Matematika u konkatedrali

Tomislav Pejković[1]

Ovaj rad zadnji je u nizu članaka koji se bave matematičkim pitanjima inspiriranim arhitekturom i interijerom konkatedralne crkve svetih Ćirila i Metoda u Zagrebu.

Razjasnimo najprije ukratko pojam konkatedrale. Katedrala je glavna crkva jedne biskupije. Dobila je naziv po biskupskoj stolici – katedri – simbolu biskupove vlasti i službe naučavanja vjernika. Konkatedrala je crkva koja dijeli status s katedralom, a najčešće nastaje kada u biskupiji ima više važnih gradova. U Hrvatskoj su poznate i konkatedrale u Osijeku i Splitu.

Križevačka eparhija je katolička biskupija koja okuplja katolike bizantskog obreda na području Hrvatske, Bosne i Hercegovine i Slovenije. Sjedište biskupije je u Križevcima gdje se nalazi katedrala Presvete Trojice. Na Gornjem gradu u Zagrebu nalazi se konkatedrala posvećena svetim slavenskim apostolima Ćirilu i Metodu. Ova je crkva sagrađena tijekom 1885. godine prema nacrtima arhitekta Hermana Bolléa, a više o njezinoj izgradnji i obnovama kroz povijest pročitajte u diplomskom radu [8].

Budući da ćemo se u ovom tekstu referirati na prethodne članke, navedimo redom naslove svih članaka u serijalu. Osim časopisa u kojima su objavljeni ili prihvaćeni za objavu, članci su dostupni i na mrežnoj stranici autora http://web.math.hr/~pejkovic/

[J] Jedna fotografija poda (Poučak)

[Kr] Kružnice u konkatedrali (Matematika i škola)

[F] Frizovi u konkatedrali (Matematičko-fizički list)

[S] Stereometrija u konkatedrali (Matka)

[Ko] Konike u konkatedrali (Matematičko-fizički list)

[R] Rozeta (Poučak)

[M] Matematika u konkatedrali (Poučak)

Kao što je objašnjeno u [J], poticaj za pisanje tog prvog teksta bio je naizgled nevažan detalj uočen na podu crkve. Nekoliko mjeseci kasnije autor je shvatio da se u motivima koje nalazimo u crkvi sv. Ćirila i Metoda kriju i brojni drugi zanimlji-

[1]Tomislav Pejković, Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet., Matematički odsjek

vi problemi i ideje. Odmah je odlučeno da u radovima koji će uslijediti pokušamo izbjeći teme koje bi bile samo efemerno vezane uz konkretnu lokaciju. Evo tek dva od bezbroj primjera problema koji su matematički zanimljivi, ali se ne uklapaju u naš koncept jer ih je moguće formulirati i smjestiti u bilo koje okruženje.

- Deset osoba ostavilo je prilikom ulaska u crkvu sv. Ćirila i Metoda svoje kišobrane na stalku. Na koliko načina ti ljudi mogu pri izlasku uzeti svatko po jedan kišobran tako da nitko od njih ne ponese svoj kišobran?
- Nakon napornog probijanja kroz sudionike manifestacije Advent u Zagrebu, uspona zakrčenim Zakmardijevim stubama i preskakivanja raskopanih ulica, sjeo sam da se odmorim u grkokatoličkoj konkatedrali. Na pamet mi je pala jednadžba $x^2 + 7 = 2^n$ i zapitao sam se kako je riješiti u cijelim brojevima.

S druge strane, činjenica da se neke od opisanih likova i struktura može naći i na brojnim drugim mjestima nije predstavljala prepreku za njihovo uključivanje kao motivaciju u okviru konkatedrale. Iako je crkva sv. Ćirila i Metoda nesumnjivo bogata sadržajima koji mogu inspirirati ljubitelje matematike, jedan je od osnovnih ciljeva ovih članaka i bio pokazati da se zanimljivi, pa čak i iznenađujući problemi mogu uočiti svuda oko nas. Nadamo se da će nastavnike i učenike kojima su ovi tekstovi namijenjeni, oni potaknuti da ideje o kojima su podučavali ili učili u školi primijene i izvan nje. Možda će neke od mladih takav poticaj ohrabriti da upoznaju i zavole i onaj znatno veći, važniji i zanimljiviji dio matematike gdje su vizualizacije teže i manje upotrebljive.

U nastavku donosimo neke dodatne ideje i probleme koji dopunjuju one prikazane u prethodnim člancima. Redovito je dana samo kratka uputa ili skica te poneka referenca. Tako svaka od ovih točaka može poslužiti kao opis projekta za zainteresirane učenike. Neki od zadataka zahtijevaju da sami posjetite crkvu sv. Ćirila i Metoda, a ostale je moguće rješavati i bez odlaska onamo. Ipak, svakako vam preporučujemo da napravite jedan takav kratki matematički izlet.

1. U [F] smo klasificirali tek jedan dio frizova iz crkve sv. Ćirila i Metoda. Neke od ornamenata nismo uvrstili u taj članak jer smo našli dovoljno primjera za pojedini tip friza, ali neke nismo ni primijetili. Primjerice, tek smo kasnije uočili da se pri dnu tetrapoda (čiji volumen smo računali u [S]) nalazi friz tipa *VCK* za koji smo u [F] pronašli samo dva primjera u konkatedrali.

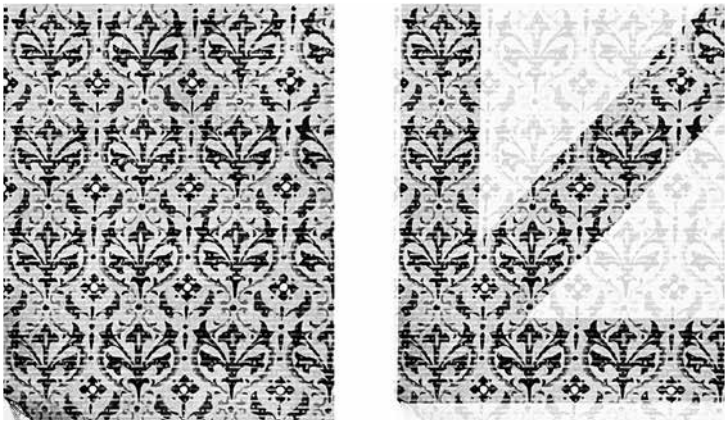


Slika 1.

Na Slici 1. iznad tog friza primijetit ćete i friz koji nema drugih simetrija osim translacijske (ili je tipa *K* ako zanemarimo neke detalje).

Prođite pažljivije od nas kroz konkatedralu i fotografijom zabilježite sve uočene frizove. Imajte na umu da friz možete prepoznati i u ponavljanjima trodimenzionalnih objekata poput bočnih sjedala ili pak na vitrajima koje možete dobro promotriti samo kada kroz njih prodire svjetlo. Sve zabilježene frizove rasporedite u sedam klasa iz [F].

2. Za frizove smo u ovoj crkvi pronašli višestruke primjere svih sedam tipova [F]. Za razliku od njih, kod „tapeta", tj. uzoraka koji se ponavljaju u dva smjera u ravnini, u konkatedrali se može naći samo nekoliko od ukupno 17 mogućih tipova [4].

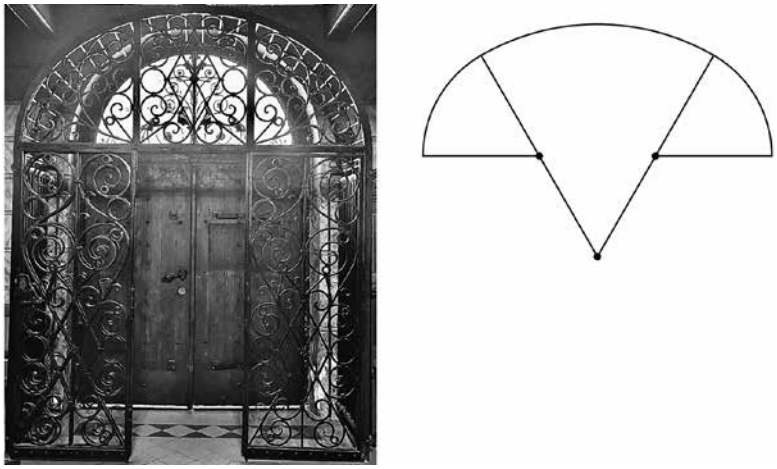


Slika 2.

Ipak, na tapeti poput one sa Slike 2. lijevo koja se nalazi na zidu svetišta uočavamo različite tipove frizova. Na Slici 2. desno primjećujemo frizove tipa *HK* (vertikalna pruga), tipa *V* (horizontalna pruga) i tipa $\varnothing$ (dijagonalna pruga). Koje tipove frizova možete pronaći na različitim tapetama u konkatedrali? Možda vam članak [9] bude od pomoći. Naglasimo da je ovdje tapeta matematički pojam, tj. nema veze s materijalom kojim je prekriven zid.

3. Na rešetki od kovanog željeza između ulaznog prostora i ostatka crkve (Slika 3. lijevo) uočavamo brojne spirale od kojih su neke vrlo blizu Arhimedovoj spirali. To nije teško provjeriti postavljanjem slike Arhimedove spirale preko odgovarajućeg dijela naše fotografije. O definiciji, svojstvima i nekim primjenama Arhimedove spirale pročitajte u [11, §7.2]. Pristupačan opis kako je Arhimed odredio površinu omeđenu jednim okretom spirale koja nosi njegovo ime dan je u [1].

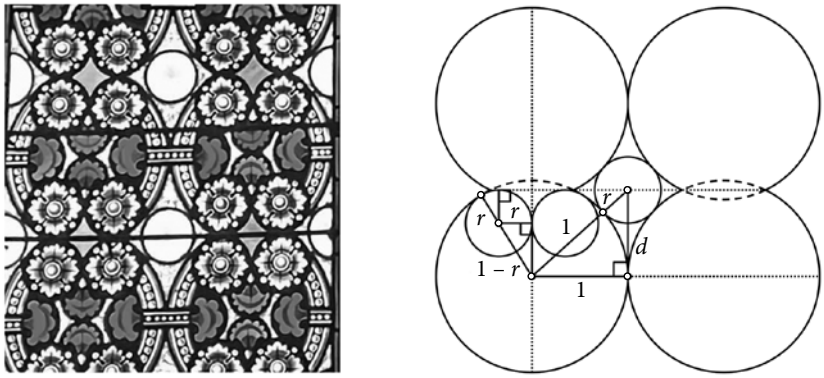
U arhitekturi se spiralu često dobiva sastavljanjem kružnih lukova pazeći pri tome da uzastopni lukovi imaju istu tangentu u točkama prijelaza, npr. za crtanje



Slika 3.

volute na jonskom kapitelu pogledajte [6, §5]. Na sličan način sastavljaju se i ovali poput onoga koji prepoznajemo u gornjem rubu ulaznog kaveza (Slika 3. desno). O matematičkim aspektima ovala u arhitekturi čitajte u [6, §§2,5] gdje su detaljnije prikazani tlocrti Koloseja i Trga sv. Petra u Rimu.

4. Promotrimo detalj s vitraja u bifori ispod rozete (Slika 4. lijevo).



Slika 4.

Mala kružnica dodiruje po četiri preklapajuća kruga u kojima se nalaze po četiri okrugla cvijeta. Uzmimo da je polumjer preklapajućih krugova jednak 1. Koliki su polumjeri malih kružnica, odnosno okruglih cvjetova ako pretpostavimo da su svi ti kružići istog polumjera?

Na skici sa Slike 4. desno označili smo traženi polumjer r i uveli pomoćnu duljinu d (polovica udaljenosti središta dvaju preklopljenih krugova). Iz uvjeta dodira

malih kružnica s preklapajućim kružnicama i pravcima među njima (potencijalama) te dodira malih kružnica međusobno, dobivamo sljedeći sustav

$$(d - r)^2 + r^2 = (1 - r)^2$$

$$d^2 + 1 = (1 + r)^2.$$

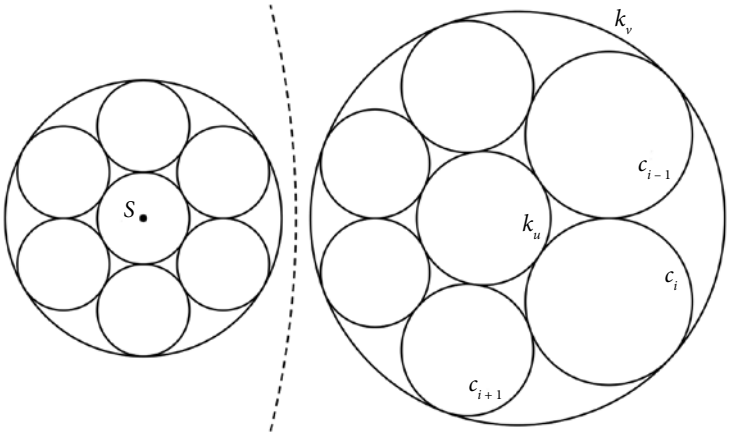
Pokažite da iz tog sustava nakon zamjene $x = 2r$ slijedi

$$x^3 + 3x^2 - 4x + 1 = 0.$$

Odmah se provjeri da ju –1 i 1 ne zadovoljavaju, pa ova jednadžba nema racionalnih rješenja. Iskoristite Teorem o konstruktibilnosti rješenja kubne jednadžbe iz [Kr] da zaključite kako se x, pa ni r, ne može konstruirati samo ravnalom i šestarom.

Odredite numeričkom metodom približna rješenja navedene jednadžbe. Jedno od njih možete odmah eliminirati jer je negativno, a za druga dva nacrtajte sliku u programu poput *GeoGebre*. Zaključite da samo jedno rješenje odgovara rasporedu sa Slike 4., a za drugo kružići dodiruju preklapajuće kružnice u skrivenim lukovima.

5. Pogledajmo na Slici 5. lijevo pojednostavljeni prikaz rozete koji smo koristili u [Kr] i dijelom u [R].



Slika 5.

Primijenimo li inverziju s obzirom na iscrtkanu kružnicu, dobivamo konfiguraciju na istoj slici desno. Što se događa na desnom dijelu slike ako rotiramo male kružnice na lijevoj strani oko središta S velike kružnice?

Ovo je ilustracija posebnog slučaja *Steinerova porizma* koji općenito kaže

Neka se kružnice k_u i k_v ne sijeku. Ako postoji niz kružnica $c_1, c_2..., c_n$ takav da kružnica c_i dodiruje k_u, k_v, c_{i-1}, c_{i+1} za svaki i (uzimamo $c_0 = c_n$, $c_{n+1} = c_1$), tada takav niz postoji za svaki izbor početne kružnice c_1 koja dodiruje k_u i k_v.

Tvrdnja je očita kada su k_u i k_v koncentrične kružnice, a da bi na taj slučaj sveli općenitu tvrdnju, treba pronaći inverziju koja će preslikati k_u i k_v u koncentrične kružnice. To je uvijek moguće, a evo vrlo šturih koraka dokaza.

Dvije kružnice su ortogonalne ako im tangente povučene u sjecištu zatvaraju pravi kut. Pokažite da se ortogonalnost čuva pri inverziji. Pokažite da središta kružnica ortogonalnih na dvije nekoncentrične kružnice leže na jednom pravcu (potencijali). Neka je O sjecište nekih dviju kružnica koje su obje ortogonalne na dvije dane kružnice k_u i k_v. Primijenite inverziju sa središtem u O.



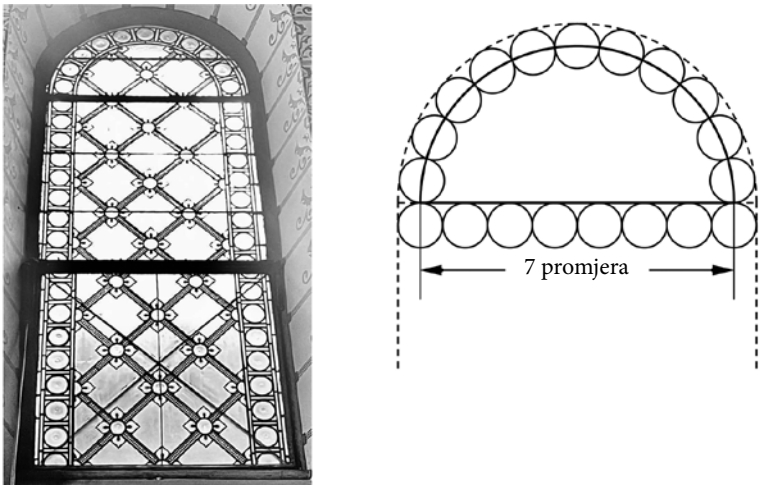
Slika 6.

6. Na Slici 6. vidimo bogato ukrašeni luster (polijelej) koji se nalazi u grkokatoličkoj konkatedrali.

U trodimenzionalnom prostoru definiramo inverziju s obzirom na sferu analogno definiciji inverzije u ravnini s obzirom na kružnicu. Proučite svojstva tog preslikavanja.

Modelirajte polijelej pomoću dužina, kružnih lukova i (dijelova) sfera. Odredite u što se ti skupovi preslikavaju pri prostornoj inverziji s obzirom na veliku sferu čija je donja polovica određena zakrivljenim šipkama s kuglicama i kovanom trakom duž «ekvatora".

7. Bočni vitraj na Slici 7. lijevo promatramo kao lik sastavljen od pravokutnika i polukruga.



Slika 7.

Pomoću kvadratne mreže na vitraju i vidljivih dijagonala donjeg stakla zaključite da su srednje i donje staklo približno kvadrati čija je stranica oko 8 puta veća od promjera malih krugova u borduri vitraja. To nam za polukrug na vrhu prozora daje konfiguraciju kao na Slici 7. desno. Pokažite da tako dobivamo aproksimaciju $\frac{22}{7} = 3.1428...$ za $\pi = 3.1415...$ koju je izveo još Arhimed. Metoda kojom je došao do ocjena za π opisana je u [2].

Ova je aproksimacija omjera opsega i promjera kruga vrlo dobra što uočavamo i iz verižnog razlomka $\pi = [3,7,15,1,292,1,1,...]$ kojemu je $3+\frac{1}{7}$ jedna od konvergenti. Još bolju racionalnu aproksimaciju dobivamo odrežemo li razvoj prije velikog parcijalnog kvocijenta 292, tj. za $[3,7,15,1] = \frac{355}{113}$. Za razliku od razvoja u verižni razlomak broja $\sqrt{2}$ kojim smo se bavili u [J] i općenitije verižnih razlomaka kvadratnih korijena racionalnih brojeva [5, §8.6], razvoj broja π puno je složeniji i ne pokazuje neke uočljive pravilnosti.

8. Pri računanju volumena stube ambona u [S] zanemarili smo izbočeni dio stube koji najbolje možemo opisati kao vanjski dio tijela omeđenog torusom. Preciznije, to je tijelo dobiveno rotacijom polukruga oko pravca paralelnog promjeru tog polukruga (Slika 8.).



Slika 8.

Kod određivanja volumena toga tijela možete primijeniti *Guldinovo (ili Pappusovo) pravilo*:

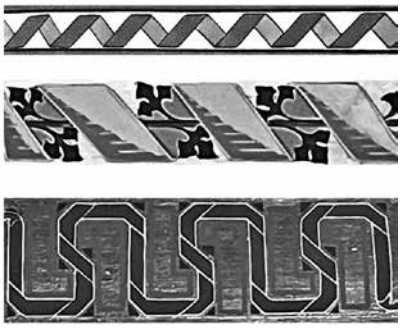
> Obujam tijela nastalog rotacijom ravninskog lika oko pravca koji leži u istoj ravnini i ne prolazi unutrašnjim točkama toga lika jednak je umnošku površine lika i opsega kružnice po kojoj se giba težište lika pri toj rotaciji.

Najprije odredite položaj težišta polukruga tako da stavite udaljenost pravca od polukruga $d = 0$. Dobit ćete kuglu čiji volumen smo izveli u [S] koristeći Cavalierijev princip. Zatim pomoću Guldinova pravila odredite volumen za proizvoljni d. U konkatedrali je $d = 79.5$ cm i $r = 3$ cm. Usporedite dobiveni volumen s volumenom gornje stube iz [S] kojoj to izbočenje pripada.

Postoji i slično Guldinovo pravilo za oplošje pomoću kojega možete izračunati oplošje ambona.

9. Odredite polumjer najmanje sfere koja obuhvaća unutrašnjost crkve. Za naš model crkve u [S] smo dobili da je najveća udaljenost dviju točaka u unutrašnjosti $< 2.96a$, gdje je a širina crkve. Jungov teorem povlači da je traženi polumjer $< 2.96a \cdot \frac{\sqrt{6}}{4}$, ali možemo li u ovom konkretnom slučaju dobiti bolju ogradu?

10. Na zidovima crkve možemo naći barem tri ornamenta koji predstavljaju savijene trake (Slika 9.).

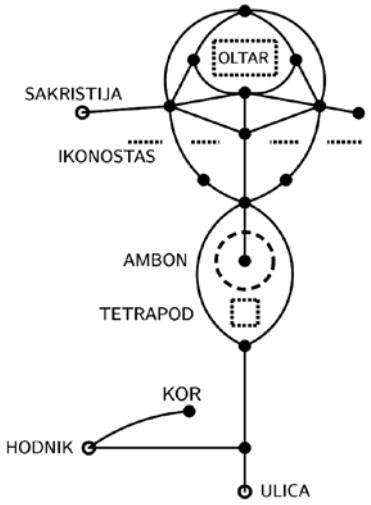


Slika 9.

Za svaki od njih odredite kolika bi bila duljina „razmotane" trake u odnosu na duljinu ornamenta. Koji udio vidljive površine pripada jednoj, a koji drugoj strani trake?

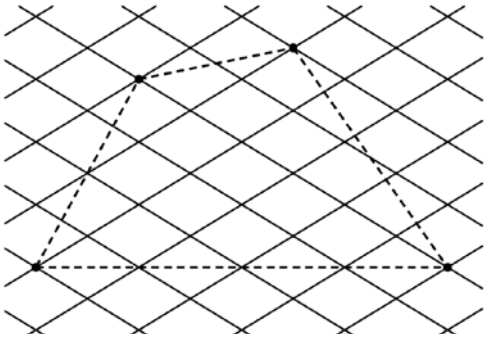
Za trake na zidu svetišta koje okružuju nekoliko pravokutnika procijenite na osnovi broja preklopa istovrsnih traka koji su omjeri površina te opsega tih pravokutnika.

11. Na Slici 10. prikazan je pojednostavljeni graf pozicija u crkvi uz pomoćne oznake i nazive dodane radi razumljivosti crteža. Ako je s jednog mjesta moguće direktno doći na drugo, takvi vrhovi grafa povezani su bridom. Numerirajte sve vrhove i zabilježite šetnje po grafu koje tijekom jedne liturgije naprave svećenici, đakoni, ministranti i obični vjernici.



Slika 10.

12. Centralni sag imao je ključnu ulogu u trećem dijelu članka [J], a jedan od frizova s njega klasificiran je u [F], ali nakon incidenta sa žeravicom iz kadionice, dani su mu odbrojeni.



Slika 11.

Na središnjem dijelu saga prepoznajemo mrežu kao na Slici 11. u kojoj mali sukladni rombovi imaju jedan kut mjere $60°$ i stranicu duljine 1. Izvedite modificiranu Pickovu formulu za površinu mnogokuta s vrhovima u čvorovima te mreže [10, Theorem 2]. Primjenom te formule dajte alternativno rješenje dijela 2. zadatka za 8. razred sa županijskog natjecanja iz matematike 2022. godine u kojemu je trebalo izračunati površinu iscrtkanog četverokuta na Slici 11.

Ako prilikom posjeta konkatedrali zateknete isti sag, pokušajte procijeniti površinu najmanjeg poligona koji treba izrezati kako bi se uklonilo nagoreno područje.

13. S obje strane uz ikonostas uočavamo dekorativni kvadrat i pravokutnik. Koje geometrijske transformacije preslikavaju rub (unutrašnjost) kvadrata u rub (unutrašnjost) pravokutnika?

Bočni prozor i pod crkve slični su likovi dobiveni sastavljanjem dva kvadrata u jedan pravokutnik kojemu je nad kraćom stranicom nadodan polukrug. Koje geometrijske transformacije preslikavaju bočni prozor u pod crkve?

Opišite tražena preslikavanja kao kompozicije poznatih preslikavanja (izometrije, homotetije, projekcije...) te ih zapišite algebarski nakon uvođenja odgovarajućeg koordinatnog sustava.

14. Pokažite kako dekoracije na prednjoj strani luka iznad ikonostasa dobiti iz dekoriranog pravokutnika primjenom kompleksne eksponencijalne funkcije [7].

15. Svod apside u [S] opisali smo kao dio sfere. Rebra svoda zaista možemo aproksimirati četvrtinama kružnica, no između njih se nalaze plohe koje nisu dio sfere. Opišite te plohe jezikom analitičke geometrije.

16. Iako oslik iznad bočnog prozora i rozete ima samo dekorativnu ulogu, naglašavanjem klinastih blokova luka upućuje nas kako se luk može raščlaniti radi statičke analize. Ravnoteža sila razmatra se za svaki pojedini segment luka, što je jasno i pristupačno objašnjeno u knjizi [6, §6].

17. Popločani dio poda crkve spominjali smo u [J], a pojedine bordure u [F], no veliki dio poda prekriven je teracom koji nema očitih pravilnosti. Ipak, možemo se zapitati jesu li kamenčići u svakoj od boja ravnomjerno raspoređeni po čitavoj površini poda ili postoje lokalne nakupine. Statistički gledano, to se može provjeriti uzorkovanjem, odnosno brojanjem kamenčića unutar okvira (npr. 30×30 cm) na nasumično odabranim mjestima [13]. Dobivene podatke možemo analizirati χ^2 -testom kako bismo utvrdili jesu li udjeli boja i broj kamenčića pojedine boje statistički ujednačeni na čitavoj površini poda.

18. U zagrebačkom nadbiskupijskom arhivu (preciznije vidi u [Ko]) nalazi se vrlo lijepa slika nacrta i bokocrta kivota (ovdje svetohraništa) u stvarnoj veličini. Potražite tu sliku i proučite pitanja o kivotu vezana uz frizove, podjelu kuta na jednake dijelove te udaljenosti, površine i volumene.

19. Za otvaranje i zatvaranje prozora u konkatedrali postavljeni su mehanizmi koji pretvaraju kružno gibanje (okretanje ručke) u približno pravocrtno (vertikalno pomicanje šipke) i obratno (otvaranje prozora). Modelirajte takav mehanizam u programu poput *GeoGebre* i proučite načine kako se kroz povijest pretvaralo kružno u pravocrtno gibanje [12], [3,§2].

Na kraju donosimo nekoliko kratkih i jednostavnih zadataka za najmlađe.

- Nađite razlike lijeve i desne strane crkve i pokušajte objasniti zašto na tim mjestima crkva nije zrcalno simetrična.
- Prebrojite na koliko se mjesta u crkvi pojavljuju likovi Isusa Krista, Bogorodice i Duha Svetog (u obličju goluba).
- Prebrojite koliko puta se tijekom jedne liturgije čuje zaziv „Gospodi, pomiluj!"
- Odjel za bogoštovlje i nastavu Zemaljske vlade kojemu je biskup Hranilović poslao na odobrenje nacrt ikonostasa odgovorio je da zbog cijene treba pojednostaviti ikonostas tako da sadrži samo 19 slika [8]. Biskup ih je ipak uvjerio da je najvažniji dio uređenja crkve istočnog obreda upravo ikonostas koji je zato izrađen po originalnom planu. Koliko je danas više slika na ikonostasu nego u prijedlogu Odjela za bogoštovlje?

Zahvaljujem župniku o. Nenadu Krajačiću koji mi je omogućio fotografiranje unutrašnjosti crkve.

Literatura:

1. F. M. Brückler, Eudoksova metoda iscrpljivanja, Osječki matematički list 24(2) (2024.), 133-146.
2. F. M. Brückler, π prije nego se za njega znalo, Osječki matematički list 21(2) (2021.), 151–161.
3. J. Bryant, C. Sangwin, How round is your circle?, Where engineering and mathematics meet, Princeton University Press, Princeton, 2008.
4. J. H. Conway, H. Burgiel, C. Goodman-Strauss, The magic theorem. A greatly-expanded, much-abridged edition of the symmetries of things, AK Peters/ CRC Recreational Mathematics Series, 2025.
5. A. Dujella, Teorija brojeva, Školska knjiga, Zagreb, 2019.
6. A. J. Hahn, Mathematical excursions to the world's great buildings, Princeton University Press, Princeton, 2012.

7. S. Pomerantz, Cosmatesque design and complex analysis, Math Horiz. 28 (2021.), no. 1, 5–7.
8. S. Prijić, Povijest i obnova sklopa grkokatoličkog sjemeništa i crkve sv. Ćirila i Metoda na Gornjem gradu u Zagrebu, diplomski rad, Filozofski fakultet u Zagrebu, 2013., https://darhiv.ffzg.unizg.hr/id/eprint/4147/
9. R. Quinlan, Frieze Decompositions of Wallpaper Patterns: Origami Models for the cmm Class, Proceedings of Bridges 2024, 211–218.
10. D. Ren, J. R. Reay, The boundary characteristic and Pick's theorem in the Archimedean planar tilings, J. Combin. Theory Ser. A 44 (1987.), no. 1, 110–119.
11. A. A. Savelov, Ravninske krivulje, Školska knjiga, Zagreb, 1979.
12. T. Tadić, Matematika parnog stroja, math.e 6 (2005.)
13. R. W. Thomas, An Introduction to Quadrat Analysis, Geo Abstracts, 1979., https://www.muthar-alomar.com/wp-content/uploads/2013/01/12-quadrat-analysis.pdf