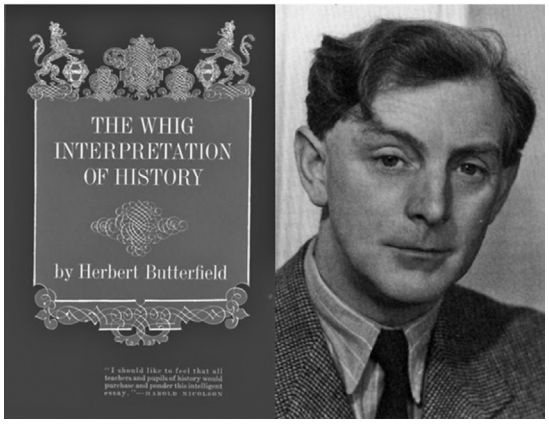
Vigovska povijest i numerički sustavi

Zvonimir Šikić[1]

Vigovci i protuvigovci

Postoje dva pristupa povijesti matematike, onaj vigovski (*Whiggish*) koji je tipičan za matematičare i onaj protuvigovski koji je tipičan za povjesničare. Povjesničar Herbert Butterfield bio je prvi koji je opisao i osudio ono što je nazvao *vigovskom interpretacijom povijesti*. To je po njemu „proučavanje prošlosti koje jednim okom gleda sadašnjost i ono je izvor svih grijeha i sofizama u povijesti". Posebno je prezirao povjesničare koji prošlost podvrgavaju suvremenoj moralnoj prosudbi, držeći da to nikako nije posao povjesničara. Sljedeći naraštaji povjesničara gorljivo su preuzeli Butterfieldovu zabranu. Biti vigovac povjesničarima je postalo jednako odbojno kao biti seksist ili eurocentrik.

Nije bila pošteđena ni povijest znanosti. Kako bi izbjegli optužbu *vigizma*, povjesničari znanosti napustili su narativ o znanstvenom napretku pa čak i o „široj slici" bilo koje vrste. Fokusirali su se na prikaze malih ograničenih epizoda, čvrsto fokusiranih u prostoru i vremenu.



Vigovska povijest prošlost predstavlja kao linearnu progresiju prema modernosti, često s implikacijom da se suvremene ideje i vrijednosti vide kao neminovni rezultat povijesnog razvoja. Ta je perspektiva posebno relevantna za povijest znanosti jer nudi dosljedni narativ koji povezuje prošli razvoj sa sadašnjim znanjem. To onima koje zanima suvremena znanost olakšava da se, kroz evoluciju njenih koncepata i ideja, s tom znanosti još bolje upoznaju. Zato je vigovska povijest znanosti posebno važna u obrazovnom kontekstu.

[1]Zvonimir Šikić, Zagreb

Kritičari vigovske povijesti tvrde da njezino pojednostavljivanje složene prošlosti zanemaruje razgranatu prirodu povijesnog razvoja, što može dovesti do pogrešnih tumačenja razloga za prihvaćanje ili odbijanje određenih ideja. Oni smatraju da je posebno opasna vigovska tendencija zanemarivanja neuspjeha koji su dio povijesnog procesa, jer ti neuspjesi mogu pružiti dragocjene uvide u vrijeme u kojem su se zbili. Ukratko, oni drže da vigovska povijest marginalizira alternativne perspektive i ideje koje nisu dovele do modernosti kakvu poznajemo i da se time okljaštruje bogatstvo i raznolikost povijesne misli.

Kada se primjenjuje na povijest matematike, očita je prednost vigovske povijesti da razotkriva evoluciju matematičkih koncepata (npr. razvoj pojma algebarske strukture) i jasno pokazuje kako suvremena matematika proizlazi iz nekadašnje (npr. kako moderna teorija algebarskih struktura proizlazi iz teorije idealnih brojeva). Ali ona često ignorira doprinose *nezapadnih* matematika, utjecaje društveno-političkih konteksta i smjerove matematičke misli koja se ne uklapaju u smjer koji vodi prema suvremenoj matematici.

U sukobu ovih pristupa važan je faktor da su protuvigovci uglavnom povjesničari koji nisu matematičari. Oni dobro vladaju povijesnim metodologijama, ali nedostatak matematičkog znanja ograničava njihovu sposobnost da u potpunosti shvate sve nijanse matematičkog razvoja. To često dovodi do pogrešnih tumačenja i do neprepoznavanja istih ideja u različitim prezentacijama.

Nasuprot tome, matematičarima koji se bave povijesnom analizom svoje discipline nedostaje obuka u povijesnim metodama. To može dovesti do anakronističkih tumačenja ili neuvažavanja šireg povijesnog i kulturnog konteksta u kojem je nastajala prošla matematika.

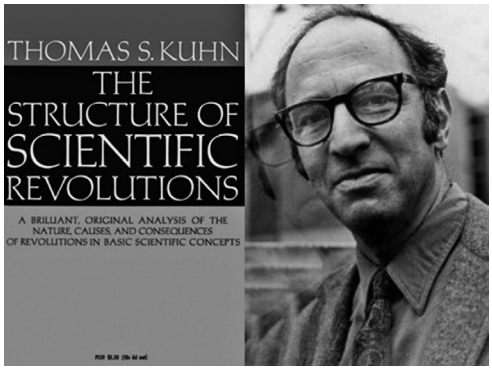
Idealan bi bio interdisciplinarni pristup koji bi premostio taj jaz i omogućio sveobuhvatnije istraživanje o tome kako su matematičke ideje evoluirale i kako su bile shvaćene u svoje vrijeme. Nažalost, taj se ideal rijetko realizira, jer vigovce primarno zanima kako je povijesno nastala suvremena matematika, dok protuvigovce primarno zanima prošla matematika potpuno neovisno o suvremenoj (koju često i ne znaju).

Posebnost povijesti znanosti

Vjerojatno nije moguće govoriti o ispravnom i pogrešnom u povijesti umjetnosti ili religije, pa čak ni u političkoj povijesti, ali u znanstvenoj povijesti najčešće možemo reći tko je bio u pravu. Možda, kako je tvrdio Butterfield, „nikada nećemo moći reći da su daljnji tijek događaja ili protok vremena dokazali da je Luther bio u pravu protiv pape". Međutim, s velikom sigurnošću možemo reći da je protok vremena pokazao da je u pravu bio Kopernik (a ne Ptolemejeve pristaše) ili Newton (a ne Descartesovi sljedbenici). Povijest znanosti ima posebne značajke koje opravdavaju vigovsku interpretaciju. Osim toga povijest znanosti ima još jedan aspekt koji profesionalnim povjesničarima naprosto onemogućava da jednim okom gledaju sadaš-

njost, htjeli oni to ili ne. Naime, povjesničarima koji sami nisu, ili nisu bili, znanstvenici često nedostaje razumijevanje suvremene znanosti.

Ovdje ne branim matematičare kao povjesničare, nego želim naglasiti da inzistiranje na ideološkom polaritetu *povjesničar vs. matematičar* čini više štete nego koristi, jer zamagljuje jedinu moguću osnovu za procjenu rada u povijesti matematike, kompetentnu znanost. Na primjer, povjesničari protuvigovci rutinski sumnjiče matematičare vigovce za platonističku vjeru u jednu jedinu istinsku matematiku, a dovoljno je vidjeti bogatu vigovsku povijest infinitezimalnog računa da se shvati koliko je to daleko od istine.

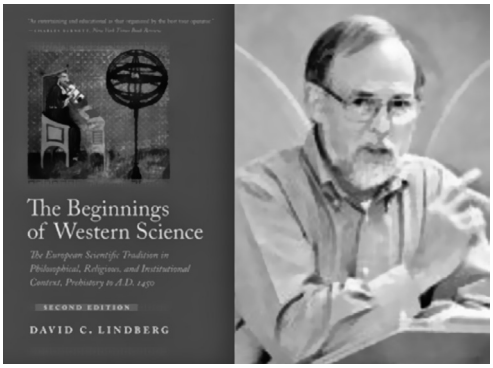


Naravno, matematičara koji želi pisati o povijesti matematike, a koji nije dovoljno upoznat s povijesnim razdobljem i primarnim dokumentima, treba kritizirati jednako kao i povjesničara koji nije dovoljno upoznat s matematikom da bi razumio finese i sve implicitne aspekte onoga što sadrži razmatrana matematika.

Thomas Kuhn (iako i sam bivši znanstvenik) ustvrdio je 1968. da bi «povjesničar trebao ostaviti po strani znanost koju zna." Još beskompromisniji stav protiv korištenja postojećeg znanja zauzeo je novi naraštaj sociologa znanosti koji znanost proučavaju kao društveni fenomen, bilo u varijanti R. K. Mertona koja čak i sam kognitivni sadržaj znanosti izostavlja iz sociološkog istraživanja, bilo u varijanti bližoj Kuhnu, koja ipak pokušava naći sociološka objašnjenja samih znanstvenih ideja.

U međuvremenu nije nedostajalo ni branitelja vigovske povijesti znanosti, posebno među onima koji su poput Ernsta Mayra ili Stevena Weinberga, i dalje radili kao znanstvenici. Oni svoj znanstveni rad ne vide samo kao izraz kulture prostora i vremena u kojem djeluju, nego ga vide kao posljednju fazu u procesu razumijevanja i objašnjavanja svijeta; procesa koji se proteže tisućljećima u prošlost. Taj dugi razvoj nema smisla ako ne prepoznamo da su neki bili u krivu, a neki u pravu, a to možemo učiniti samo iz perspektive našeg sadašnjeg znanja, koliko god je ono nesavršeno i podložno daljnjim promjenama.

David C. Lindberg u *Počecima zapadne znanosti* piše da odgovarajuća mjera znanstvene teorije nije stupanj do kojeg je anticipirala modernu misao, već stupanj uspjeha u tretiranju znanstvenih problema vlastitog doba. Koji je smisao ovakvog stava? Da poanta znanosti nije razumjeti svijet, nego odgovoriti na pitanja koja su bila popularna u nekom vremenu? Da je povijest znanosti priča o intelektualnim modama koje se slučajno smjenjuju, a ne povijest otkrivanja istine? Koliko god Thomas



Kuhn i njegovi još radikalniji sljedbenici negirali znanstveni napredak, znanstvenici ga jasno vide (čak i u svojim kratkim životima, a kamoli u povijesti njihove znanosti). Stoga vigovska povijest nije samo jedna od nekoliko jednako vrijednih vrsta povijesti znanosti, nego ima primat.

I sam Butterfield imao je osjećaj za legitimnost vigizma u povijesti znanosti. U svojim predavanjima o povijesti znanosti (1948. na Cambridgeu) dao je veliku povijesnu važnost znanstvenoj revoluciji, koju nikada ne bi dao engleskoj *Glorious Revolution* (toliko voljenoj od izvornih vigovaca). Uostalom, već u *The Whig Interpretation of History*, Butterfield je prihvaćao vigovsko tumačenje povijesti pod nekim uvjetima. Na primjer, ako je moralnost «apsolutni sustav, jednako obvezujući za sva mjesta i vremena", tada bi povjesničar «trebao pratiti priču o rastućoj svijesti ljudi o moralnom poretku i o njihovom postupnom otkrivanju tog poretka". Butterfield nije vjerovao da postoji apsolutni moralni poredak koji nam otkrivaju povijest ili religija pa je zato odbacivao vigovsku povijest moralnog poretka, ali nije sumnjao da postoje zakoni prirode, jednako obvezujući za sva mjesta i sva vremena, što opravdava vigizam u povijesti znanosti.

Dakle, matematičare zanima povijest čiji je rezultat suvremena matematika jer im ta povijest olakšava da se kroz evoluciju koncepata i ideja suvremene matematike bolje upoznaju s baš tom suvremenom matematikom. A prošle matematike koje nemaju povijesnu vezu sa suvremenom matematikom rado prepuštaju povjesničarima.

Primjer zapisivanja brojeva

Dobar primjer vigizma u povijesti matematike je odnos prema povijesti numeričkih notacija, posebno prema povijesti nepozicijskih sustava (rimskih, grčkih i inih) u opreci prema pozicijskim sustavima (s bazom 60, 10 ili nekom drugom).

Povjesničari se često pitaju zašto je trebalo tisuću godina da pozicijski sustav u općoj uporabi zamijeni nepozicijski sustav (ili konkretnije, zašto je trebalo tisuću godina da arapske brojke zamijene rimske brojke).

Pozicijski je sustav od antike, i to bez prestanka, prevladavao tamo gdje je trebalo



XVIII je katkada i XIIX (epitaf centuriona Marcusa 1.st.)

efikasno provoditi velike račune i sustavno zapisivati rezultate tih računa, dakle u astronomiji i njenim efemeridama. U trgovini, gdje je obim računa bio manji, vladao je abak kojem nisu trebale nikakve brojke.

Na pitanje zašto je tako dugo trebalo da pozicijski sustav iz astronomije i matematike uđe u opću uporabu, odgovor je isti kao i na pitanje zašto ikakvoj matematici treba tako dugo da uđe u opću uporabu. To se neće dogoditi dok god za to nema opće potrebe (jer u znanosti već imate pozicijski sustav, a u trgovini imate abak), a nema ni školovanja koje bi zadovoljilo tu još nepostojeću opću potrebu (ono će se pojaviti tek onda kada se pojavi ta potreba). Uostalom, zapitajte se zašto su trebala tisućljeća da pismenost prestane biti ekskluzivna i postane opća. Odgovor je isti.

Ili (ako se vratimo matematici), poznato je da u sveučilišno matematičko obrazovanje suvremena matematika ulazi sa zakašnjenjem od 50 do 100 godina (ε, δ -analiza koja je zamijenila infinitezimalnu analizu u drugoj polovici 19. st. ušla je u redovnu sveučilišnu nastavu u drugoj polovici 20. stoljeća, a rehabilitirana infinitezimalna analiza iz 1960-tih nije u nastavu ušla do dan-danas).

Još je važnije za našu temu da nepozicijski sustavi, npr. rimske brojke, vigovskim povjesničarima matematike zapravo nisu zanimljivi. Decimalna varijanta pozicijskog sustava olakšala je mnoga matematička otkrića. Čak možemo reći da je europska matematika i znanost procvjetala dobrim dijelom zbog Stevinovog uvođenje realnih brojeva kao decimalnih (konačnih i beskonačnih) razvoja. S druge strane, rimske su brojke, kao i drugi nepozicijski sustavi, slijepa ulica iz koje se dalje ne može razviti nikakva matematika. Oni su kočnica za otkriće logaritama, za analitičku geometriju, za diferencijalni i integralni račun, za algebru; ukratko za svu matematiku od renesanse na dalje. Dakle radi se o neuspjehu koji bez obzira na protuvigovska upozorenja nije važan dio povijesnog razvoja matematike jer nema tog dijela suvremene matematike (bilo elementarne, bilo više) koji se nadovezuje na bilo koju ideju koju nalazimo u nepozicijskim sustavima. Zato je očekivano da vigovci (koje zanima ona povijest koja rezultira suvremenom matematikom) rimske brojke i općenito nepozicijske sustave ne drže zanimljivom temom.

Još jedan tipično protuvigovski stav je da se povijest, onako kako se dogodila, nije morala dogoditi. Na primjer, da logaritmi nisu morali biti otkriveni. Matematičar, baš iz suvremenog razumijevanja matematike, razumije da se to otkriće moralo dogoditi. Naime, nakon što je Simon Stevin uveo realne brojeve kao sustav konačnih i beskonačnih decimalnih razvoja s aditivnom i multiplikativnom strukturom (tj. sa zbrajanjem i množenjem), bilo je neminovno da će mnogi prepoznati da je aditivni sustav svih realnih brojeva izomorfan multiplikativnom sustavu pozitivnih realnih brojeva. Pogotovo zato što je taj izomorfizam od pamtivijeka prisutan kao veza aritmetičkih i geometrijskih redova. A taj izomorfizam nije ništa drugo do logaritamska funkcija. Taj primjer je dobra ilustracija prethodno iznesene teze da „nedostatak matematičkog znanja ograničava sposobnost protuvigovaca da u potpunosti shvate sve nijanse matematičkog razvoja".

U vezi s tim je i protuvigovska ideja o kontingentnosti povijesti - stvari su se mogle dogoditi i drugačije nego su se dogodile. Koliko god ta ideja bila plauzibilna u općoj povijesti, u povijesti matematike ta se plauzibilnost donekle gubi. Ne smiju nas zavarati (od protuvigovaca često spominjane) različite matematike različitih kultura i civilizacija.

Zapravo je šokantno koliko su često te „različite" matematike zapravo iste. No, problem povjesničara koji nisu matematičari jest da oni ne prepoznaju to isto kada je u raznim opravama. Samo je matematičar mogao prepoznati Pitagorine trojke na plimptonu 322 iz 1800. pr. Kr. ili kineski teorem o ostacima u svim njegovim povijesnim izdanjima ili Taylorov teorem u ranijim indijskim spisima (s druge strane, istina je da matematičari vigovci često zanemaruju te oprave i njihov povijesni značaj jer ih zanima, ponovimo još jednom, povijest koja je temelj suvremene matematike).

U sljedećim odjeljcima prikazujemo vezu pozicijskih sustava s prirodnim logaritmima, Taylorovim i Laureantovim razvojima i Fermatovim malim teoremom. To su povijesno informirani prikazi tih matematičkih tema, koji nisu njihova povijest. No, povjesničaru koji se bavi tim temama (a i šire, poviješću numeričkih sustava) razumijevanje tih veza omogućava bolje razumijevanje te povijesti i njezinih veza sa suvremenom matematikom. Kroz te konkretne veze u ovim konkretnim slučajevima želimo pokazati da je poželjno da povjesničar koristi razumijevanje matematike koju zna, umjesto da je „ostavi po strani" kako to predlaže Khun.

Otkriće prirodnih logaritama

Rimski sustav brojki (kao i mnogi drugi nepozicijski sustavi zapisivanja brojki) nema nikakav sistematski način prikaza razlomaka, i to ga čini lošim sustavom notacije brojeva čak i ako (kako to ponavljaju protuvigovci) „ne služi računanju nego samo prikazu veličina". Veličine jednostavno nisu samo cjelobrojne.

S druge strane, zbrajanje i oduzimanje relativno se jednostavno izvodi i na abaku i s arapskim decimalnim zapisima na papiru, no u oba slučaja množenje i dijeljenje znatno je složenije. Stoga je jedan od glavnih problema pri glomaznim računima (npr. u astronomiji) bio svesti množenje i dijeljenje na zbrajanje i oduzimanje. Kao što znaju srednjoškolci, ili su bar znali u moje srednjoškolsko doba, tome služe logaritamske tablice. No, gotovo nijedan srednjoškolac, ni danas ni onda, ne zna kako su one konstruirane. A ta konstrukcija jasno pokazuje zašto je rimska notacija potpuno neprimjerena rješavanju tog važnog problema efikasnosti.

Mnoge iznenađuje činjenica da su prvi otkriveni logaritmi bili prirodni logaritmi. To su logaritmi s krajnje neobičnom bazom e

$$e \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2.71828... \ .$$

Još će se više iznenaditi kada doznaju da su oni prvi otkriveni jer se najlakše izračunavaju. Čuđenje je opravdano ako se logaritamska tablica gleda kao računanje potencija:

y	0	1/2	1	3/2	2	...
$x = e^y$	1	$e^{1/2} \quad \sqrt{e}$	e	$e^{3/2} = e\sqrt{e}$	e^2	...

Međutim, logaritmi su otkriveni na drugi način. U vrijeme njihova otkrića, razlomljene potencije b^q, gdje je q razlomak, još nisu ni poznate. Eksponenti su u to vrijeme bili isključivo prirodni brojevi 1, 2, 3... Zato ne može biti govora o funkciji e^y definiranoj čak ni za y-ne koji su razlomci, a kamoli realni brojevi. Unatoč tome, prirodni logaritmi su uspješno definirani za svaki pozitivni realni broj x. Dodajmo i to da u vrijeme njihova otkrića, još nije bio otkriven infinitezimalni račun. Kako se to dogodilo?

Odavno je bilo poznato da tablice cjelobrojnih potencija, poput $x = 2^Y$, omogućavaju da se množenje i dijeljenje svede na zbrajanje i oduzimanje.

Y	0	1	**2**	3	**4**	5	**6**	...
$x = 2^Y$	1	2	**4**	8	**16**	32	**64**	...

Na primjer, želite li pomnožiti 4 i 16 (u x-retku) nađite njima pridružene brojeve 2 i 4 (u Y-retku) i zbrojite ih, 2 + 4 = 6. Broj koji je (u x-retku) pridružen broju 6 traženi je umnožak 64

$$4 \cdot 16 = 64 \Leftrightarrow 2 + 4 = 6.$$

Dakle, dva broja x-retka množimo tako da zbrojimo njima pridružene brojeve Y-retka. Ti pridruženi Y-brojevi nazvani su logaritmima x-brojeva

$$x_1 \cdot x_2 = x_3 \Leftrightarrow Y_1 + Y_2 = Y_3 .$$

Paul Wittich, asistent Tycho Brahea, već je u 16. st. uveo metodu koja je množenja svodila na zbrajanja i oduzimanja uz pomoć trigonometrijskih tablica. Nazvao ju je *prostefereza* (što znači zbrajanje-oduzimanje). Na primjer,

$$61620 \cdot 45318 = ?$$

$$0.61620 = \sin 38.039^\circ \qquad 0.45318 = \sin 26.948^\circ$$

$$\sin\alpha \sin\beta = \left(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\right)/2$$

$$\left(\sin 38.039^\circ\right)\left(\sin 26.948^\circ\right) = \left(\cos 11.091^\circ - \cos 64.987^\circ\right)/2$$

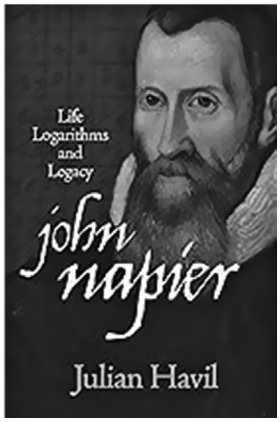
$$= (0.9813219765 - 0.42282294)/2 = 0.279249516$$

$$61620 \cdot 45318 = 2792495160$$

No vratimo se tablici $x = 2^Y$. Njezina praktična vrijednost zanemariva je zbog velikih „rupa" među dostupnim x-ovima (za razliku od trigonometrijskih tablica koje

su dovoljno „guste"). Pitanje je bilo kako dobiti finiju razdiobu x-ova. Na ovo su pitanje istovremeno i neovisno odgovorili Jost Bürgi i John Napier 1619. godine.





Danas bismo sigurno odgovorili: finijom razdiobom Y-a, koju nam omogućavaju razlomljeni eksponenti (kao u prvoj od gornjih tablica). Ali to vodi k izračunavanju korijena, što odgovor čini računski bezvrijednim. Uostalom, već smo rekli da u vrijeme Bürgija i Napiera potencije s razlomljenim eksponentima nisu bile poznate, pa to nije mogao biti njihov odgovor. Oni su zadržali cjelobrojne eksponente i baš su time utrli put otkriću prirodnih logaritama.

Neka varijabla Y prima pozitivne cjelobrojne vrijednosti. Kako ćemo dobiti finiju razdiobu x-ova? „Najfiniju" razdiobu dobijemo kada kao bazu uzmemo $b = 1$. Tada se svi x-ovi stope u broj 1, što je najveće moguća „gustoća", ali takva je „razdioba" neupotrebljiva. Upotrebljivu i finu raspodjelu x-ova dobijemo za $b \approx 1$. Bürgi je odabrao bazu $b = 1.0001$, a Napier $b = 0.9999999$. Pokazat ćemo kako se prirodni logaritmi dobivaju Bürgijevim izborom.

Za $Y = 1, 2, 3...$ odgovarajuće x-ove dobijemo potenciranjem $x = 1.0001^Y$. Ali, da bi izračunao, na primjer 1.0001^{131}, Bürgi nije množio 1.0001 sam sa sobom 131 puta. Tko bi ikada došao do tablice logaritama na takav način? Naravno, svakome će pasti na pamet da koristi prethodno izračunatu vrijednost, na primjer vrijednost 1.0001^{130} za računanje sljedeće vrijednosti 1.0001^{131}

$$1.0001^{131} = 1.0001^{130} \cdot 1.0001.$$

To je nešto bolje. No Bürgi je znao još bolje. On je već izračunati x koristio za izračunavanje **prirasta** do sljedećeg x-a. Dakle, za $x = 1.0001^Y$, on traži Δx takav da bude

$$x + \Delta x = 1.0001^{Y+1}.$$

Dakle,

$$\Delta x = (x + \Delta x) - x = 1.0001^{Y+1} - 1.0001^Y = 1.0001^Y (1.0001 - 1) = \frac{x}{10000}.$$

I kako se izračunava tablica logaritama? Za zadani x pomaknete decimalnu točku četiri mjesta ulijevo i tako dobijete Δx koji dodate x -u. To je vrlo jednostavan algoritam.

Y	x	Δx
0	1	0.0001
1	1.0001	0.00010001
2	1.00020001	0.000100020001
3	1.000300030001	itd.

Nakon što je na ovaj jednostavni način napravljena tablica logaritama, uslijedio je korak prema finijoj razdiobi Y-a. Oni su proporcionalno smanjeni za faktor 10000, što daje tablicu koja povezuje x i $y = Y / 10000$.

y	x	Δx
0.0000	1	0.0001
0.0001	1.0001	0.00010001
0.0002	1.00020001	0.000100020001
0.0003	1.000300030001	itd.

Nova tablica i dalje je logaritamska, tj.

$$x_1 \cdot x_2 = x_3 \Leftrightarrow y_1 + y_2 = y_3 .$$

Njena prednost je što malim promjenama x-a odgovaraju male promjene y-a i obrnuto. Stoga se odnos između x i y može lakše shvatiti kao kontinuirana funkcija.

Mislim da ne trebam posebno argumentirati da rimske brojke nikada ne bi dovele do opisanog postupka za izračunavanje logaritama. Osim toga one nikada ne bi dovele ni do trigonometrijskih tablica i do postupka za njihovo izračunavanje, a njih je izračunao Ptolemej još u 2. stoljeću. Nije se koristio arapskim decimalnim zapisima (s bazom 10) nego seksagezimalnim zapisima (s bazom 60), ali princip je isti. Dakle, već je u antici (zbog efikasnosti) korišten pozicijski sustav, tj. već su u antici (kada je trebalo efikasno računati) odbačeni nepozicijski sustavi poput rimskog sustava ili grčkog alfabetskog sustava.

No vratimo se logaritmima i pogledajmo (kao pravi vigovci) o čemu se tu radi s današnjeg gledišta

$$x = 1.0001^{Y} = 1.0001^{10000y} = \left(\left(1+\frac{1}{10000}\right)^{10000}\right)^{y} \approx e^{y} .$$

Sada je jasno otkuda „neobična“ definicija

$$e \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} .$$

Dodajmo da je gornja aproksimacija točna na tri decimale. Dakle, *y*-tablica je tablica logaritamske funkcije

$$y = \log_b x \text{ za } b \approx e.$$

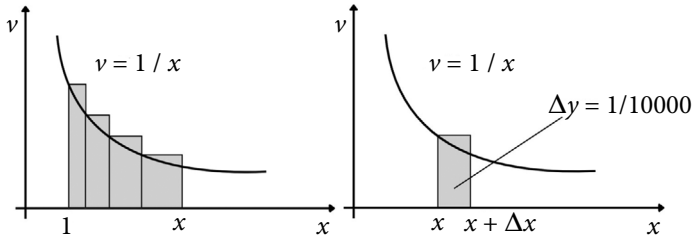
Dakle, Bürgijeva tablica daje približne vrijednosti prirodnih logaritama. Kada bismo za bazu *b* u *Y*-tablici odabrali broj još bliži broju 1, a zatim prešli na novu tablicu dijeljenjem *Y*-a s odgovarajućim faktorom, dobili bismo još finiju raspodjelu *x*-ova i još bolju aproksimaciju prirodnih logaritama. No taj prijelaz na prirodne logaritme (koje Bürgi samo aproksimira) nije učinjen prijelazom na $b = (1+1/n)^n$, za $n \to \infty$.

Povijesni prijelaz na prirodne logaritme bio je geometrijski, stoga razmotrimo Bürgijeve logaritme još jednom, ali tumačeći ih geometrijski.

Iz $\Delta y = 1/10000$ i $\Delta x = x/10000$ slijedi $\Delta y / \Delta x = 1/x$. Prirast Δy (koji je uvijek jednak 1/10000) može se geometrijski prikazati kao pravokutnik s visinom $v = 1/x$ i takvom bazom Δx da površina tog pravokutnika bude $\Delta x / x = 1/10000$. Tada zbroj svih prirasta Δy od 1 do *x* iznosi

$$y = \sum_1^x \Delta y = \sum_1^x \frac{\Delta x}{x}.$$

To je zbroj površina svih pravokutnika koji se protežu od 1 do *x*, čije se visine protežu do grafa funkcije $v = 1/x$ i čije su pojedinačne površine 1/10000.



Ako je *b* sve bliži broju 1, onda pojedinačni pravokutnici imaju sve manje površine, a njihov je zbroj sve bliži površini ispod hiperbole. Geometrijski gledano, granični prijelaz na prirodne logaritme je prijelaz na površinu ispod hiperbole (ovaj prijelaz napravio je slavni kartograf Mercator 1667.)

$$\ln X \overset{\text{def}}{=} \int_1^X \frac{dx}{x}.$$



Dodatak o kompleksnim logaritmima

Na kraju ove rasprave o otkriću logaritama, za one koji znaju nešto više matematike, nudim i objašnjenje logaritma kompleksnoga broja. Ono prirodno slijedi iz Mercatorove definicije koja, vidjeli smo, prirodno proizlazi iz računanja logaritama u decimalnoj notaciji

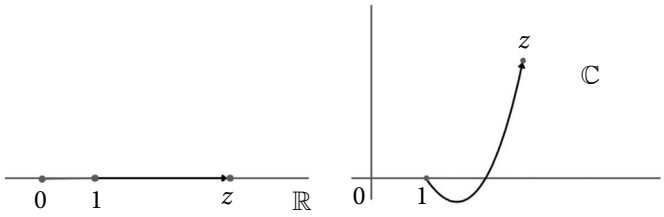
$$\ln X \overset{\text{def}}{=} \int_1^X \frac{dx}{x}.$$

Polazeći od te prirodne definicije, koja je bila standardna sve do polovice 20. stoljeća, prirodni logaritam u kompleksnoj ravnini $\mathbb{C}$ prirodno je definirati s

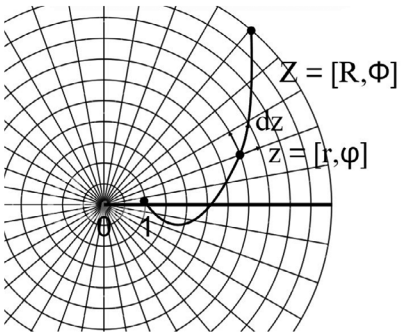
$$\ln Z \overset{\text{def}}{=} \int_1^Z \frac{dz}{z}.$$

U $\mathbb{R}$ postoji samo jedan put od 1 do svakog $Z > 0$ i ne postoji nijedan put od 1 do $Z < 0$ (jer funkcija $1/z$ nije definirana u 0). Zato je realna funkcija ln definirana na $\mathbb{R}^+$.

U kompleksnoj ravnini $\mathbb{C}$ postoji mnogo putova od 1 do svakog $Z \neq 0$. Zato je ln višeznačna kompleksna funkcija definirana na $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.



Izračun vrijednosti $\ln Z$ je jednostavan.



Označimo trigonometrijski oblik broja $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ s $[r,\varphi]$ Tada je (vidi sliku)

$$dz = [dr,\varphi] + [rd\varphi, \varphi + \pi/2] = [dr,\varphi] + i[rd\varphi,\varphi]$$

$$\frac{dz}{z}=\frac{[dr,\varphi]}{[r,\varphi]}+i\frac{[rd\varphi,\varphi]}{[r,\varphi]}=\frac{dr}{r}+id\varphi$$

$$\ln Z=\int_1^Z\frac{dz}{z}=\int_1^R\frac{dr}{r}+i\int_0^\Phi d\varphi=\ln R+i\left(\Phi+2k\pi\right),$$

gdje je k broj okreta oko 0, na putu od 1 do Z. Dakle,

$$\ln\left(R(\cos\Phi+i\sin\Phi)\right)=\ln R+i\left(\Phi+2k\pi\right).$$

Ako je $\ln\left(R(\cos\Phi+i\sin\Phi)\right)=X+iY$ onda je $R=e^X$ i $\Phi=Y-2k\pi$, pa odmah slijedi

$$e^{X+iY}=R(\cos\Phi+i\sin\Phi)=e^X(\cos Y+i\sin Y).$$

Decimalni razvoji i razvoji funkcija

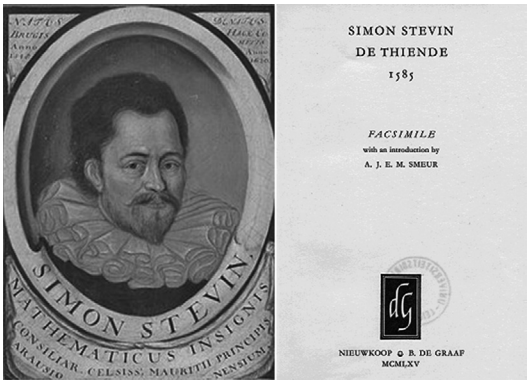
Ideju da se svakoj skalarnoj veličini kao njena mjera može pridružiti decimalni razvoj jasno je formulirao Stevin 1585. u knjizi *De Thiende*.

Na primjer,

$$\pi=3.14159...\overset{\text{def}}{=}3+\frac{1}{10}+\frac{4}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\frac{5}{10^4}+\frac{9}{10^5}+\cdots.$$

Time su realni brojevi uvedeni kao univerzalne mjere skalarnih veličina.

Tu univerzalnost realnih brojeva u 19. stoljeću dokazali su Helmholtz (koji je dao osnovnu ideju, ali je nije proveo matematički egzaktno) i Hölder (čiji je dokaz matematički egzaktan).



Jasno je da sustav rimskih brojki (koji nema sistematski način prikaza razlomaka) ne može prikazati ni pojedine realne brojeve, na primjer π, a potpuno mu je nedostupna opća definicija realnog broja. Dodajmo da su analogne izmjere veličina u seksagezimalnom sustavu bile standardne u antici i arapskom srednjovjekovlju koje je sačuvalo antička znanja.

Srednjovjekovna latinska matematika i znanost uopće doživjele su ogroman pad u odnosu na antiku pa su retardirale i u notaciji brojeva. Tek je renesansa (i dijelom kasni srednji vijek) preko Arapa i Bizanta ponovno otkrila zaboravljena antička znanja. Tada je ponovno uvela i arapski pozicijski sustav zapisivanja brojeva i odgovarajuće operacije s njima.

Na primjer, dijeljenje izgleda ovako (kao što danas zna svaki pučkoškolac)

$$\begin{array}{r} 797:13=60+1 \\ \underline{-780} \\ 17 \\ \underline{-13} \\ 4 \end{array}.$$

Ovaj postupak pismenog dijeljenja ima tri koraka koji se ciklički ponavljaju.

1) Procjena kvocijenta. (U našem slučaju 60, odnosno 1.)
2) Množenje kojim se određuje iznos koji je podijeljen. (U našem slučaju $780 = 60 \cdot 13$, odnosno $13 = 1 \cdot 13$.)
3) Oduzimanje kojim se određuje što je ostalo za daljnje dijeljenje. (U našem slučaju $797 - 780 = 17$, odnosno $17 - 13 = 4$.)

Dijeljenje brojeva (npr. $797 = 7x^2 + 9x + 1$ s $13 = 1x + 3$, za $x = 10$) lako je poopćiti na dijeljenje polinoma. Na primjer,

$$\begin{array}{r} \left(x^5+x^4-2x^3-x^2-1\right) : \left(x^2+x-1\right) = x^3-x \\ \underline{-\left(x^5+x^4-x^3\right)} \\ \left(-x^3-x^2-1\right) \\ \underline{-\left(-x^3-x^2+x\right)} \\ -x-1 \end{array}$$

U srednjoškolskoj nastavi postupak obično završavamo kada dođemo do ostatka čiji je stupanj manji od stupnja djelitelja. No, to nije nužno.

Dapače, nastavimo li dijeliti dolazimo do matematički veoma važnog Laurentovog razvoja. Daljnje dijeljenje izgleda ovako:

$$\begin{array}{r} \left(x^5+x^4-2x^3-x^2-1\right) : \left(x^2+x-1\right) = x^3-x-x^{-1}-x^{-3}+x^{-4}-2x^{-5}+\cdots \\ \underline{-\left(x^5+x^4-x^3\right)} \\ \left(-x^3-x^2-1\right) \end{array}$$

$$
\begin{array}{r}
\underline{-\left(-x^3-x^2+x\right)} \\
\left(-x-1\right) \\
\underline{-\left(-x-1+x^{-1}\right)} \\
\left(-x^{-1}\right) \\
\underline{-\left(-x^{-1}-x^{-2}+x^{-3}\right)} \\
\left(x^{-2}-x^{-3}\right) \\
\underline{-\left(x^{-2}+x^{-3}-x^{-4}\right)} \\
-2x^{-3}+x^{-4} \\
\ddots
\end{array}
$$

U ovom slučaju dobili smo Laurentov razvoj racionalne funkcije

$$\frac{x^5+x^4-\ 2x^3-x^2-\ 1}{x^2+x-\ 1}=-x^{-1}-x^{-3}+x^{-4}-2x^{-5}+\cdots.$$

Uočimo da pri takvom dijeljenju ostatci imaju (u apsolutnom iznosu) sve veće negativne eksponente. To znači da će za velike $|x|$ ostatci biti mali, tj. Laurentove aproksimacije bit će dobre za velike $|x|$.

Naravno, odabirom drukčijih procjena kvocijenata, dolazimo do drukčijih rezultata dijeljenja, tj. do drukčijih razvoja. U koraku 1), kao procjene pri dijeljenju polinoma, možemo uzimati kvocijente članova s najnižim eksponentima. Takve se procjene ne koriste u srednjoškolskoj nastavi, iako su vrlo važne budući da vode k Taylorovim razvojima. U našem slučaju dolazimo do razvoja iste racionalne funkcije u Taylorov red.

$$
\begin{array}{l}
\left(1+x^2+2x^3-x^4-\ x^5\right)\ :\ \left(1-x-x^2\right)\ =1+x+3x^2+6x^3+8x^4+13x^5+\cdots \\
\underline{-\left(1-x-x^2\right)} \\
\left(x+2x^2+2x^3-x^4-x^5\right) \\
\underline{-\left(x-x^2-x^3\right)} \\
\left(3x^2+3x^3-x^4-x^5\right) \\
\underline{-\left(3x^2-3x^3-3x^4\right)} \\
\left(6x^3+2x^4-x^5\right) \\
\underline{-\left(6x^3-6x^4-6x^5\right)}
\end{array}
$$

$$\begin{array}{r}
\hline
\left(8x^4+5x^5\right) \\
\underline{-\left(8x^4-8x^5-8x^6\right)} \\
13x^5+8x^6
\end{array}$$

Dakle, dobili smo Taylorov razvoj racionalne funkcije

$$\frac{1+x^2+2x^3-x^4-x^5}{1-x-x^2}=1+x+3x^2+6x^3+8x^4+13x^5+\cdots$$

Primijetimo da pri takvom dijeljenju ostatci imaju sve veće eksponente. To znači da će za male $|x|$ ostatci biti mali, tj. Taylorove aproksimacije bit će dobre za male $|x|$.

Evo, usput, kako se običnim dijeljenjem (koje je u tom slučaju razvijanje u Taylorov red) izvodi poznata formula za sumu geometrijskog reda.

$$\begin{array}{rl}
\frac{1}{1-x}=1 : \left(1-x\right) & =1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots \\
\underline{-(1-x)} & \\
x & \\
\underline{-\left(x-x^2\right)} & \\
x^2 & \\
\underline{-\left(x^2-x^3\right)} & \\
x^3 & \\
\underline{-\left(x^3-x^4\right)} & \\
x^4 & \\
\ddots &
\end{array}$$

Ovi nam primjeri jasno pokazuju kako sofisticirana matematika izvire iz razumijevanja decimalnih zapisa i operacija s tim zapisima. Ne treba ni napominjati da nepozicijski sustavi poput rimskih i grčkih nisu takav izvor.

Dodajmo još da je Newton, po uzoru na decimalne razvoje realnih brojeva i racionalnih funkcija, u Taylorove redove razvio i transcendentne funkcije

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots$$

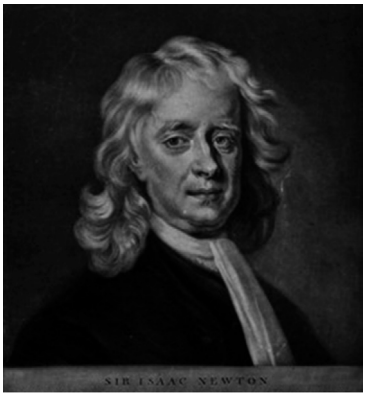
$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\frac{x^{10}}{10!}\cdots$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} - \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} \cdots .$$

To mu je omogućilo da integrira sve elementarne funkcije koristeći se samo jednostavnim (i odavno poznatim) integralima

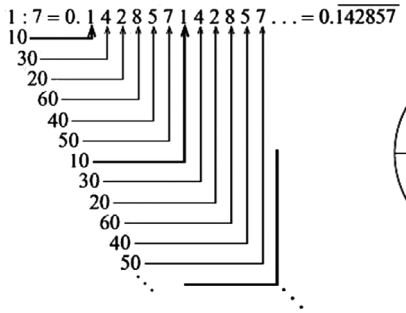
$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

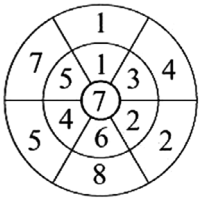
Bio je to početak infinitezimalnog računa.



Decimalni razvoji i Fermatov mali teorem

Postupak dijeljenja u decimalnom pozicijskom sustavu ima i drugih zanimljivih poopćenja. Promotrimo sljedeće dijeljenje





Decimale 1, 4, 2, 8, 5, 7 dobiju se tako da se brojevi 1, 3, 2, 6, 4, 5 uzastopno dijele brojem 7. Budući da se ta dijeljenja ciklički ponavljaju, preglednije ih prikazujemo u rozeti.

U njenom središtu istaknut je broj kojim se dijeli (u ovom slučaju 7). U nutarnjem vijencu istaknuti su brojevi koji se dijele (u ovom slučaju 1, 3, 2, 6, 4, 5). U vanjskom vijencu su rezultati tih dijeljenja (u ovom slučaju 1, 4, 2, 8, 5, 7).

Koristeći se rozetom neposredno možemo ispisati rezultate svih dijeljenja oblika $n : 7$, za $n < 7$ (to su decimalni zapisi racionalnih brojeva oblika $n/7$, za $n < 7$)

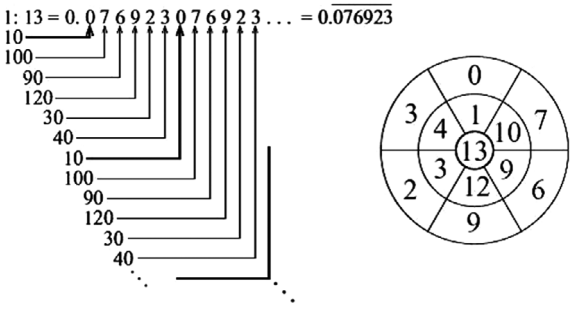
$$\frac{1}{7} = 0.\overline{142857} \qquad \frac{3}{7} = 0.\overline{428571} \qquad \frac{2}{7} = 0.\overline{285714}$$

$$\frac{6}{7} = 0.\overline{857142} \qquad \frac{4}{7} = 0.\overline{571428} \qquad \frac{5}{7} = 0.\overline{714285}.$$

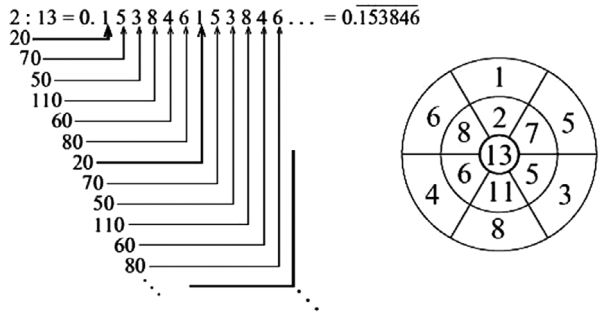
Dijeljenje 1 : 13 daje sljedeće razvoje

$$\frac{1}{13} = 0.\overline{076923} \qquad \frac{10}{13} = 0.\overline{769230} \qquad \frac{9}{13} = 0.\overline{692307}$$

$$\frac{12}{13} = 0.\overline{923076} \qquad \frac{3}{13} = 0.\overline{230769} \qquad \frac{4}{13} = 0.\overline{307692}.$$



To je samo polovica svih razlomaka oblika $n/13$, za $n < 13$. Drugu polovicu pokriva rozeta koju nalazimo provođenjem jednog od preostalih dijeljenja.



Iz druge rozete možemo neposredno očitati decimalne razvoje preostalih razlomaka

$$\frac{2}{13} = 0.\overline{153846} \qquad \frac{7}{13} = 0.\overline{538461} \qquad \frac{5}{13} = 0.\overline{384615}$$

$$\frac{11}{13} = 0.\overline{846153} \qquad \frac{6}{13} = 0.\overline{461538} \qquad \frac{8}{13} = 0.\overline{615384}\,.$$

Dakle, 13 ima dvije rozete jednakih duljina 6. Lako je dokazati da to uvijek vrijedi, tj. prosti brojevi p (koji ne dijele dekadsku bazu 10) uvijek imaju rozete konstantne duljine L_p. Na primjer

$$L_3 = 1 \qquad L_7 = 6 \qquad L_{11} = 2 \qquad L_{13} = 6.$$

Naime, duljine rozeta koje pripadaju prostom broju p (a koji ne dijeli bazu 10) jesu duljine periodičkih blokova u decimalnim zapisima razlomaka n/p. Da su te duljine iste za svaki n slijedi iz činjenice da zbrajanjem periodičkih blokova istih duljina opet dobivamo periodičke blokove iste duljine. No,

$$\frac{n}{p} = \frac{1}{p} + \cdots + \frac{1}{p}\,.$$

Dakle, n/p i $1/p$ imaju periodičke blokove iste duljine.

S druge strane, duljina periodičkog bloka u decimalnom zapisu razlomka $1/p$ (koju smo označili s L_p) je prirodni broj takav da je

$$\frac{10^{L_p} - 1}{p} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow 10^{L_p} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p)\,.$$

Na primjer,

$$10^6 \frac{1}{7} - \frac{1}{7} = 10^6 \cdot 0.\overline{142857} - 0.\overline{142857}$$
$$= 142857.\overline{142857} - 0.\overline{142857} = 142857 \in \mathbb{N}.$$

Primijetimo sada da svih R_p rozeta duljine L_p potpuno i jednoznačno opisuje $p - 1$ razlomaka oblika n/p (za $n < p$ i p ne dijeli 10), pa je zato

$$R_p \cdot L_p = p - 1.$$

Slijedi da za svaki prosti p koji ne dijeli 10 vrijedi

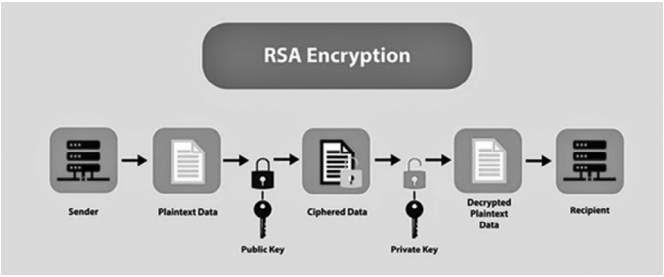
$$10^{p-1} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p)\,.$$

Da smo sva ova razmatranja proveli za zapise u bazi b, umjesto za decimalne zapise u bazi 10, došli bismo do zaključka da vrijedi Fermatov mali teorem.

Za svaki prosti p koji ne dijeli b vrijedi

$$b^{p-1} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p)\,.$$

Eulerovo poopćenje Fermatova teorema $b^{\varphi(n)} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, n)$, gdje je $\varphi(n)$ broj brojeva manjih od n koji su relativno prosti sa n, posljednjih je godina postao jedan od najkorištenijih matematičkih teorema. Naime, on je ključni dio RSA kripto-sustava koji se koristi u gotovo svim internetskim transakcijama.



Dodatak o dokazima Fermatova malog teorema

Na kraju ove rasprave o Fermatovu malom teoremu, za one koji znaju nešto više matematike, nudim i njegova dva dokaza. Fermatov dokaz bio je dokaz indukcijom s pozivom na binomni teorem

$$2^p = (1+1)^p = 1 + \binom{p}{1} + \cdots + \binom{p}{p-1} + 1 .$$

Budući da p dijeli $\binom{p}{k} = \frac{p(p-1)\cdots(p-k+1)}{1\cdot 2\cdot \cdots \cdot k}$ za svaki $k < p$, slijedi

$$2^p \equiv 1 + 1 (\mathrm{mod}\, p) .$$

Dakle, teorem vrijedi za $b = 2$. Pretpostavimo da vrijedi za $b = n$. Tada vrijedi i za $n + 1$ jer je

$$\begin{aligned}(n+1)^p &= n^p + \binom{p}{1} n^{p-1} + \cdots + \binom{p}{p-1} n + 1 \\ &\equiv n^p + 1 (\mathrm{mod}\, p) \equiv n + 1 (\mathrm{mod}\, p).\end{aligned}$$

Dakle, teorem vrijedi za svaki $b \geq 2$.

Danas je najčešći algebarski dokaz teorema, u obliku $a^{p-1} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p)$.

Neka su $[0],[1],\ldots,[n-1]$ klase ostataka pri dijeljenju sa n (kraće ih zovemo ostatcima) i neka je

$$[a]+[b] \overset{\text{def}}{=} [a+b] \qquad\qquad [a]\cdot[b] \overset{\text{def}}{=} [a\cdot b] .$$

Ostatak $[a]$ ima inverz $[b]$ ako je $[a]\cdot[b] = [1]$. Za prosti $n = p$ svi ostatci $[a]$ imaju inverze jer iz Euklidova algoritma dijeljenja slijedi

$$ab + kp = 1, \quad \text{tj.} \quad ab \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p) \quad \text{tj.} \quad [a]\cdot[b] = [1] .$$

Odavde slijedi da množenjem s $[a]$ svih ostataka dobijemo njihovu permutaciju pa imamo

$$[a]\cdot[1]\cdots[a]\cdot[p-1] = [1]\cdot\cdots\cdot[p-1] \Rightarrow [a]^{p-1} = [1] .$$

Euler je shvatio da ovaj dokaz vrijedi i $\bmod n$, uz ograničenje na one $[a]$ koji imaju inverze, tj. one a koji su relativno prosti s n. Označimo li njihov broj sa $\varphi(n)$, imamo Eulerovo poopćenje $[a]^{\varphi(n)} = [1]$, tj. $a^{\varphi(n)} \equiv 1 (\bmod n)$.

Pozicijski sustavi bez nule

Često se može pročitati da je za uvođenje pozicijskog sustava nužno bilo otkriće nule, barem kao simbola ili praznog mjesta kojim se označava odsustvo brojke na odgovarajućoj poziciji. Povijesno je takav slijed vrlo vjerojatan (v. dolje), ali nije logički nužan.

Umjesto znamenki 0, 1, 2, ... , $b - 1$ jednako dobro mogu poslužiti i znamenke 1, 2, ... , b. Da bismo razlikovali ta dva numerička sustava govorit ćemo o $b - 1$ sustavu (to je naš standardni sustav s nulom) i b sustavu (to je sustav bez nule). Na primjer, nizanje brojki u decimalnom sustavu bez nule (tj. u $b = 10$ sustavu) počinje ovako:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, b,

11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 1b,

... ...

91, 92, 93,94, 95, 96, 97, 98, 99, 9b,

b1, b2, b3, b4, b5, b6, b7, b8, b9, bb,

111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 11b,

... ...

191, 192, 193, 194, 195, 196, 197, 198, 199, 19b,

1b1, 1b2, 1b3, 1b4, 1b5, 1b6, 1b7, 1b8, 1b9, 1bb,

211, 212, 213, 214, 215, 216, 217, 218, 219, 21b,

... ...

991, 992, 993, 994, 995, 996, 997, 998, 999, 99b,

9b1, 9b2, 9b3, 9b4, 9b5, 9b6, 9b7, 9b8, 9b9, 9bb,

b11, b12, b13, b14, b15, b16, b17, b18, b19, b1b,

b21, b22, b23, b24, b25, b26, b27, b28, b29, b2b,

... ...

b91, b92, b93, b94, b95, b96, b97, b98, b99, b9b,

bb1, bb2, bb3, bb4, bb5, bb6, bb7, bb8, bb9, bbb,

1111, 1112, 1113, 1114, 1115, 1116, 1117, 1118, 1119, 111b,

... ...

Uočite da se brojke koje u 10 – 1 sustavu ne sadrže nulu (npr. 12, 991 ili 1124) jednako zapisuju i u 10 sustavu. One brojke koje u 10 – 1 sustavu sadrže nulu u 10 sustavu imaju drugačije zapise (npr. 20 = 1*b* ili 1100 = *b*9*b*). Sasvim općenito:

$$a_n...a_1a_0 = \sum_{i=n}^{0} a_i \cdot b^i \qquad 0 \le a_i \le b-1 \qquad (b \text{ – 1 sustav})$$

$$a_n...a_1a_0 = \sum_{i=n}^{0} a_i \cdot b^i \qquad 1 \le a_i \le b \qquad (b \text{ sustav}).$$

Postupak pretvaranja *b* – 1 zapisa u *b* zapis je jednostavan: kada slijeva naiđeš na 0, zamijeni je s *b* i umanji prethodnu znamenku za 1. Na primjer, u slučaju da je *b* = 10, imamo

$$305 \to 2b5 \qquad 3005 \to 2b05 \to 29b5 \qquad 1000 \to b00 \to 9b0 \to 99b\,.$$

Postupak pretvaranja *b* zapisa u *b* – 1 zapis je obrnut: kada s lijeva naiđeš na *b*, zamijeni je s 0 i uvećaj prethodnu znamenku za 1. Na primjer, u slučaju da je *b* = 10 imamo

$$3b5 \to 405 \qquad 3bb5 \to 40b5 \to 4105 \qquad bbb \to 10bb \to 110b \to 1110\,.$$

„Pismeno" zbrajanje, oduzimanje, množenje i dijeljenje provodi se jednako u oba sustava. Na primjer, u dekadskom sustavu s nulom i bez nule imamo:

$$\begin{array}{r} 2305 \\ +1027 \\ \hline 3332 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2305 \\ +\ b27 \\ \hline 3332 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7302 \\ -1027 \\ \hline 6275 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 72b2 \\ -\ b27 \\ \hline 6275 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \underline{105 \cdot 246} \\ 210 \\ 420 \\ 630 \\ \hline 25830 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \underline{b5 \cdot 246} \\ 1bb \\ 41b \\ 62b \\ \hline 2582b \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 25830 : 246 = 105 \\ -246 \\ \hline 123 \\ -0 \\ \hline 230 \\ -1230 \\ \hline 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2582b : 246 = b5 \\ -245b \\ \hline 122b \\ -122b \\ \hline 0 \end{array}$$

Pretvaranje standardnog (10 – 1)-zapisa u neki drugi (b – 1)-zapis, kao što je poznato, provodi se uzastopnim dijeljenjem s b. Ostatci tih uzastopnih dijeljenja, koji su 0, 1, … ili b – 1 čine (b – 1)-zapis. Na primjer, 37 ima binarni zapis 100101 jer je

$$\begin{array}{lll} \underline{37:2=18} & \underline{18:2=9} & \underline{9:2=4} \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \underline{4:2\quad 2} & \underline{2:2=1} & \underline{1:2=0} \\ & 0 & 1 \end{array}.$$

Pretvaranje 10-zapisa u neki drugi b-zapis i dalje se nalazi uzastopnim dijeljenjem sa b, ali su ostatci tih uzastopnih dijeljenja sada 1, 2, … ili b i oni čine b-zapis. Na primjer, dijadski zapis (kako zovemo binarni zapis bez 0, dakle s 1 i 2) broja 37 je 11221 jer je

$$\begin{array}{lllll} \underline{37:2=18} & \underline{18:2=8} & \underline{8:2=3} & \underline{3:2=1} & \underline{1:2=0} \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{array}.$$

Uspješno provođenje elementarnih aritmetičkih operacija u oba sustava, kao i lako prevođenje u sustave s raznim bazama, pokazuju da sustav bez nule ima elastičnost konvencionalnog dekadskog sustava s nulom. To dovodi u pitanje tvrdnju da je za pozicijski sustav nužna nula, barem kao simbol kojim se označava odsustvo brojke na odgovarajućoj poziciji. Ili da bi znanost i trgovina bili nezamislivi bez simbola nule (mada on povijesno jest igrao važnu ulogu).

S druge strane, bez obzira što zapisivanje brojeva i uobičajene aritmetičke operacije s njima ne ovise o simbolu nule, ipak treba dodati da bi razvoj matematike bio usporen bez nule jer npr. algebra zahtijeva neutralni element, ili npr. uređaj cijelih brojeva bez nule nije usklađen s operacijama zbrajanja i oduzimanja itd. Stoga prethodnu raspravu ne treba tumačiti kao argument da su simbol nule i sama nula u matematici nevažni, već kao raspravu o navodno nužnoj potrebi simbola nule za izgradnju sustava brojki kojim se lako operira. Te nužnosti naprosto nema.

Osim toga, b sustavi imaju i neke prednosti. Na primjer, baza $b = 1$ nema smisla u b – 1 sustavu, ali ima u b-sustavu, gdje generira najelementarniji sustav zapisivanja brojki:

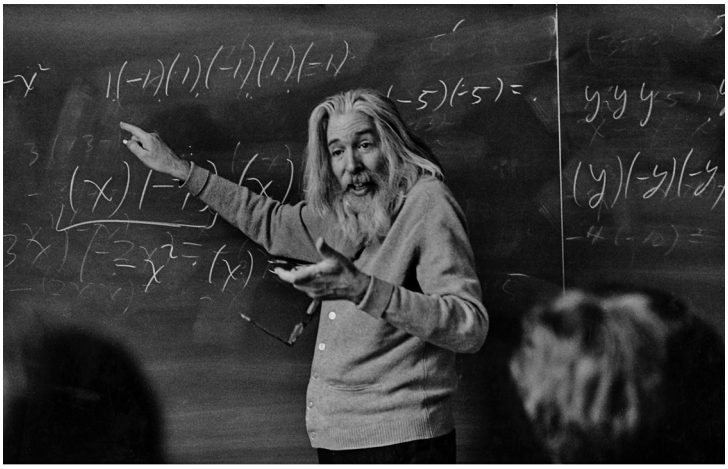
1, 11, 111, 1111, 11111, 111111, 1111111, 11111111 …

Potencije baze b^n u sustavu s nulom imaju (n + 1)-znamenkaste zapise oblika 10…0 sa n nula (u kojima se, naravno, ne pojavljuje baza b). One u sustavu sa nulom imaju n-znamenkaste zapise oblika 9…9b (u kojima se, naravno, pojavljuje baza b).

Ukupni broj n-znamenkastih brojki u b sustavu je b^n, dok je u b – 1 sustavu $b^n - b^{n-1}$ (na primjer, standardni dekadski sustav ima 900 troznamenkastih brojki, a onaj bez nule ima ih 1000).

Često je manje znamenki potrebno za zapisivanje broja u b sustavu nego u $b - 1$ sustavu (npr. $1000 = 99b$ ili $1110 = bbb$).

A tu je i jedna važna primjena dijadskog 2-sustava u logici (što je bio moj prvi susret s b-zapisima). Naime, Gödelova numeracija, kako je to pokazao Smullyan (vidi sliku), lakše se opisuje tim sustavom nego uobičajenim binarnim (2-1)-sustavom.



Gödelova numeracija simbolima nekog formalnog jezika jednoznačno pridružuje brojeve (kao njihova imena) te time razmatranja o sintaksi tih jezika prevodi u razmatranja o brojevima, tj. ona postaju dio aritmetike. To se kraće zove *aritmetizacija sintakse*.

Svaki simbol formalnog jezika nastaje *konkatenacijom* (dodavanjem) njegovih osnovnih simbola. Zato tim osnovnim simbolima pridamo neke brojeve, a svakoj konkatenaciji tih osnovnih simbola pridamo konkatenaciju njima odgovarajućih brojeva. No, kako konkatenirati brojeve? Najjednostavnije tako da konkateniramo njihove zapise. Ali ako su to standardni ($b - 1$)-zapisi koji se koriste nulom onda je npr.

$$\mathbf{1011} = 0\mathbf{1011} = 00\mathbf{1011} = 000\mathbf{1011} = \ldots$$

Dakle, dodavanjem nula na početku zapisa ne mijenja se broj koji je zapisan. To (uz standardnu tehniku konkateniranja pomoću tzv. graničnika, u što ovdje ne ulazimo) često dovodi do toga da nije jednoznačno određeno što je zapravo konkatenirano. Dijadski 2-zapis ne dovodi do tog problema.

I na kraju spomenimo jedan mogući povijesni problem na koji je upozorio R. Forslund 1995. Budući da su b-sustavi možda logičniji prvi korak u pozicijskom zapisivanju brojeva (jer ne zahtijevaju „broj“ nula) možda su oni stvarno i bili prvi pozicijski sustavi. Možda simbol ∘ u tim sustavima ne označava nulu nego bazu tih sustava. Na primjer, ako je baza 10 onda $1\circ$ nije deset nego je dvadeset pa ako je u

nekom starom zapisu $1\circ + 11 = 31$ ne radi se o grešci nego o točnom iskazu u 10-sustavu. Takve će se „greške" pojavljivati kada se god u zapisu broja pojavljuje baza b. Što je ona veća tih će pojavljivanja, dakle i „grešaka", biti manje. Dakle, u numeričkim zapisima drevne Mezopotamije, koji koriste relativno veliku bazu 60, „grešaka" će biti malo ali će ih biti. Forslund predlaže da se te „greške" opet pregledaju i da se vidi nisu li to ipak točni iskazi u pozicijskom sustavu bez nule. Ako se pokaže da je to tako imati ćemo dokaz da je pozicijski sustav bez nule bio sustav drevne Mezopotamije. Koliko mi je poznato još nitko nije obavio predloženi test.

Zaključak

Vjerujem da ovi primjeri povijesno informirane matematike, koji su vezani uz pozicijske sustave zapisivanja brojeva - otkriće prirodnih logaritama, razvoji funkcija u Lauranteove i Taylorove redove i mali Fermatov teorem - jasno ukazuju na to da je vigovska povijest matematike dobrodošla. Sigurno je da i ona ima svojih zastranjenja, kada sadašnjost neopravdano upisuje u prošlost. No, prvenstveno mislim da su vigovska i protuvigovska povijest matematike komplementarne. Prva se bavi prošlošću koja nam je zanimljiva danas, a druga to pokušava zatomiti pa se bavi i slijepim ulicama koje vigovska povijest zanemaruje.

Zadnji dio članka, koji pokazuje da nula pa čak ni simbol nule nije nužan za efikasan numerički sustav, upućuje na zanimljivu mogućnost da suvremena matematika može dati i neke smjernice za istraživanje povijesti matematike.

Ne bih se stoga složio s Kuhnom da „povjesničar treba ostaviti po strani znanost koju zna."