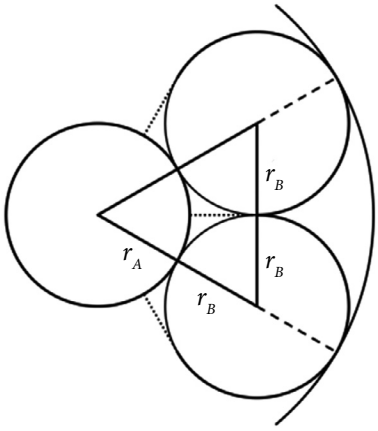
$$O_E = 1 + \frac{\pi}{2} \qquad P_E = \frac{\pi}{8}$$

$$O_F = \pi - \varphi \qquad P_F = \frac{3\varphi}{4} - \frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ovakvi zadaci redovito se pojavljuju u osnovnoškolskoj i srednjoškolskoj nastavi matematike, npr. na hrvatskim natjecanjima trebalo je odrediti $P_B - P_A$ (prvi zadatak za osmi razred na državnom natjecanju 2021. godine) i $P_A + 6P_B$ (treći zadatak za osmi razred na županijskom natjecanju 2016. godine).

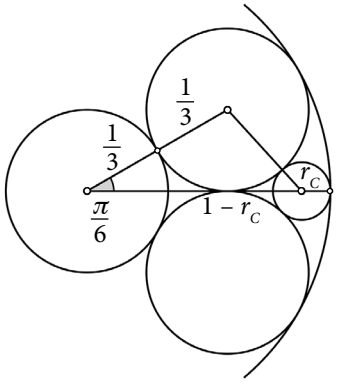
Pogledajmo još jednom malo pažljivije fotografiju rozete. Primjećujemo da su na vitraju ocrtane i kružnice upisane likovima *C* i *D*. Odredimo polumjere tih kružnica.

Za određivanje polumjera r_C kružnice upisane krivolinijskom trokutu *C*, treba nam polumjer r_A kruga *A* i polumjer r_B kružnica upisanih likovima sukladnim *B*.



Slika 3.

U jednakokračnom trokutu na Slici 3. s krakom duljine $r_A + r_B = 1 - r_B$, nasuprot osnovice duljine $2r_B$ nalazi se kut mjere $\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$, pa je taj trokut jednakostraničan iz čega je $r_A = r_B = \frac{1}{3}$.



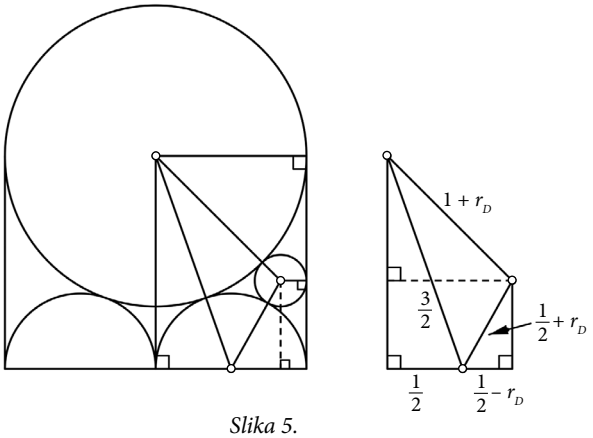
Slika 4.

Na Slici 4. spojnice središta triju kružnica čine trokut sa stranicama duljina $\frac{2}{3}$, $1 - r_C$ i $\frac{1}{3} + r_C$, te kutom između prvih dviju stranica jednakim $\frac{\pi}{6}$. Poučak o kosinusu daje jednadžbu

$$\left(\frac{1}{3} + r_c\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(1 - r_C\right)^2 - 2 \cdot \frac{2}{3}\left(1 - r_C\right)\frac{\sqrt{3}}{2},$$

iz koje nakon kratkog računa slijedi

$$r_C = \frac{5-2\sqrt{3}}{13} \approx 0.12\,.$$



Slika 5.

Na Slici 5. naznačili smo dužine koje koristimo kod određivanja polumjera kružnice upisane liku *D*. Na desnom dijelu iste slike izdvojili smo te dužine i dopisali one duljine koje možemo dobiti iz uvjeta dodirivanja odgovarajućih kružnica i pravca.

Primijenimo li Pitagorin poučak na tri pravokutna trokuta sa Slike 5. desno, dobivamo

$$\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(1+r_D\right)^2 - \left(1-r_D\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2}+r_D\right)^2 - \left(\frac{1}{2}-r_D\right)^2}$$

iz čega slijedi $r_D = 3-2\sqrt{2} \approx 0.17\,.$

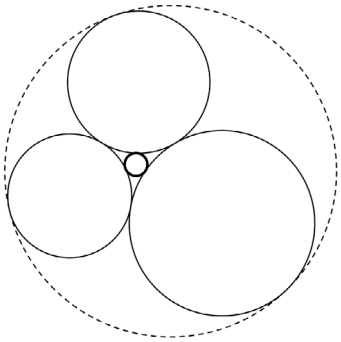
2. Descartesov teorem

Postoji općenita formula koja povezuje polumjere četiriju kružnica takvih da se svake dvije dodiruju. Tu je formulu René Descartes 1643. naveo u pismu kneginji Elizabeti Falačkoj.

Descartesov teorem. *Polumjeri r_1, r_2, r_3, r_4 četiriju kružnica koje se u parovima dodiruju u različitim točkama zadovoljavaju jednakost*

$$2\left(\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}+\frac{1}{r_4^2}\right) = \left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}\right)^2 . \qquad (2.1)$$

U slučaju kada jedna od kružnica sadrži ostale kružnice poput iscrtkane kružnice na Slici 6., treba polumjer te kružnice uzeti kao negativan broj. To se dogodilo



Slika 6.

upravo kod određivanja polumjera kružnice upisane liku C sa Slike 2. Provjerite da za polumjere $-1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, r_C = \frac{5-2\sqrt{3}}{13}$ zaista vrijedi jednakost (2.1).

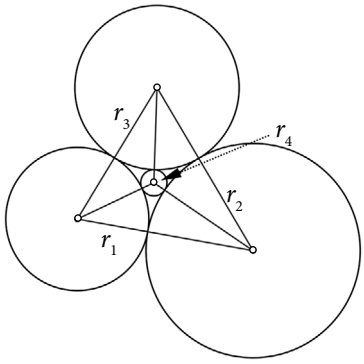
Descartesov teorem vrijedi i u posebnom slučaju kada je neka od kružnica zapravo pravac. Pravac promatramo kao kružnicu beskonačno velikog polumjera, pa u tom slučaju u formuli treba za $\frac{1}{r}$ uvrstiti 0.

Kod nas se takva situacija pojavila prilikom određivanja polumjera kružnice upisane liku D. Tada nam Descartesov teorem daje

$$2\left(0+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{(1/2)^2}+\frac{1}{r_D{}^2}\right)=\left(0+\frac{1}{1}+\frac{1}{1/2}+\frac{1}{r_D}\right)^2,$$

odnosno $r_D^2-6r_D+1=0$,a ova kvadratna jednadžba ima rješenja $3-2\sqrt{2}$ i $3+2\sqrt{2}$. Sa Slike 2. je jasno da trebamo uzeti manje rješenje te smo tako brže dobili već izračunati polumjer $r_D = 3-2\sqrt{2}$.

Postoje brojni dokazi Descartesova teorema. Vjerojatno najizravniji dobiva se korištenjem Heronove formule za površinu trokuta.



Slika 7.

Tri manja trokuta na Slici 7. čine veći trokut sa stranicama duljine $r_1 + r_2$, $r_2 + r_3$, $r_3 + r_1$ kojemu je poluopseg $r_1 + r_2 + r_3$ i stoga površina $\sqrt{r_1 r_2 r_3 (r_1 + r_2 + r_3)}$. Analogno primijenimo Heronovu formulu za dobivanje površina triju manjih trokuta te izjednačavanjem zbroja tih površina s površinom većeg trokuta slijedi

$$\sqrt{r_1 r_2 r_3 (r_1 + r_2 + r_3)} = \sqrt{r_1 r_2 r_4 (r_1 + r_2 + r_4)} + \sqrt{r_1 r_3 r_4 (r_1 + r_3 + r_4)} + \sqrt{r_2 r_3 r_4 (r_2 + r_3 + r_4)}.$$

Spretnim manipulacijama ove jednakosti (kvadriranjima, sređivanjima i supstitucijama), dolazimo relativno brzo do formule (2.1). Detalje pogledajte u [7].

Drugi dokaz [2, 1] koristi formulu za volumen tetraedra kojemu su dane duljine bridova. U toj formuli volumen je izražen kao determinanta odgovarajuće matrice reda 5, a za duljine bridova tetraedra uvrstimo $r_1 + r_2$, $r_1 + r_3$, $r_1 + r_4$, $r_2 + r_3$, $r_2 + r_4$, $r_3 + r_4$. U slučaju kada se kružnice s radijusima r_1, r_2, r_3, r_4 u parovima diraju, sva četiri vrha degeneriranog tetraedra leže u ravnini (Slika 7.), pa je volumen tetraedra jednak 0. Izvođenjem elementarnih transformacija na spomenutoj matrici i upotrebom Binet-Cauchyjeva teorema, dobiva se tražena jednakost (2.1).

Konačno, u Coxeterovom dokazu [2] primijeni se inverzija sa središtem u jednom od dirališta kružnica. Dvije kružnice čije diralište je centar inverzije preslikaju se u dva paralelna pravca, a ostale dvije preslikaju se u kružnice koje dodiruju te pravce. Time je situacija postala posebno jednostavna, ali treba još nešto truda da se povežu početni polumjeri s dobivenim polumjerima i položajima likova.

3. Kompleksni Descartesov teorem

Sve ove dokaze samo smo ukratko skicirali jer ćemo sada navesti i dokazati jednu lijepu generalizaciju koja je objavljena tek u 21. stoljeću [6]. Prije iskaza tog rezultata, pojednostavnimo zapis Descartesova teorema koristeći pojam zakrivljenosti.

Za kružnicu radijusa r zakrivljenost κ definiramo kao recipročnu vrijednost radijusa, $\kappa = \frac{1}{r}$. Zakrivljenost se može definirati i u točkama drugih krivulja, ali nama ta općenitija definicija neće biti potrebna. Za kružnice je pojam zakrivljenosti intuitivno jasan. Što je veći radijus, to je zakrivljenost manja. Za pravac je radijus beskonačan, a zakrivljenost 0.

Sada pomoću zakrivljenosti $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4$ četiriju kružnica koje se u parovima dodiruju, možemo (2.1) zapisati kao

$$2\left(\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2 + \kappa_4^2\right) = \left(\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + \kappa_4\right)^2. \tag{3.1}$$

U poopćenju koje ćemo sada iskazati pojavljuju se i koordinate središta kružnica zapisane kao kompleksni brojevi. Dakle, točki s koordinatama (x, y) u Kartezijevom koordinatnom sustavu pridružen je kompleksni broj $x + iy$.

Kompleksni Descartesov teorem. *Ako se četiri kružnice sa zakrivljenostima κ_j i središtima z_j (j = 1, 2, 3, 4) u parovima dodiruju u različitim točkama, onda vrijedi jednakost*

$$2\sum_{j=1}^{4}\kappa_j^2 z_j^2 = \left(\sum_{j=1}^{4}\kappa_j z_j\right)^2. \tag{3.2}$$

I ovdje uzimamo da je za kružnicu koja sadrži ostale kružnice zakrivljenost negativna, ali više nije dopušten slučaj pravca umjesto neke od kružnica jer ne možemo definirati središte pravca kao točku u kompleksnoj ravnini.

Kao primjer, uzmimo opet konfiguraciju kružnica oko kružnice upisane području C na Slikama 2. i 4. Ishodište kompleksne ravnine postavimo u središte velike kružnice polumjera 1, a za realnu i imaginarnu os uzmemo horizontalni i vertikalni pravac. Označimo li središte jedne od kružnica s

$$v = \frac{2}{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{i}{3},$$

središte druge kružnice koja joj je simetrična s obzirom na realnu os bit će $\overline{v}$. Kompleksni Descartesov teorem u ovom slučaju daje

$$2\left(9v^2 + 9\overline{v}^2 + (-1)^2\cdot 0^2 + \frac{1}{r_C^2}(1-r_C)^2\right) = \left(3v + 3\overline{v} + (-1)\cdot 0 + \frac{1}{r_C}(1-r_C)\right)^2.$$

Sami provjerite da ova jednakost vrijedi za $r_C = \dfrac{5-2\sqrt{3}}{13}$.

Pokažimo najprije da je Kompleksni Descartesov teorem zaista generalizacija Descartesova teorema. Translacijom kružnica za vektor predstavljen kompleksnim brojem z, dobivamo kružnice istih polumjera sa središtima u $z_j + z$ za j = 1, 2, 3, 4. Jednakost (3.2) primijenjena na te kružnice daje

$$2\sum_{j=1}^{4}\kappa_j^2\left(z_j + z\right)^2 - \left(\sum_{j=1}^{4}\kappa_j\left(z_j + z\right)\right)^2 = 0. \tag{3.3}$$

Lijeva strana prethodne jednakosti kvadratni je polinom u z koji se poništava za svaki z, pa mu je koeficijent uz z^2 nužno jednak 0, a to upravo daje (3.1). Zapišite sami i treći identitet koji dobijemo kada izjednačimo koeficijente u (3.3) s nulom.

U dokazu Kompleksnog Descartesovog teorema slijedimo članak [9]. Trebat će nam sljedeća lema o udaljenosti dirališta kružnica.

Lema. *Neka se kružnice k_1, k_2, k_3 sa zakrivljenostima $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ u parovima diraju tako da je diralište k_3 i k_1 točka A_1, a diralište k_3 i k_2 točka A_2. Tada je*

$$|A_1A_2|^2 = \frac{4}{(\kappa_3+\kappa_1)(\kappa_3+\kappa_2)}.$$

Dokaz. Uvedimo kompleksne koordinate tako da je središte od k_3 u 0, a središta kružnica k_1 i k_2 redom u z_1 i z_2. Polumjere kružnica k_1, k_2, k_3 označimo s r_1, r_2, r_3,

tim redom. Točke A_1 i A_2 predstavljene su kompleksnim brojevima w_1 i w_2 (Slika 8). Imamo

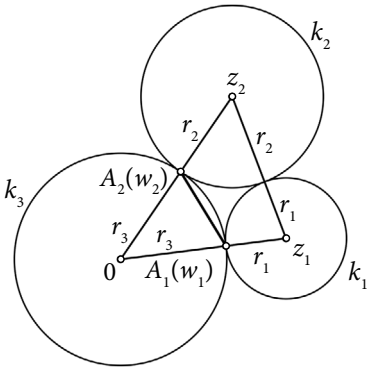
$$w_1 = \frac{r_3}{r_1 + r_3} z_1, \qquad w_2 = \frac{r_3}{r_2 + r_3} z_2,$$

a iz uvjeta dodira je

$$|z_1| = r_1 + r_3, \qquad |z_2| = r_2 + r_3, \qquad |z_1 - z_2| = r_1 + r_2,$$

pa je

$$\begin{aligned} z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 &= z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} - (z_1 - z_2)\overline{z_1 - z_2} \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 \\ &= (r_1 + r_3)^2 + (r_2 + r_3)^2 - (r_1 + r_2)^2 \\ &= 2(r_1 + r_3)(r_2 + r_3) - 4r_1r_2. \end{aligned}$$



Slika 8.

Sada je

$$\begin{aligned} |A_1A_2|^2 &= |w_1 - w_2|^2 = (w_1 - w_2)(\overline{w_1} - \overline{w_2}) \\ &= |w_1|^2 + |w_2|^2 - \left(w_1\overline{w_2} + \overline{w_1}w_2\right) \\ &= 2r_3^2 - \frac{r_3^2}{(r_1 + r_3)(r_2 + r_3)}\left(z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2\right) \\ &= 2r_3^2 - 2r_3^2 + \frac{4r_1r_2r_3^2}{(r_1 + r_3)(r_2 + r_3)} \\ &= \frac{4}{\left(\frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_1}\right)\left(\frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_2}\right)} = \frac{4}{(\kappa_3 + \kappa_1)(\kappa_3 + \kappa_2)}, \end{aligned}$$

što smo i htjeli pokazati. □

Koristit ćemo i sljedeći identitet za kompleksne brojeve a,b,c

$$2\left(a^4+b^4+c^4\right)-\left(a^2+b^2+c^2\right)^2=-(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c). \quad (3.4)$$

Lako ga je direktno provjeriti

$$\begin{aligned}-(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) &= \left((b+c)^2-a^2\right)\left((b-c)^2-a^2\right)\\ &= \left(b^2-c^2\right)^2-\left(2b^2+2c^2\right)a^2+a^4\\ &= a^4+b^4+c^4-2\left(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2\right)\\ &= 2\left(a^4+b^4+c^4\right)-\left(a^2+b^2+c^2\right)^2.\end{aligned}$$

Dokaz Kompleksnog Descartesovog teorema. Formulu (3.2) dokazujemo najprije uz pretpostavku da je $z_4 = 0$. Uvrstimo li u (3.4) $a^2=\kappa_1 z_1$, $b^2=\kappa_2 z_2$, $c^2=\kappa_3 z_3$, vidimo da će (3.2) vrijediti ako i samo ako $\kappa_1 z_1, \kappa_2 z_2, \kappa_3 z_3$ imaju neke kvadratne korijene čija je suma jednaka 0.

Homotetija sa središtem u ishodištu ne mijenja $\kappa_j z_j$ za j = 1, 2, 3, pa možemo uzeti da je kružnici sa središtem u $z_4 = 0$ polumjer jednak 1. Neka ta kružnica dodiruje ostale tri kružnice u točkama kojima su pridruženi kompleksni brojevi u_j, j = 1, 2, 3. Iz Leme znamo da je

$$|u_j-u_l|^2=\frac{4}{\left(1+\kappa_j\right)\left(1+\kappa_l\right)} \qquad (j\neq l). \quad (3.5)$$

Kako je $|u_j|=1$, imamo $\overline{u_j}=u_j^{-1}$ za $j=1,2,3$, pa lijevu stranu u (3.5) možemo zapisati

$$|u_j-u_l|^2=\left(u_j-u_l\right)\left(u_j^{-1}-u_l^{-1}\right)=-u_j u_l\left(u_j^{-1}-u_l^{-1}\right)^2. \quad (3.6)$$

Budući da u_j predstavlja jedinični vektor u smjeru z_j, imamo

$$u_j=\frac{\kappa_j}{1+\kappa_j}z_j.$$

Koristeći ovu jednakost zajedno sa (3.5) i (3.6) dobivamo

$$\left(\kappa_j z_j\right)\left(\kappa_l z_l\right)=-4\left(u_j^{-1}-u_l^{-1}\right)^{-2} \qquad (j\neq l). \quad (3.7)$$

U (3.7) imamo sustav od tri jednadžbe koji rješavamo u nepoznanicama $\left(\kappa_j z_j\right)^2$ i dobivamo

$$\begin{aligned}\left(\kappa_1 z_1\right)^2 &= M\left(u_2^{-1}-u_3^{-1}\right)^4\\ \left(\kappa_2 z_2\right)^2 &= M\left(u_3^{-1}-u_1^{-1}\right)^4\\ \left(\kappa_3 z_3\right)^2 &= M\left(u_1^{-1}-u_2^{-1}\right)^4,\end{aligned} \quad (3.8)$$

gdje je

$$M = \frac{-4}{\left(u_1^{-1} - u_2^{-1}\right)^2 \left(u_2^{-1} - u_3^{-1}\right)^2 \left(u_3^{-1} - u_1^{-1}\right)^2}. \tag{3.9}$$

Neka je ρ kompleksan broj za koji je $\rho^4 = M$. Stavimo

$$a = \rho\left(u_2^{-1} - u_3^{-1}\right),\ \ b = \rho\left(u_3^{-1} - u_1^{-1}\right),\ \ c = \rho\left(u_1^{-1} - u_2^{-1}\right).$$

Prvi red u (3.8) pokazuje da je $\kappa_1 z_1 = \pm a^2$. Ako je potrebno, zamijenimo ρ s ρi tako da možemo uzeti da je $\kappa_1 z_1 = a^2$. Tvrdimo da je onda $\kappa_2 z_2 = b^2$. Zaista,

$$\begin{aligned}\left(\kappa_1 z_1\right)\left(\kappa_2 z_2\right) &\overset{(3.7)}{=} \frac{-4}{\left(u_1^{-1} - u_2^{-1}\right)^2} \overset{(3.9)}{=} M\left(u_2^{-1} - u_3^{-1}\right)^2 \left(u_3^{-1} - u_1^{-1}\right)^2 \\ &= \rho^2 \left(u_2^{-1} - u_3^{-1}\right)^2 \rho^2 \left(u_3^{-1} - u_1^{-1}\right)^2 = a^2 b^2\ ,\end{aligned}$$

pa je $\kappa_2 z_2 = b^2$, a analogno pokažemo i $\kappa_3 z_3 = c^2$.

Stoga su *a*,*b*,*c* kvadratni korijeni od $\kappa_1 z_1, \kappa_2 z_2, \kappa_3 z_3$, tim redom, i vrijedi

$$a + b + c = \rho\left(u_2^{-1} - u_3^{-1}\right) + \rho\left(u_3^{-1} - u_1^{-1}\right) + \rho\left(u_1^{-1} - u_2^{-1}\right) = 0\,.$$

Sada identitet (3.4) povlači da je

$$2\left(\kappa_1^2 z_1^2 + \kappa_2^2 z_2^2 + \kappa_3^2 z_3^2\right) - \left(\kappa_1 z_1 + \kappa_2 z_2 + \kappa_3 z_3\right)^2 = 2\left(a^4 + b^4 + c^4\right) - \left(a^2 + b^2 + c^2\right)^2 = 0.$$

Opći slučaj svedemo na ovaj slučaj u kojemu je $z_4 = 0$ slično kao što smo pokazali da je Kompleksni Descartesov teorem generalizacija običnog. Neka je $f(z)$ polinom definiran lijevom stranom u (3.3), tj.

$$f(z) = 2\sum_{j=1}^{4} \kappa_j^2 \left(z_j + z\right)^2 - \left(\sum_{j=1}^{4} \kappa_j \left(z_j + z\right)\right)^2.$$

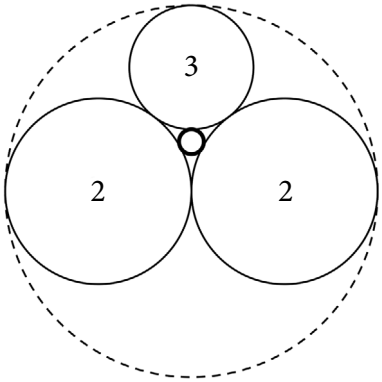
Tada *f* iščezava za $z \in \left\{-z_4, -z_3, -z_2, -z_1\right\}$ jer to znači da smo čitavu konfiguraciju translatirali tako da je središte jedne od kružnica u ishodištu. No, polinom *f* je stupnja najviše dva u *z*, a ima četiri različita korijena, pa zaključujemo da je *f* nužno nulpolinom zbog čega mu je slobodni član 0. Time smo dokazali i opći slučaj Kompleksnog Descartesovog teorema. □

Spomenimo uzgredno da Descartesov teorem ima trodimenzionalne i općenito višedimenzionalne generalizacije [2,1], ali mi ćemo za kraj krenuti u drugom smjeru.

4. Cjelobrojna Apolonijeva pakiranja kružnica

Pogledajmo još jednom fotografiju rozete (Slika 1). Vidimo da „slijepi trokut" bez vitraja koji se nalazi ispod velike kružnice polumjera 1 uopće nije omeđen lukom te kružnice. Možemo zamišljati da se donja „latica" rozete malo rastegnula te da je taj

krivolinijski trokut omeđen dvjema polukružnicama polumjera $\frac{1}{2}$ i jednom kružnicom polumjera $\frac{1}{3}$. Dopunimo li polukružnice do kružnica, dobivamo konfiguraciju sa Slike 9. pri čemu smo u kružnice upisali njihove zakrivljenosti.



Slika 9.

Zanimaju nas zakrivljenosti dviju kružnica koje dodiruju sve tri kružnice poznatih zakrivljenosti. Označimo li nepoznatu zakrivljenost s κ, Descartesov teorem, odnosno (3.1) povlači da je

$$2\left(2^2+2^2+3^2+\kappa^2\right)=\left(2+2+3+\kappa\right)^2$$

$$\kappa^2-14\kappa-15=0$$

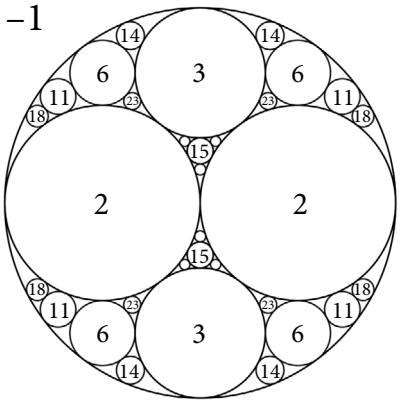
$$\left(\kappa+1\right)\left(\kappa-15\right)=0\,.$$

Dakle, zakrivljenost velike iscrtkane kružnice na Slici 9 je -1, a male podebljane kružnice je 15.

Nastavimo ovaj postupak, odnosno odredimo zakrivljenosti kružnica upisanih u neke od krivolinijskih trokuta sa Slike 9. Za pojedinu trojku kružnica lako je pomoću (3.1) izračunati zakrivljenosti dviju kružnica koje dodiruju tri kružnice s danim zakrivljenostima. Navodimo trojku zakrivljenosti te zakrivljenosti novodobivenih kružnica

$$\begin{aligned}
(2,\,2,\,3):&\quad -1,\,15\\
(-1,\,2,\,2):&\quad 3,\,3\\
(-1,\,2,\,3):&\quad 2,\,6\\
(2,\,3,\,15):&\quad 2,\,38\\
(2,\,2,\,15):&\quad 3,\,35.
\end{aligned}$$

Ove i još nekoliko novih kružnica s njihovim zakrivljenostima nacrtane su na Slici 10.



Slika 10.

Mogli bismo nastaviti računati zakrivljenosti kružnica koje umećemo u rupe između već ucrtanih kružnica tako da ih dodiruju i uvijek bismo dobivali cijele brojeve. Ako započnemo sa četiri kružnice koje se sve u parovima dodiruju u različitim točkama i zakrivljenosti su im cjelobrojne, onda će sve nove kružnice koje ovako dobivamo imati zakrivljenosti koje su cijeli brojevi. Dokažimo tu činjenicu.

Označimo zakrivljenosti početnih kružnica s *a*,*b*,*c*,*d*. Kod nas možemo uzeti da je to četvorka $(2,2,3,15)$ ili ekvivalentno $(-1,2,2,3)$. Iz Descartesova teorema je $2\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)=\left(a+b+c+d\right)^2$, a za drugu kružnicu koja dodiruje one sa zakrivljenostima *a*,*b*,*c* vrijedi $2\left(a^2+b^2+c^2+d'^2\right)=\left(a+b+c+d'\right)^2$, pri čemu smo zakrivljenost nove kružnice označili s *d*'. Dakle, *d* i *d*' zadovoljavaju istu kvadratnu jednadžbu u *x*

$$x^2-2(a+b+c)x+\left(a^2+b^2+c^2-2ab-2ac-2bc\right)=0\,. \tag{4.1}$$

Nije teško provjeriti da su rješenja te kvadratne jednadžbe

$$a+b+c\pm 2\sqrt{ab+ac+bc}$$

iz čega (ili iz Vièteovih formula) je $d+d'=2(a+b+c)$, tj.

$$d'=2(a+b+c)-d\,. \tag{4.2}$$

Sada je jasno da za cjelobrojne *a*,*b*,*c*,*d* i broj *d*' mora biti cijeli. Time je objašnjeno ponašanje koje smo uočili.

Sve kružnice koje se mogu dobiti počevši iz jedne četvorke u parovima dodirujućih kružnica s cjelobrojnim zakrivljenostima čine jedno *cjelobrojno Apolonijevo pakiranje kružnica*. Svako takvo pakiranje određeno je cjelobrojnom četvorkom zakrivljenosti koje zadovoljavaju Descartesovu jednadžbu. Ovdje zahtijevamo i da je takva četvorka relativno prosta, tj. da ne postoji broj veći od 1 koji bi dijelio svaki član četvorke.

Jedno od zanimljivih i dosta proučavanih pitanja je koji se prirodni brojevi pojavljuju kao zakrivljenosti u pojedinom pakiranju kružnica. Prvi korak u shvaćanju koji prirodni brojevi se pojavljuju je određivanje za pojedini prirodni broj n koje ostatke pri dijeljenju s n mogu davati zakrivljenosti kružnica iz pakiranja. Rezultati koji nadilaze razinu ovog članka pokazuju da je dovoljno razumjeti koje klase ostataka se pojavljuju modulo 24, odnosno modulo 3 i modulo 8.

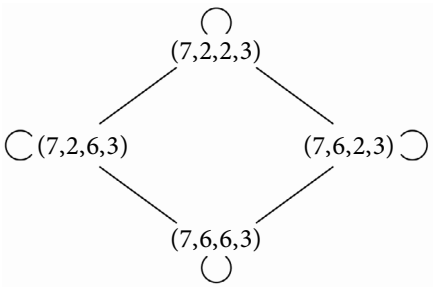
Promotrimo to na primjeru pakiranja generiranog našom četvorkom zakrivljenosti $(-1,2,2,3)$.

Modulo 3 imamo četvorku $(2,2,2,0)$, a (4.2) nam pokazuje da se iz nje dobivaju sljedeće četvorke (modulo 3)

$$(0,2,2,0),(2,0,2,0),(2,2,0,0),(2,2,2,0).$$

Primijetite da smo ovdje fiksirali tri zakrivljenosti, a novu vrijednost preostale dobili smo pomoću (4.2). Krenemo li sada od svake od tih četvorki i primijenimo (4.2) za svaki od četiri moguća izbora zakrivljenosti d, vidimo nakon nekoliko koraka da su modulo 3 jedine dopuštene četvorke one dobivene permutiranjem koordinata u $(2,2,2,0)$ i $(2,2,0,0)$.

Slično, modulo 8, krećemo od $(-1,2,2,3)$, odnosno $(7,2,2,3)$. Dobivamo sljedeći graf koji pokazuje sve četvorke zakrivljenosti modulo 8 u ovom pakiranju.



Slika 11.

Iz rezultata modulo 3 i modulo 8, zaključujemo korištenjem Kineskog teorema o ostatcima ili direktnom provjerom da se u našem pakiranju mogu pojaviti samo ove klase ostataka modulo 24: 2, 3, 6, 11, 14, 15, 18, 23.

Slično možemo dobiti dopuštene klase ostataka modulo 24 za svaku četvorku zakrivljenosti. Primjerice, za pakiranje određeno četvorkom $(-3,5,8,8)$, dopušteni ostatci su: 0, 5, 8, 12, 20, 21.

Više od desetljeća stajala je neriješena sljedeća slutnja koja kaže da je poznavanje ostatka pri dijeljenju s 24 zapravo dostatno da bismo znali pojavljuje li se neki dovoljno veliki prirodan broj kao zakrivljenost u pojedinom pakiranju kružnica.

Lokalno-globalna slutnja za cjelobrojna Apolonijeva pakiranja. *Neka je* $\mathcal{P}$ *cjelobrojno Apolonijevo pakiranje kružnica i neka je* $R(\mathcal{P})$ *skup klasa ostataka modulo 24 za zakrivljenosti kružnica u* $\mathcal{P}$. *Tada postoji prirodan broj* $X_{\mathcal{P}}$ *takav da je svaki prirodan broj* $x > X_{\mathcal{P}}$ *kojemu ostatak modulo 24 leži u* $R(\mathcal{P})$ *zaista zakrivljenost neke kružnice u* $\mathcal{P}$.

Korištenjem veze Apolonijevih pakiranja i binarnih kvadratnih formi, dokazani su različiti slabiji rezultati u prilog ove tvrdnje.

Jedan primjer poznatog rezultata u kojemu vrijedi lokalno-globalni princip je karakterizacija prirodnih brojeva koji se mogu zapisati kao suma triju kvadrata cijelih brojeva. Rezultat Legendrea i Gaussa (vidi [3, §5.4]) kaže da je neparan prirodan broj suma tri kvadrata ako i samo ako nije kongruentan 7 modulo 8. Dakle, lokalni uvjet (ostatak broja n pri dijeljenju s 8) jednoznačno određuje globalnu rješivost, tj. rješivost jednadžbe $x^2 + y^2 + z^2 = n$ u cijelim brojevima. Više i općenitije o lokalno-globalnom principu pogledajte u [3, §10.8].

Vratimo se pakiranju kružnica. U ljetu 2023. dvoje studenata pod vodstvom svojih profesora na Sveučilištu u Boulderu u Coloradu radili su projekt o Apolonijevim pakiranjima kružnica. Iz neočekivanih numeričkih rezultata koje su dobili za neka pakiranja, najprije su naslutili, a zatim zajedno sa svojim nastavnicima i dokazali da lokalno-globalna slutnja za Apolonijeva pakiranja općenito ne vrijedi. Primjerice, za pakiranje određeno zakrivljenostima $(-3, 5, 8, 8)$ koje smo netom spomenuli, pokazali su da se potpuni kvadrat nikada neće pojaviti kao zakrivljenost. No, to znači da ima beskonačno mnogo prirodnih brojeva kongruentnih 0 ili 12 modulo 24 koji se ne pojavljuju kao zakrivljenosti u ovom pakiranju iako su te dvije klase ostataka među šest dopuštenih klasa koje smo naveli. Dakle, lokalno-globalna slutnja za ovo pakiranje ne vrijedi.

Tako je studentski ljetni projekt iznenadio mnoge matematičare koji su se tim problemom godinama bavili, a završio je s rezultatima objavljenim u jednom od najprestižnijih matematičkih časopisa *Annals of Mathematics* [5].

Uz zanimljivi matematički članak [4] o usponu i padu (te modifikaciji) lokalno-globalne slutnje za Apolonijeva pakiranja, možete pročitati i popularno pisani novinski članak [8] o sudionicima ove priče.

Spomenimo još na kraju da za pakiranje određeno kružnicama sa zakrivljenostima $(-1, 2, 2, 3)$ na koje nas je nadahnula rozeta u grkokatoličkoj konkatedrali još uvijek nije poznato da li lokalno-globalna slutnja vrijedi ili ne.

Literatura:

1. A. Bradford, An even more straightforward proof of Descartes's circle theorem, Math. Intelligencer 45 (2023.), no. 3, 263–265.
2. H.S.M. Coxeter, Loxodromic sequences of tangent spheres, Aequationes Math. 1 (1968.), 104–121.
3. A. Dujella, Teorija brojeva, Školska knjiga, Zagreb, 2019.
4. E. Fuchs, Apollonian packings: The rise and fall of the local to global conjecture, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 63 (2026.), no. 1, 59–77.
5. S. Haag, C. Kertzer, J. Rickards, K.E. Stange, The local-global conjecture for Apollonian circle packings is false, Ann. of Math. (2) 200 (2024.), no. 2, 749–770.
6. J.C. Lagarias, C.L. Mallows, A.R. Wilks, Beyond the Descartes circle theorem, Amer. Math. Monthly 109 (2002.), no. 4, 338–361.
7. P. Levrie, A straightforward proof of Descartes's circle theorem, Math. Intelligencer 41 (2019.), no. 3, 24–27.
8. M.G. Levy, Two Students Unravel a Widely Believed Math Conjecture, Quanta Magazine, https://www.quantamagazine.org/two-students-unravel-a-widely-believed-math-conjecture-20230810/ (10. 8. 2023.)
9. A. Tupan, On the complex Descartes circle theorem, Amer. Math. Monthly 129 (2022.), no. 9, 876–879.