Vizualizacija dokaza Pitagorina poučka pomoću *GeoGebre*

Lucija Brekalo Mandić[1]

Uvod

Pitagorin poučak jedna je od najslavnijih matematičkih tvrdnji koje su oblikovale razvoj geometrije i cijele matematike. Značenje Pitagorina poučka nadilazi granice nastave i njegovo poznavanje smatra se općom kulturom. U povijesti matematike postoji više od stotinu različitih dokaza Pitagorinog poučka, među kojima se posebno ističu geometrijski, algebarski te vizualni pristupi. U nastavi, Pitagorin poučak predstavlja izvrsnu priliku da se učenike uključi u istraživački rad i dublje razumijevanje dokaza kao matematičke prakse. Dokaz u matematici nije samo formalna potvrda tvrdnje, nego i sredstvo razvijanja logičkog mišljenja, kritičkog stava, te matematičke pismenosti i komunikacije.

U nastavnom procesu dokazivanje Pitagorinog poučka može se realizirati kroz raznolike aktivnosti: problemske zadatke, kvizove, istraživanje povijesnih dokaza te primjenu jednostavnijih digitalnih alata poput *GeoGebre* koja omogućuje istraživački pristup i vizualno otkrivanje matematičkih odnosa. U [1] je pokazano kako se *GeoGebra* može koristiti za vizualizaciju dokaza Pitagorinog poučka. U ovom ćemo se radu osvrnuti na dokaz na kojem se zasniva ta vizualizacija.

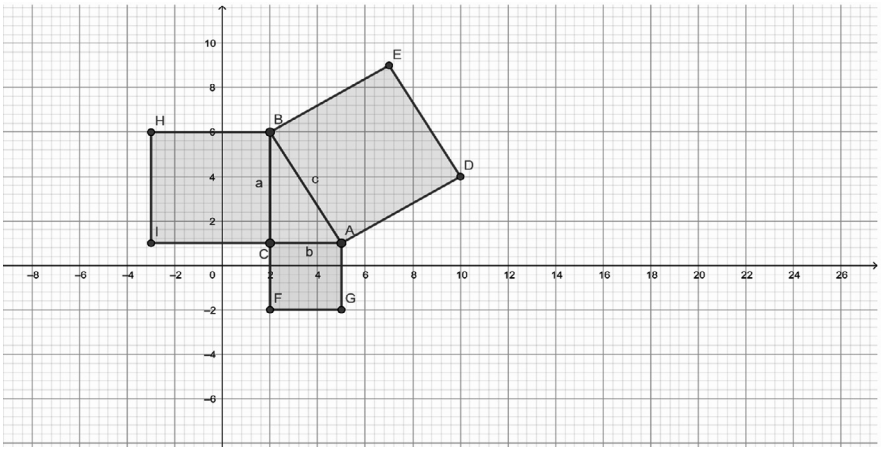
Vizualizacija dokaza Pitagorina poučka pomoću *GeoGebre*

GeoGebra je računalni program koji se može koristiti u istraživanju i učenju matematike. U [1] ga koristimo kao alat za vizualizaciju dokaza Pitagorina poučka. Dokaz počiva na odnosu površina kvadrata konstruiranih nad stranicama pravokutnog trokuta. Kvadrate rastavljamo na mnogokute te pokazujemo da se odgovarajućim translacijama kvadrat nad hipotenuzom može rastaviti na dijelove koji se podudaraju s dijelovima kvadrata nad katetama. Animaciju translacija mnogokuta prikazujemo u *GeoGebri* uz sljedeće upute [1].

a) Konstruirajte pravokutni trokut ABC s pravim kutom u vrhu C i tri kvadrata nad svakom njegovom stranicom. Stranice $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ su katete, a stranica $\overline{AB}$

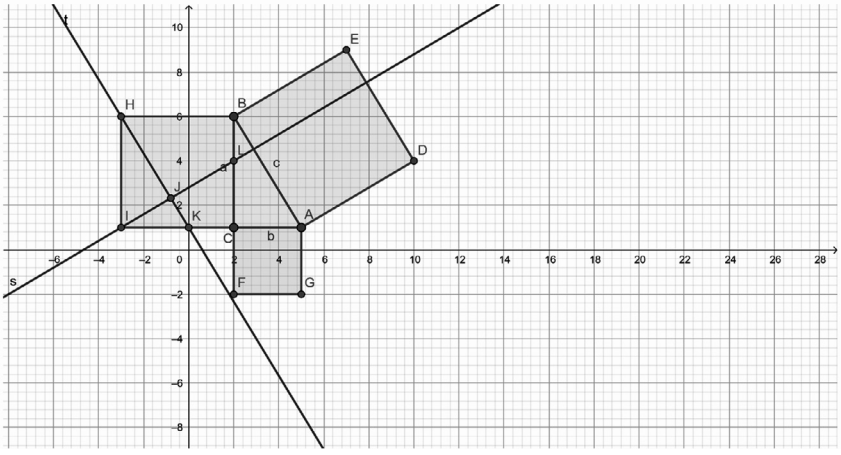
[1]Lucija Brekalo Mandić, Zagreb

hipotenuza tog trokuta. Nad svakom se stranicom trokuta prema van konstruira kvadrat: kvadrat *CFGA* nad stranicom $\overline{AC}$, kvadrat *BHIC* nad stranicom $\overline{BC}$ te kvadrat *ADEB* nad hipotenuzom $\overline{AB}$.



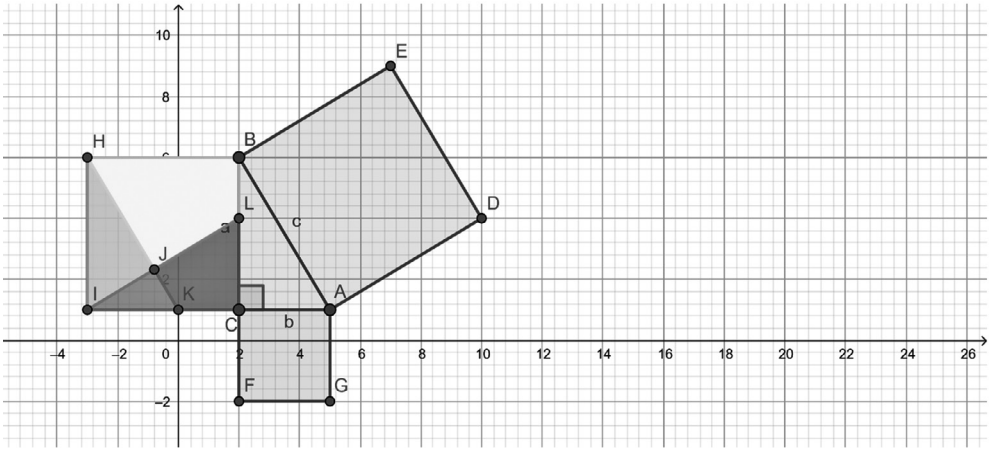
Slika 1. Pravokutni trokut i tri kvadrata nad svakom stranicom trokuta

b) Vrhovima *I* i *H* kvadrata *BHIC* nacrtajte pravce paralelne stranicama kvadrata *ADEB* i odredite njihove presječne točke na sljedeći način: na stranici $\overline{BC}$ je točka *L*, a na stranici $\overline{IC}$ točka *K*. Sjecište tih pravaca (u unutrašnjosti kvadrata *BHIC*) je točka *J*. Nakon toga možete sakriti pravce.



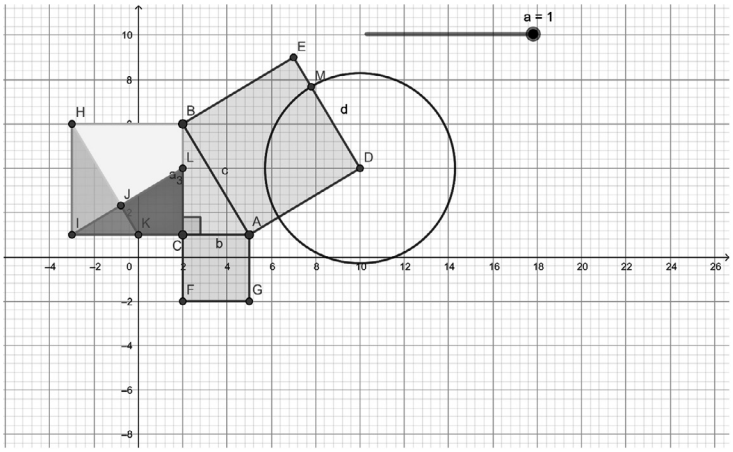
Slika 2. Prikaz dvaju pravaca koji se sijeku u točki J

c) Nacrtajte mnogokute i obojite ih različitim bojama radi bolje vizualizacije: unutar kvadrata nad stranicom $\overline{BC}$ istaknite četiri mnogokuta: *JLBH*, *JHI*, *JIK* i *JKCL* Svakom mnogokutu dodijelite različitu boju, uključujući i kvadratu *CFGA*.



Slika 3. Prikaz mnogokuta u kvadratu BHIC

d) Nacrtajte potom kružnicu sa središtem u točki D i polumjerom $\overline{JH}$. Označite s M presjek nacrtane kružnice i dužine $\overline{DE}$ te izradite klizač a s parametrima: $min = 0$, $max = 1$, *povećanje* = 0.01, *brzina* = 3 i *način* = *odjednom*.

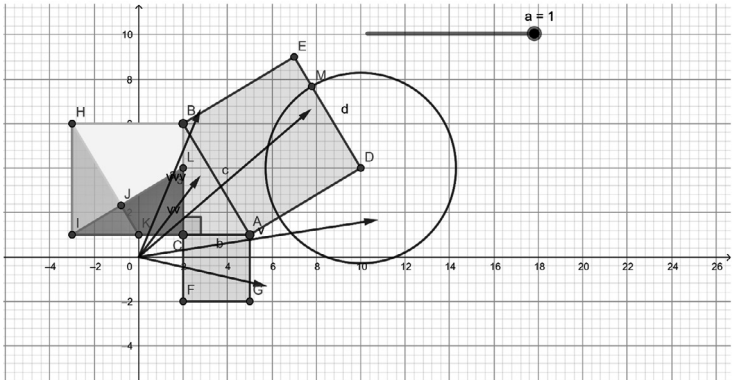


Slika 4. Kružnica (D, |JH|) i klizač a

e) Nacrtajte vektore i definirajte translacije mnogokuta na sljedeći način:

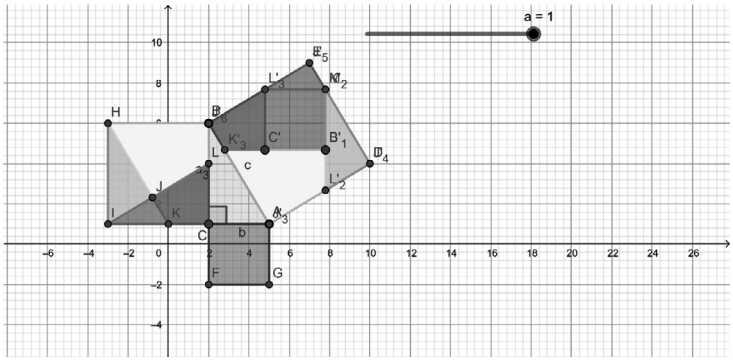
1. $\vec{u} = a \cdot vektor(J, E)$
2. $\overrightarrow{vv} = a \cdot vektor(J, D)$
3. $\overrightarrow{vvv} = a \cdot vektor(J\ B)$
4. $\overrightarrow{tt} = a \cdot vektor(J, A)$
5. $\overrightarrow{rr} = a \cdot vektor(A, M)$

Odaberite opciju „*Translacija objekta za vektor*" te pomoću definiranih vektora translatirajte mnogokute prema kvadratu *ADEB*.



Slika 4. Vektori pomoću kojih se vrši translacija mnogokuta

f) Možete zatim pokrenuti klizač kako bi se prikazao dokaz Pitagorina poučka.



Slika 5. Dokaz Pitagorinog poučka preslagivanjem mnogokuta

GeoGebra sada prikazuje animaciju kojom se, pomicanjem klizača od $a = 0$ do 1, mnogokuti s kvadrata nad katetama preslaguju u kvadrat nad hipotenuzom.

Dokaz Pitagorina poučka

Opisana vizualizacija dokaza Pitagorina poučka pomoću translacije mnogokuta vektorima primjerena je za rad s učenicima osnovne škole, osobito u višim razredima. Umjesto da se poučak predstavlja samo algebarskom formulom $a^2 + b^2 = c^2$, on dobiva geometrijsko značenje koje je učenicima pristupačnije. Animacija omogućuje vizualizaciju translacija kojima se dijelovi kvadrata nad katetama točno preslože u kvadrat nad hipotenuzom. Učenicima je bitno naglasiti da vizualizacija nije dokaz, to jest da se radi o pažljivo konstruiranim translacijama što se može i precizno matematički dokazati. Slijedi skica dokaza na kojem se temelji vizualizacija.

1. Po konstrukciji je četverokut *ABHK* paralelogram Zbog toga je trokut *KHI* sukladan trokutu *ABC*, odakle $|IK|=|AC|$ i $|HK|=|AB|$.
2. Trokut *KHI* sukladan je trokutu *LIC* jer su oba pravokutna, $|\angle KHI|=|\angle LIC|$ (kutovi s okomitim kracima) i $|HI|=|IC|$.
3. Iz 1. i 2. slijedi $|IK|=|LC|=|AC|$, a odatle i $|KC|=|BL|$.
4. Kako je pravac *IJ* paralelan s *BE*, *JK* paralelan s *BA* i *IK* paralelan s *AC*, slijedi da se translacijom za vektor $\overrightarrow{JE}$ točka *I* preslikava u točku *X* koja leži na $\overline{EB}$, točka *K* u točku $Y \in \overline{DE}$, te da je *XY* paralelno s *AC*.
5. Kako je *IL* paralelno *EB*, translacijom za vektor $\overrightarrow{JB}$, točka *L* se translatira u točku koja leži na $\overline{EB}$. Iz 3. i 4. slijedi da je to nužno točka *X*. Slično se pokaže da se translacijom točke *H* za vektor $\overrightarrow{JD}$ dobiva upravo točka *Y*.
6. Analogno se vidi da se translacijom točke *K* za vektor $\overrightarrow{JB}$ dobiva ista točka kao i translacijom točke *H* za vektor $\overrightarrow{JA}$, te da ta točka leži na stranici $\overline{AB}$. Isto tako, translacijom točke *I* za vektor $\overrightarrow{JD}$ dobiva ista točka kao i translacijom točke *L* za vektor $\overrightarrow{JA}$ i ta točka leži na stranici $\overline{AD}$.
7. Označimo sa *Z* točku dobivenu translacijom točke B za vektor $\overrightarrow{JA}$, te s *W* točku dobivenu translacijom točke *C* za vektor $\overrightarrow{JB}$. Kako translacija čuva kutove, slijedi da je četverokut *XYZW* pravokutnik. Kako je $|XY|=|IK|=|AC|$ i $|XW|=|LC|=|AC|$, slijedi da je *XYZW* sukladan kvadratu *ACFG* čime je dokazano da se dijelovi kvadrata nad katetama točno preslože u kvadrat nad hipotenuzom.

Zaključak

U ovom radu je prikazano da se dostupna i jednostavna tehnologija može koristiti kao izvor učenja, za vizualizaciju dokaza i provjeru Pitagorina poučka korištenjem programa *GeoGebra*. Dokaz se oslanja na translacije u ravnini čime učenici dobivaju priliku usvajati i svojstva temeljnih geometrijskih transformacija. Aktivnosti je lako moguće prilagoditi tako da ne čine unaprijed zadan i zatvoren skup instrukcija, već da učenike usmjeravaju na samostalno otkrivanje Pitagorina poučka i njegova dokaza.

Literatura

1. Brekalo Mandić, L. *Dokaz Pitagorina Poučka pomoću GeoGebre*, Matka 34 (2025./2026.) br. 135, 202 – 207.
2. Faris, M. N. (2018.). Using Technology in Mathematics: Discover and Prove Pythagorean Theorem with *GeoGebra. Proceedings of the 2nd International Conference on Learning Innovation - Volume 1,* 21-25.
3. The Improving Mathematics Education in Schools (TIMES) Project. (2011., June). Measurement and Geometry: Module 15 – Pythagoras' Theorem. AMSI