Bojanje grafova u svakodnevnim primjenama

Anamari Nakić[1]

Sažetak. Graf je kombinatorna struktura koja se sastoji od vrhova i bridova među vrhovima. Ovaj je jednostavan matematički model pogodan za prikaz bilo kakve vrste odnosa objekata iz fizike, biologije, pa čak i lingvistike. U ovom su radu opisani bojanje vrhova grafa i kromatski broj grafa. Konačno, dani su problemski zadatci koji se mogu riješiti matematičkim modeliranjem pomoću grafa te određivanjem kromatskog broja grafa.

Uvod

Ovim se radom nastoji doprinijeti povezivanju matematičkih tema s inženjerstvom i tehnologijom. Predstavljena tema i povezani zadatci mogu pomoći u boljem razumijevanju važnosti i primjeni matematike u suvremenom svijetu. Teorija grafova nadovezuje se na teme iz kombinatorike i računalnog programiranja koje se obrađuju u srednjoškolskom programu.

U radu su uvedeni pojmovi bojanja grafa i kromatskog broja grafa. Predstavljena je primjena grafova u rješavanju svakodnevnih problema kroz zadatke namijenjene učenicima srednjih škola. Prezentirani zadatci primjereni su za samostalno rekreativno vježbanje matematike, ali i za računalno programiranje.

Graf G sastoji se od konačnog nepraznog skupa vrhova *V* i konačnog skupa bridova *E*. Prije nastavka čitanja ovog rada, čitatelja upućujemo na kratki uvod u teoriju grafova [3].

Bojanje grafova

Bojanje grafa G je pridruživanje nekog skupa boja skupu vrhova grafa *G* tako da je svakome vrhu pridružena jedna boja, pri čemu su susjednim vrhovima pridružene različite boje.

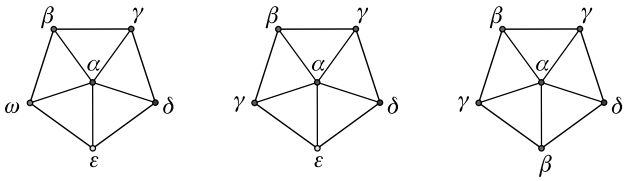
U ovom se radu boje pridružene vrhovima označavaju slovima grčkog alfabeta, kao što je prikazano u Tablici 1.

[1]Anamari Nakić, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet elektrotehnike i računarstva

Tablica 1. Oznake boja.

Oznaka	Boja
α alfa	crvena
β beta	plava
γ gama	zelena
δ delta	crna
ε epsilon	žuta
ω omega	narančasta

Na Slici 1. prikazan je graf kotač W_6 čijih je šest vrhova redom obojano sa šest, pet i četiri boje.



6 boja 5 boja 4 boje

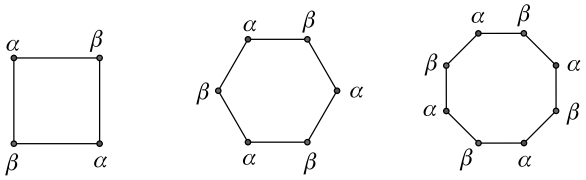
Slika 1. Bojanja kotača W_6

Na prvoj su slici svim vrhovima pridijeljene različite boje, a zatim je uočeno da je moguće smanjiti broj boja za jedan. Konačno, na zadnjoj je slici šest vrhova uspješno obojano s četiri boje, pri čemu su susjedni vrhovi obojani različitim bojama. Uočimo da se vrhove grafa W_6 ne može regularno obojiti s tri boje. Naime, za bojanje pet vrhova vanjskog ciklusa potrebne su tri boje, a središnji vrh koji je susjedan sa svim ostalim vrhovima mora se obojiti novom bojom.

Najmanji broj boja pridružen grafu G pri bojanju vrhova zovemo *kromatskim brojem* grafa G. Dakle, pokazano je da je kromatski broj kotača W_6 jednak četiri.

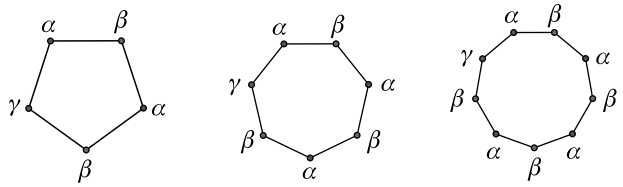
Primjer 1. *Pronađite kromatski broj ciklusa C_n s n vrhova.*

Ako je broj vrhova od C_n paran broj, lako je uočiti da se vrhovi naizmjenično mogu obojiti s dvije boje pa je kromatski broj jednak dva (Slika 2.).



Slika 2. Bojanje ciklusa s parnim brojem vrhova

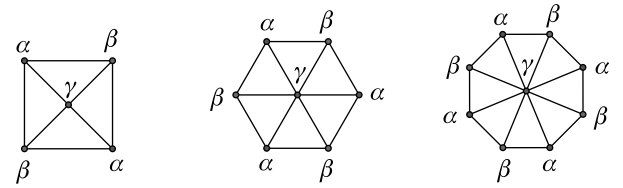
Primijetimo da se vrhove ciklusa C_n s neparnim brojem vrhova ne može obojiti sa samo dvije boje. Pridružuju li se redom vrhovima u ciklusu naizmjenično dvije boje, posljednji vrh bit će susjedan s obje boje pa je nužno uvesti treću boju. Kromatski broj ciklusa C_n s neparnim brojem vrhova jednak je tri (Slika 3.).



Slika 3. Bojanje ciklusa s neparnim brojem vrhova

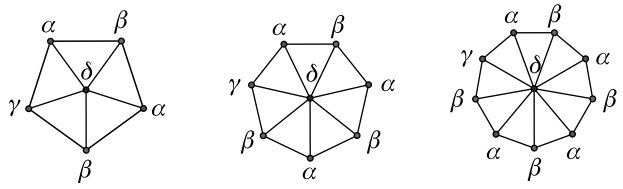
Primjer 2. *Kotač W_n s n vrhova sastoji se od ciklusa C_{n-1} i jednog središnjeg vrha koji je susjedan svim vrhovima u ciklusu. Odredite kromatski broj za kotač W_n.*

Za bojanje vanjskog ciklusa C_{n-1} potrebne su dvije boje kada je $n - 1$ paran broj. S obzirom da je središnji vrh susjedan sa svim ostalim vrhovima, mora se obojati novom bojom. Zaključujemo da kotač W_n ima kromatski broj jednak 3 kada je n neparan broj (Slika 4.).



Slika 4. Bojanje kotača Wn s neparnim brojem vrhova

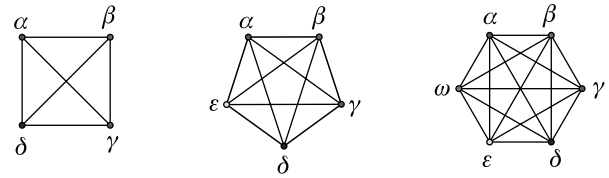
S druge strane, vanjski ciklus C_{n-1} može se obojati s najmanje tri boje kada je $n - 1$ neparan broj. Ponovno, za središnji vrh mora se uvesti nova boja, pa je kromatski broj kotača W_n jednak 4 kada je n paran broj (Slika 5.).



Slika 5. Bojanje kotača Wn s parnim brojem vrhova

Primjer 3. *Potpuni graf K_n je graf s n vrhova u kojem su svaka dva vrha povezana bridom. Odredite kromatski broj za K_n.*

Svaki je vrh susjedan sa svim ostalima pa svi vrhovi moraju biti obojani različitim bojama. Dakle, kromatski broj od K_n je n (Slika 6.).

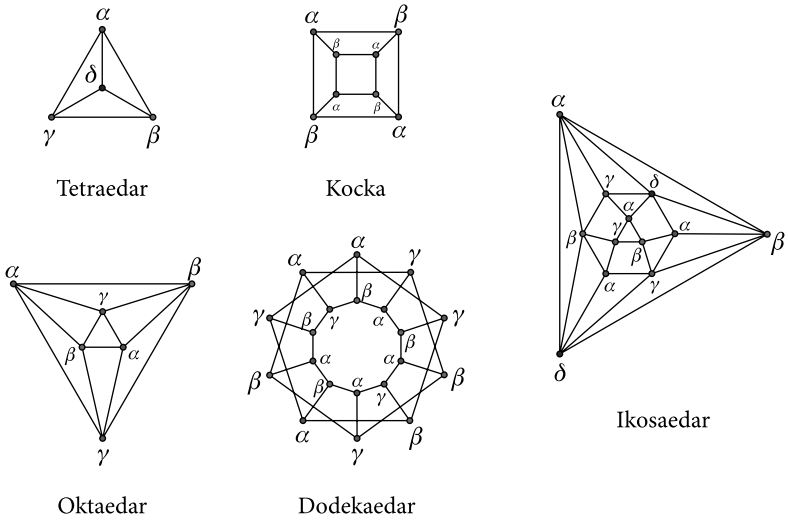


Slika 6. Bojanje potpunog grafa

U geometriji, *regularni poliedar* je onaj poliedar kojemu su sve strane sukladni pravilni poligoni, a kutovi među stranama jednaki. Nazivamo ih *Platonovim tijelima*. Postoji pet takvih tijela: *tetraedar* (omeđen s četiri istostranična trokuta), *kocka* (omeđena sa šest kvadrata), *oktaedar* (omeđen s osam istostraničnih trokuta), *dodekaedar* (omeđen s 12 pravilnih peterokuta) te *ikosaedar* (omeđen s 20 istostraničnih trokuta). Pet Platonovih tijela možemo prikazati i kao grafove.

Primjer 4. *Odredite kromatske brojeve za tetraedar, kocku, oktaedar, dodekaedar te ikosaedar.*

Rješenje je prikazano na Slici 7.



Slika 7. Bojanja Platonovih tijela

Nije poznata formula za kromatski broj proizvoljnog grafa. Od pomoći u otkrivanju je slavni Brooksov teorem o gornjoj granici za kromatski broj ([1]).

Teorem 1. *Ako je G jednostavni povezani graf koji nije potpuni graf, te ako je najveći stupanj nekog vrha jednak k ($k \geq 3$), onda se G može obojati s k boja.*

Primjena bojanja grafova

U nastavku rada prikazana su tri problema izrade rasporeda čije se rješenje može matematički modelirati pomoću bojanja grafova.

Primjer 5. *Tvornica umjetnih gnojiva u proizvodnji koristi kemikalije. Neke od njih međusobno burno reagiraju kada dođu u kontakt pa se moraju čuvati u odvojenim dijelovima skladišta. Tablica 2. pokazuje međusobnu reaktivnost pet kemikalija.*

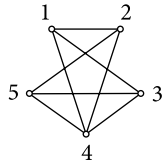
Tablica 2. Međusobna reaktivnost kemikalija

	1	2	3	4	5
1	−	+	+	+	−
2	+	−	−	+	+
3	+	−	−	+	+
4	+	+	+	−	+
5	−	+	+	+	−

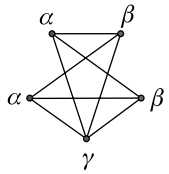
Koliko je odvojenih dijelova skladišta potrebno da bi se pet kemikalija čuvalo na siguran način?

Neka je *G* graf čiji su vrhovi kemikalije, a bridovi povezuju one vrhove koji predstavljaju kemikalije koje burno reagiraju. Prema navedenoj tablici, dobiveni graf *G* je prikazan na Slici 8.

Obojat ćemo vrhove grafa *G* tako da susjedni vrhovi nisu obojani istom bojom. Boje predstavljaju odvojene dijelove skladišta u kojima se sigurno odlažu kemikalije. Kromatski broj grafa *G* predstavlja najmanji broj odvojenih dijelova skladišta potrebnih za sigurno skladištenje kemikalija.



Slika 8. Vrhovi grafa G predstavljaju kemikalije a bridovi povezuju kemikalije koje burno reagiraju



Slika 9. Kromatski broj grafa G sa Slike 8. jednak je 3.

Kromatski broj grafa G jednak je 3 pa su potrebna najmanje 3 odvojena dijela skladišta za sigurno odlaganje kemikalija (Tablica 3.).

Tablica 3. Raspored kemikalija po skladištima

Skladište	Kemikalije
α	1, 5
β	2, 3
γ	4

Primjer 6. *U jednoj je školi ponuđeno šest izbornih predmeta. Dvanaest učenika odabralo je predmete prema Tablici 4.*

Tablica 4. Učenici upisani na izborne predmete

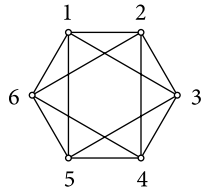
Izborni predmeti	*Upisani učenici*
1	*A, B, C, D*
2	*A, E, F, G*
3	*B, E, H, I*
4	*F, H, J, K*
5	*C, I, J, L*
6	*D, G, K, L*

Na kraju školske godine planiraju se pismene provjere znanja iz svih predmeta, uz sljedeće uvjete:

- *svi učenici jednog predmeta pišu pismenu provjeru znanja istovremeno,*
- *učenik u jednom danu piše najviše jednu pismenu provjeru znanja.*

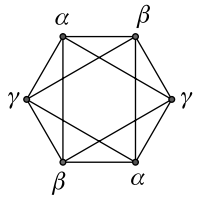
Odredite najmanji mogući broj dana u kojima se može održati šest pismenih provjera znanja, po jedna za svaki predmet.

Modeliramo ovaj problem pomoću grafa G. Tada su vrhovi predmeti, a bridovi povezuju one vrhove koji predstavljaju predmete s barem jednim zajedničkim učenikom. Prema navedenoj tablici, dobiveni graf G prikazan je na Slici 10.



Slika 10. Vrhovi grafa G predstavljaju predmete, a bridovi povezuju vrhove ako odgovarajući predmeti imaju upisanog bar jednog zajedničkog učenika.

Obojit ćemo vrhove grafa G tako da susjedni vrhovi nisu obojani istom bojom (Slika 11.). Boje predstavljaju dane u kojima se održavaju pismene provjere znanja. Kromatski broj grafa G predstavlja najmanji broj dana potreban za izvođenje provjera znanja uz poštovanje navedenih uvjeta.



Slika 11. Kromatski broj grafa G sa Slike 10. jednak je 3.

Kromatski broj ovog grafa je 3 stoga se provjere znanja iz šest predmeta mogu održati u 3 dana prema rasporedu prikazanom u Tablici 5.

Tablica 5. Raspored predmeta po danima

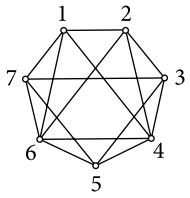
Dan	Predmet
α	1, 4
β	2, 5
γ	3, 6

Primjer 7. *Regulatorna agencija za mrežne djelatnosti dodjeljuje frekvencije za emitiranje programa sedam radio postaja. Postaje unutar dometa odašiljanja moraju koristiti različite frekvencije kako ne bi došlo do međusobnog ometanja emitiranja programa. Pretpostavimo da domet odašiljanja iznosi 300 km. Udaljenosti među postajama dane su u Tablici 6. Odredite najmanji mogući broj frekvencija dodijeljenih radio postajama bez međusobnog ometanja.*

Tablica 6. Udaljenosti među postajama izražene u km.

	1	2	3	4	5	6	7
1	–	200	400	250	350	190	260
2	200	–	150	270	400	290	320
3	400	150	–	250	175	360	230
4	250	270	250	–	100	150	400
5	350	400	175	100	–	275	290
6	190	290	360	150	275	–	160
7	260	320	230	400	290	160	–

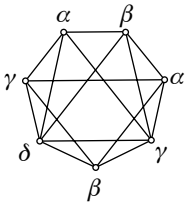
Modelirajmo ovaj problem pomoću grafa *G*. Tada su vrhovi radio postaje, a bridovi povezuju one vrhove koji predstavljaju postaje koje ne mogu imati istu frekvenciju, odnosno koje su udaljene manje ili jednako 300 km. Prema navedenoj tablici, dobiveni graf *G* prikazan je na Slici 12.



Slika 12. Vrhovi grafa G predstavljaju radio postaje a bridovi povezuju vrhove čije su odgovarajuće radio postaje udaljene manje ili jednako 300 km.

Obojit ćemo vrhove grafa *G* tako da susjedni vrhovi nisu obojani istom bojom (Slika 13.). Boje predstavljaju frekvencije dodijeljene radio postajama. Kromatski broj grafa *G* predstavlja najmanji broj frekvencija dodijeljenih radio postajama pri čemu nema međusobnog ometanja.

Kromatski broj ovog grafa je 4 stoga je dovoljno dodijeliti četiri frekvencije radio postajama prema rasporedu prikazanom u Tablici 7.



Slika 13. Kromatski broj grafa G sa Slike 12. jednak je 4

Tablica 7. Frekvencije dodijeljene radio postajama bez međusobnog ometanja

Frekvencije	Radio postaja
α	1, 3
β	2, 5
γ	4, 7
δ	6

Literatura:

1. R. L. Brooks, On colouring the nodes of a network, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 37, 2 (1941) 194–197.
2. D. Kovačević, M. Krnić, A. Nakić, M. O. Pavčević, Diskretna matematika 1, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet elektrotehnike i računarstva, 2020.
3. A. Nakić, Kratak uvod u teoriju grafova, Poučak 26 (102), 6 – 11.