Kako «dokazati" da je $\pi = 4$ (i zašto je to pogrešno)

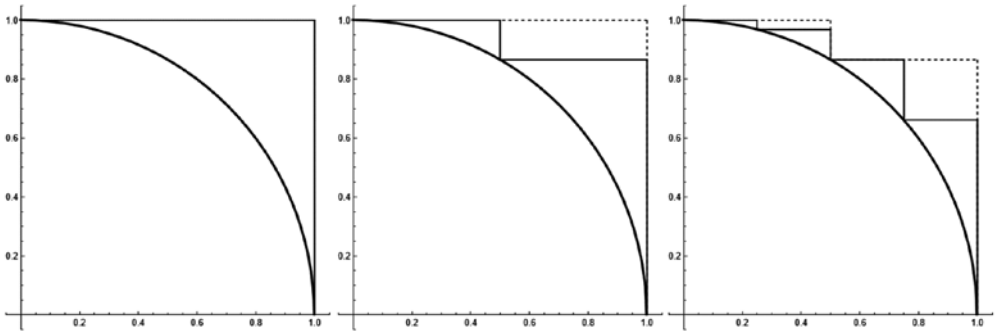
Aleksandar Hatzivelkos[1], Dora Raštegorac[2], Doroteja Piršljin[3]

1. Uvod

Motivacija za ovaj tekst potječe iz jednog klasičnog lažnog „dokaza" u kojem se, razmatranjem konstrukcije pravokutnih stepenica oko četvrtine jedinične kružnice, izvodi pogrešan zaključak da je $\pi = 4$. Premda se taj argument često pojavljuje kao ilustrativna dosjetka, njegova je didaktička težina stvarna: na formalnoj razini dokaz nas podsjeća na standardne postupke iz matematičke analize.

Standardne metode pokazuju kako se duljina krivulje definira kao limes zbroja duljina pripadnih sekanti, dok se površina lika određuje kao limes Darbouxovih, odnosno Riemannovih suma [4]. U tom kontekstu, stepenice koje sve bolje prianjaju uz kružnicu izgledaju kao legitimna aproksimacija. Zbog toga je lako previdjeti ključnu, ali intuitivno teže prihvatljivu činjenicu: niz krivulja može konvergirati zadanoj krivulji kao skupu točaka – pa čak i uniformno – a da se pritom njihove duljine uopće ne približavaju duljini te krivulje.

Krenimo stoga od same konstrukcije. Na četvrtini jedinične kružnice, omeđenoj točkama (0,1) i (1,0), konstruiramo tzv. stepeničasti put, tj. put koji se sastoji isključivo od vodoravnih i okomitih dužina, odnosno dužina paralelnih koordinatnim osima. Takav put prikazan je na Slici 1.



Slika 1. Iterativna konstrukcija "stepenica" uz četvrtinu jedinične kružnice

[1]Aleksandar Hatzivelkos, Veleučilište Velika Gorica
[2]Dora Raštegorac, Sveučilište Algebra Bernays
[3]Doroteja Piršljin, Sveučilište Algebra Bernays

Konstrukcija novih stepenica provodi se iterativno. U početnoj fazi imamo samo jednu grubu stepenicu: od točke (0,1) položimo vodoravnu dužinu do točke (1,1), pa zatim okomitu dužinu do točke (1,0).

U sljedećem koraku tu stepenicu dijelimo na dvije manje. Odaberemo točku na kružnici koja odgovara nekoj vrijednosti $x \in \langle 0,1 \rangle$ te kroz nju povučemo novu vodoravnu i novu okomitu dužinu. Na taj se način kreiraju nove stepenice koje bolje prianjaju uz kružni luk. Ključno je pritom da se ukupna duljina ne mijenja. Ako smo u prvom koraku imali jednu okomitu dužinu ukupne duljine 1 i jednu vodoravnu dužinu ukupne duljine 1, u sljedećem koraku imamo dvije okomite dužine čiji je zbroj duljina i dalje jednak 1, i dvije vodoravne dužine čiji je zbroj duljina također jednak 1.

Postupak se zatim nastavlja iterativnim umetanjem novih stepenica koje u sve većoj mjeri prianjaju uz kružni luk. Međutim, bez obzira na to koliko puta ponovimo postupak, zbroj svih vodoravnih duljina ostaje 1, kao i zbroj svih okomitih duljina. Stoga je ukupna duljina „stepenica" uvijek jednaka 2. Na Slici 1. prikazana su prva dva koraka opisane konstrukcije.

Iz konstrukcije slijedi da niz stepeničastih krivulja konvergira prema kružnom luku u prvom kvadrantu. Tada se, na temelju pogrešne pretpostavke da konvergencija stepeničastih krivulja prema kružnom luku nužno implicira i konvergenciju duljina stepeničastih krivulja prema duljini kružnog luka, slijedi zaključak

$$\frac{\pi}{4} = 2 \quad \Rightarrow \quad \pi = 4\,.$$

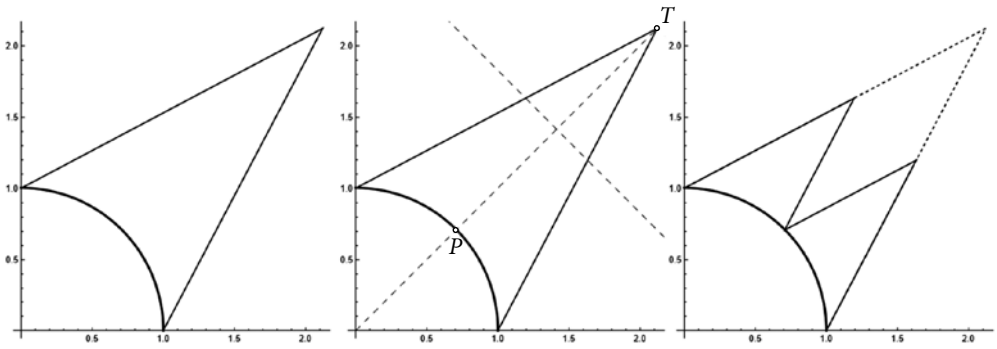
U nastavku iznosimo dva argumenta koja ukazuju na pogrešnost takvog zaključivanja. Prvim argumentom pokazujemo da se ista metoda zaključivanja može upotrijebiti za „dokaz" tvrdnje da je π jednak bilo kojem broju većem od 4. Drugim riječima, riječ je o metodi koja ne vodi samo do netočnog rezultata, već ne nameće dovoljno snažna ograničenja pa omogućuje izvođenje gotovo proizvoljnih zaključaka. Ipak, time još uvijek ostaje otvoreno ključno pitanje: gdje se točno nalazi pogreška i zbog čega je takvo rezoniranje na prvi pogled toliko uvjerljivo?

Drugim se argumentom usmjeravamo upravo na to pitanje. Provest ćemo kratku analizu nastale pogreške te je usporediti s dvjema standardnim situacijama: aproksimacijom duljine krivulje pomoću sekanti (tetiva) i aproksimacijom površine pomoću stepenica, odnosno Darbouxovih suma. Cilj je pružiti analitičko objašnjenje koje ostaje intuitivno razumljivo i ne zahtijeva uvođenje pojmova poput Lipschitzova svojstva. Dovoljno je promotriti red veličine pogreške u jednom koraku aproksimacije i analizirati njezino ponašanje pri zbrajanju kroz sve finiju diskretizaciju.

2. Iterativna metoda trokutima

Pokažimo sad kako se, prateći isto načelo zaključivanja, može „dokazati" da je π jednak bilo kojem broju većem od 4. U tu ćemo svrhu konstruirati niz trokutastih

krivulja koje, analogno kao i stepenice iz prethodne konstrukcije, konvergiraju (kao skup) prema kružnom luku polumjera 1 u prvom kvadrantu.



Slika 2. Prvi iterativni korak u konstrukciji niza trokutastih krivulja

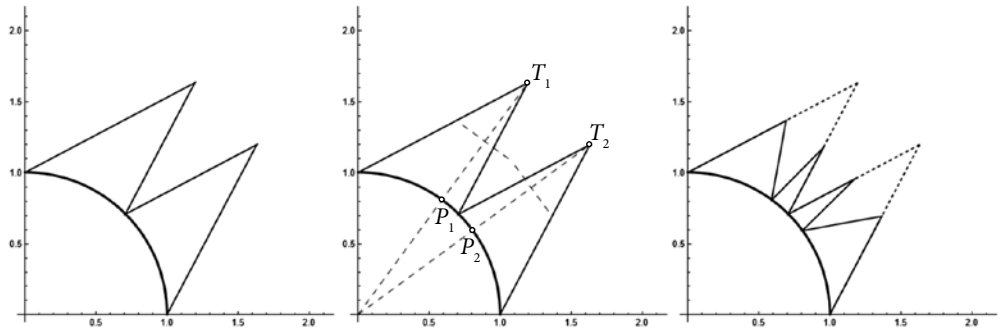
Kao početnu krivulju odaberimo trokut čija su dva vrha točke (0,1) i (1,1), dok se treći vrh nalazi u proizvoljnoj točki $T(x,x)$, gdje je $x \geq 1$, kao što je prikazano na Slici 2. Krakovi tog jednakokračnog trokuta čine prvu aproksimaciju kružnog luka. Zbog same konstrukcije, duljina tako dobivenog puta krivulje veća je ili jednaka 4.

Prvi korak konstrukcije provodimo na sljedeći način (Slika 2):

1. Povučemo pravac kroz ishodište i točku $T(x,x)$. Točku presjeka tog pravca s kružnim lukom označimo s *P*.
2. Konstruiramo simetralu dužine $\overline{TP}$.
3. Vanjski dio trokuta (dio trokuta koji sadrži vrh *T*) osno preslikamo s obzirom na simetralu dužine $\overline{TP}$.

Iz konstrukcije je jasno kako se točka *T* preslikala u točku *P* koja leži na kružnom luku, te da je ukupna duljina puta po stranicama trokuta (koje nisu tetive kružnog luka) ostala ista.

Opisani se postupak zatim ponavlja na svakom od novonastalih trokuta, a drugi takav iterativni korak prikazan je na Slici 3.



Slika 3. Drugi iterativni korak u konstrukciji niza trokutastih krivulja

Iz opisane konstrukcije vidljivo je da su ostvarena oba postavljena cilja. Prvo, ukupna duljina puta duž trokutaste krivulje ostaje nepromijenjena u svakom iterativnom koraku, što slijedi iz činjenice da se konstrukcija temelji na osnim preslikavanjima koja čuvaju duljinu. Drugo, maksimalna udaljenost između točaka trokutaste krivulje i pripadnog kružnog luka sa svakom se iteracijom smanjuje, što ima za posljedicu konvergenciju trokutastih krivulja prema kružnom luku.

Prisjetimo se početka konstrukcije, gdje je jedini uvjet za točku $T(x,x)$ da je $x \geq 1$. Udaljenost točke T od točke (0,1) jednaka je $d = \sqrt{x^2 + (x-1)^2}$, pa je ukupna duljina puta duž trokutaste krivulje (koji ostaje jednak kroz sve iteracije) jednaka $2d$. Kako trokutaste krivulje konvergiraju prema kružnom luku, možemo upotrijebiti isti pogrešan zaključak da to vrijedi i za njihove duljine, pa je tada:

$$\frac{\pi}{2} = 2 \cdot \sqrt{x^2 + (x-1)^2} \;\Rightarrow\; \pi = 4 \cdot \sqrt{x^2 + (x-1)^2}$$

Lako se sad provjeri da je $x^2 + (x-1)^2 \geq 1$ za sve $x \geq 1$, odnosno da je po tom „dokazu" jednak bilo kojoj vrijednost koja je veća ili jednaka 4.

3. Analiza pogreške

U ovom poglavlju analiziramo razloge zbog kojih stepeničaste aproksimacije kružnog luka, iako u geometrijskom smislu konvergiraju prema tom kružnom luku, ne osiguravaju konvergenciju njihovih duljina prema stvarnoj duljini kružnog luka. Usporedbom ćemo pokazati da analogan limes, primijenjen na aproksimaciju kružnog luka tetivama (sekantama), daje točnu vrijednost njegove duljine.

Podijelimo četvrtinu jedinične kružnice na n jednakih kutnih koraka. Neka je

$$\Delta\varphi = \frac{\pi/2}{n}, \qquad \varphi_i = i \cdot \Delta\varphi, \qquad i = 0,1,...,n,$$

te označimo točke na kružnici $P_i = (\cos\varphi_i, \sin\varphi_i)$. Jasno je kako vrijedi $\varphi_{i+1} = \varphi_i + \Delta\varphi$. Na jediničnoj kružnici duljina luka između φ_i i φ_{i+1} točno je $\Delta\varphi$ (jer je polumjer promatrane kružnice jednak 1).

S druge strane, duljina pripadne stepenice koja spaja točke P_i i P_{i+1} iznosi

$$S_i = |\Delta x_i| + |\Delta y_i|,$$

gdje su

$$\Delta x_i = \cos(\varphi_{i+1}) - \cos(\varphi_i), \qquad \Delta y_i = \sin(\varphi_{i+1}) - \sin(\varphi_i).$$

Za dovoljno mali $\Delta\varphi$ možemo iskoristiti prvu aproksimaciju za promjenu sinusa i kosinusa, koja slijedi iz Taylorovog razvoja za te funkcije [2]

$$\cos(\varphi+\Delta\varphi)=\cos\varphi-\sin\varphi\cdot\Delta\varphi+O(\Delta\varphi^2),$$
$$\sin(\varphi+\Delta\varphi)=\sin\varphi+\cos\varphi\cdot\Delta\varphi+O(\Delta\varphi^2).$$

Uvrstimo li te izraze u $|\Delta x_i|$ i $|\Delta y_i|$, dobivamo

$$|\Delta x_i|=\cos\varphi_i-\cos(\varphi_i+\Delta\varphi)=\sin\varphi_i\cdot\Delta\varphi+O(\Delta\varphi^2),$$
$$|\Delta y_i|=\sin(\varphi_i+\Delta\varphi)-\sin\varphi_i=\cos\varphi_i\cdot\Delta\varphi+O(\Delta\varphi^2),$$

Odnosno

$$S_i=\left(\sin\varphi_i+\cos\varphi_i\right)\cdot\Delta\varphi+O(\Delta\varphi^2).$$

Kako je duljina luka kružnice na tom odsječku jednaka $\Delta\varphi$, slijedi kako je lokalna pogreška generirana na jednoj stepenici jednaka

$$E_i=S_i-\Delta\varphi=\left(\sin\varphi_i+\cos\varphi_i-1\right)\cdot\Delta\varphi+O(\Delta\varphi^2). \quad (1)$$

Vidimo kako je vodeći član ocjene pogreške linearan, odnosno proporcionalan s $\Delta\varphi$. Faktor proporcionalnosti ovisi o kutu φ_i, no za $\varphi_i\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ vrijedi

$$0\le\sin\varphi_i+\cos\varphi_i-1\le\sqrt{2}-1,$$

gdje se nula postiže u rubnim točkama (što je i očekivano, jer se u tim točkama jedna od stranica stepenice poklapa s tangentom, odnosno najboljom linearnom aproksimacijom), a maksimalna vrijednost u blizini kuta $\pi/4$.

Promotrimo sad pogreške koje nastaju na omeđenom području, odnosno na stepenicama kreiranim kod kutova φ_i,

$$\varphi_i\in\left[\frac{\pi}{8},\frac{3\pi}{8}\right].$$

Kako su kutovi φ_i kreirani uniformnom podjelom intervala $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, zaključujemo kako je broj kutova u tom intervalu približno jednak $n/2$. Na tom segmentu funkcija

$$f(\varphi)=\sin\varphi+\cos\varphi-1$$

nije blizu nule: ona je neprekidna i na zatvorenom intervalu $\left[\frac{\pi}{8},\frac{3\pi}{8}\right]$ ima pozitivni minimum (jer je jednaka nuli samo na rubovima $\varphi=0$ i $\varphi=\pi/2$) koji ćemo označiti s $c_0>0$. Tada za svaki $\varphi_i\in\left[\frac{\pi}{8},\frac{3\pi}{8}\right]$ vrijedi

$$\sin\varphi+\cos\varphi-1\ge c_0.$$

Uvrštavanjem u formulu za pogrešku dobijemo

$$E_i\ge c_0\Delta\varphi+O(\Delta\varphi^2).$$

Zbrajanjem svih grešaka nastalih na stepenicama formiranih kod kutova svaki dobivamo

$$E' \geq \sum_{\varphi_i \in \left[\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\right]} \left(c_0 \Delta\varphi + O(\Delta\varphi^2)\right) = \left(c_0 \Delta\varphi + O(\Delta\varphi^2)\right) \cdot \frac{n}{2}$$

$$E' \geq c_0 \Delta\varphi \cdot \frac{n}{2} + \frac{n}{2} \cdot O(\Delta\varphi^2) = c_0 \frac{\pi/2}{n} \cdot \frac{n}{2} + \frac{n}{2} \cdot O(\Delta\varphi^2) = c_0 \frac{\pi}{4} + \frac{n}{2} \cdot O(\Delta\varphi^2) .$$

Lako je provjeriti da drugi dio te ocjene greške teži u nulu (kad *n* neograničeno raste), jer je $O(\Delta\varphi^2) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, pa vrijedi

$$\frac{n}{2} \cdot O(\Delta\varphi^2) \sim n \cdot \frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n} \to 0 .$$

Zaključujemo da je razlika između stvarne duljine luka krivulje i duljine stepenica koje ga aproksimiraju veća od konstantne vrijednosti te ne ovisi o broju stepenica *n*. To se već vidi na segmentu $\left[\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\right]$ što implicira da ukupna pogreška na cijelom intervalu $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ može biti samo veća od te ocjene.

Stoga ova procjena pogreške pokazuje da, iako se stepenice s porastom njihova broja – promatrane kao skup točaka – sve više približavaju luku krivulje, isto ne vrijedi i za njihove duljine. Razlika između duljine stepenica i duljine luka krivulje ostaje (barem) konstantna, neovisno o broju stepenica .

4. Aproksimacija duljine tetivama

Uz iste oznake kao pri konstrukciji niza stepenica, promotrimo aproksimaciju duljine kružnog luka pomoću sekanti, odnosno tetiva koje spajaju uzastopne točke P_i i P_{i+1}. Za razliku od stepeničaste krivulje, duljina pojedine tetive ovisi isključivo o *n*, tj. $\Delta\varphi$, ali ne i o indeksu *i*. Budući da je riječ o tetivi nad središnjim kutom $\Delta\varphi$, njezina duljina dana je izrazom

$$C(\Delta\varphi) = 2\sin\frac{\Delta\varphi}{2},$$

odnosno, razlika između duljine svake pojedinačne tetive i duljine pripadnog luka krivulje dana je izrazom [3]

$$\varepsilon(\Delta\varphi) = \Delta\varphi - 2\sin\frac{\Delta\varphi}{2} .$$

Raspisivanjem izraza $\sin\frac{\Delta\varphi}{2}$ u Taylorov red, dobivamo

$$\sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) = \frac{\Delta\varphi}{2} - \frac{\Delta\varphi^3}{48} + O(\Delta\varphi^5) ,$$

stoga je

$$\varepsilon(\Delta\varphi) = \Delta\varphi - \left(\Delta\varphi - \frac{\Delta\varphi^3}{24} + O(\Delta\varphi^5)\right) = \frac{\Delta\varphi^3}{24} + O(\Delta\varphi^5).$$

Zbrajanjem svih lokalnih pogrešaka dobivamo globalnu ocjenu pogreške

$$E^{tot} = n \cdot \varepsilon(\Delta\varphi) = n \cdot \frac{\Delta\varphi^3}{24} + n \cdot O(\Delta\varphi^5).$$

Za prvi dio ocjene pogreške vrijedi

$$n \cdot \frac{\Delta\varphi^3}{24} = \frac{n}{24} \cdot \left(\frac{\pi/2}{n}\right)^3 = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{\pi^3}{192},$$

pa taj dio teži u nulu kada $n \to \infty$, a za drugi dio pogreške imamo

$$n \cdot O(\Delta p^5) \sim n \cdot \frac{1}{n^5} \sim \frac{1}{n^4} \to 0.$$

Dakle, pri aproksimaciji kružnog luka dijelovima linearne funkcije, ukupna pogreška u aproksimaciji duljine luka krivulje teži nuli kada broj podjela *n* neograničeno raste.

5. Zaključak

Razmatranjem konstrukcije pravokutnih stepenica oko četvrtine jedinične kružnice dobiva se niz krivulja koje, promatrane kao skupovi točaka, konvergiraju prema kružnom luku, dok njihova duljina ostaje konstantna. Pogrešan zaključak da iz toga slijedi $\pi = 4$ proizlazi iz neopravdanog poistovjećivanja geometrijske konvergencije s konvergencijom duljina. Da je riječ o pogrešci same metode, a ne pojedine konstrukcije, pokazuje i primjer trokutastih krivulja koje na sličan način konvergiraju prema kružnici uz nepromijenjenu duljinu. Isti se način rezoniranja pritom može iskoristiti za „dokazivanje" proizvoljne vrijednosti broja π veće od 4.

Ispravnost standardnog pristupa vidljiva je pri aproksimaciji kružnog luka pomoću sekanti (tetiva), pri čemu se pogreške pri zbrajanju smanjuju i u limesu nestaju, pa dobivena duljina doista konvergira stvarnoj duljini luka. Time postaje jasno zašto se duljina krivulje u matematičkoj analizi definira pomoću sekanti, a ne pomoću stepeničastih ili sličnih konstrukcija.

Valja napomenuti da se ovakvi paradoksi danas često pojavljuju u popularnim matematičkim sadržajima na YouTubeu [5], TikToku [6], Redditu [6] te drugim digitalnim platformama i popularnim blogovima, najčešće u obliku kratkih i vizualno dojmljivih prikaza. Iako mogu djelovati uvjerljivo, takvi primjeri dodatno naglašavaju didaktičku vrijednost rasprave o razlici između intuitivne slike i analitičke ispravnosti te čine paradoks $\pi = 4$ korisnim polazištem za raspravu u nastavi matematike.

Literatura:

1. Wolfram Demonstrations Project, „Pi = 4?", online demonstracija, (24. 2. 2026.) https://demonstrations.wolfram.com/Pi4/
2. Rudin W., *Principles of Mathematical Analysis*, 3rd ed., McGraw-Hill, 1976, Chapter 5, Theorem 5.15, str. 110.
3. I. M. Gelfand & M. Saul, Trigonometry, Birkhauser, 2001, Chapter 2, p. 57.-59.
4. Rudin W., *Principles of Mathematical Analysis*, 3rd ed., McGraw-Hill, 1976, Chapter 6, 6.1 Definition, str. 120.
5. YouTube, „Does pi = 4? (A Good Explanation)", mrežni videozapis, (24. 4. 2026.) https://www.youtube.com/watch?v=Rv0c7R8brjE
6. Universal Symmetry, „Pi equals 4", TikTok, mrežni videozapis (24. 4. 2026) https://www.tiktok.com/@universal.symmetry/video/7196301910675033386
7. Reddit, r/learnmath, „If you can approximate areas in calculus, why can't that be done to 'prove' pi=4?", mrežna rasprava, (24. 4. 2026.) https://www.reddit.com/r/learnmath/comments/1972zzd/if_you_can_approximate_areas_in_calculus_why_cant/