Realni brojevi u matematici i ostalim znanostima

Zvonimir Šikić[1]

Eugene Wigner (1902. – 1995.) u slavnom članku [W] artikulirao je ono što su davno prije njega prepoznali mnogi znanstvenici; izuzetnu primjenjivost matematike u prirodnim znanostima. Zatim je ustvrdio da ta primjenjivost nije *reasonable*. Da bismo lakše pristupili tom problemu, primijetimo da uobičajena uporaba matematike u prirodnim znanostima ima tri koraka: idealizaciju znanstvene domene, povezivanje te idealizacije s nekom matematičkom strukturom i korištenje (u znanstvenim argumentima) čak i onih matematičkih konstrukcija koje nadilaze ovo povezivanje. Idealizacija je nužna jer je nemoguće baviti se svim aspektima bilo kojeg problema. Ključni je problem povezivanje te idealizacije s njoj adekvatnom matematičkom strukturom. Naime, kako znamo da je struktura adekvatna? Kada riješimo taj problem ostaje pitanje korektne primjene mnogo šireg matematičkog aparata na probleme te konkretne strukture. No, to pitanje više nije pitanje primjene matematike u prirodnoj znanosti, nego je čisto matematičko pitanje primjene matematike u matematici. To je Hilbertov, a ne Wignerov problem i njime se ovdje nećemo baviti.

Wignerovim problemom bavit ćemo se u posebnom slučaju realnih brojeva kao mjere gotovo svih veličina u egzaktnim znanostima. Naime, dokazat ćemo da Wignerova *unreasonable effectivness of mathematics*, što se tiče realnih brojeva, ima vrlo jednostavno objašnjenje.

1. Realni brojevi u matematici

U ovom ćemo poglavlju prikazati glavne načine aksiomatizacije realnih brojeva u matematici. Dokaze njihove ekvivalentnosti dajemo na kraju članka u posebnom dodatku.

1.1. Aksiomatizacije realnih brojeva

Struktura realnih brojeva $(\mathbb{R},+,\cdot,0,1,<)$ danas se najčešće aksiomatizira kao (linearno) uređeno polje u kojem vrijede Arhimedov i Cauchyjev aksiom:

(A) $(\forall x, y \in \mathbb{R})(\exists n \in \mathbb{N})(ny > x)$

(C) Svaki Cauchyjev niz konvergira.

1Zvonimir Šikić, Zagreb

Uređeno polje koje zadovoljava (A) zovemo Arhimedovim, koje zadovoljava (C) kontinuiranim, a koje zadovoljava (A) i (C) potpunim. Često se umjesto aksioma (A) i (C) koristi njima ekvivalentni Dedekindov aksiom:

(D) Svaki neprazni skup koji ima donju među ima najveću donju među.

Najvažnije svojstvo te najčešće aksiomatizacije jest da za nju vrijedi sljedeći teorem.

Teorem kategoričnosti

Postoji potpuno uređeno polje realnih brojeva $(\mathbb{R},+,\cdot,0,1,<)$.

Svako Arhimedovo uređeno polje $(G,+,\cdot,0,1,<)$ može se izomorfno smjestiti u potpuno uređeno polje realnih brojeva $(\mathbb{R},+,\cdot,0,1,<)$.

Ako je $(G,+,\cdot,0,1,<)$ potpuno uređeno polje onda je ono izomorfno s $(\mathbb{R},+,\cdot,0,1,<)$.

Postoje i mnoge druge formulacije aksioma potpunosti. Navodimo neke najpoznatije. Njihova ekvivalentnost vrijedi u uređenom polju, a ako vrijedi samo u Arhimedovu uređenom polju to posebno naglašavamo. Primijetimo da je, u uređenom polju, Arhimedov aksiom ekvivalentan s tvrdnjom $(\forall x)(\exists n\in\mathbb{N})\left(\frac{1}{n}<x\right)$, koja zapravo znači da je $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

Rez u $\mathbb{R}$ je particija (D, L) u kojoj je $D\neq\emptyset\neq L$ i $D < L$, tj. $(\forall l\in L)(\forall d\in D)$ $(l<d)$. Međom reza (D, L) zovemo $c\in\mathbb{R}$ takav da $(\forall l\in L)(\forall d\in D)(l\le c\le d)$. Rez u $\mathbb{R}$ koji nema međe zovemo rupom u $\mathbb{R}$.

Dedekindov 1. aksiom: $\mathbb{R}$ nema rupa.

Dedekindov 2. aksiom: Svaki odozdo omeđeni skup u $\mathbb{R}$ ima infimum. (Naravno, tada i svaki odozgo omeđeni skup ima supremum).

Oba ćemo aksioma zvati Dedekindovim aksiomom. Iz konteksta će uvijek biti jasno na koji mislimo.

Dedekindovom prvom aksiomu blizak je topološki pojam povezanosti. Topološki je prostor povezan ako ne postoji njegova particija na dva neprazna otvorena (dakle i zatvorena) skupa.

Jordanov aksiom: $\mathbb{R}$ je povezan.

Marsdenov aksiom: Svaki konveksni skup u $\mathbb{R}$ je interval.

Stevinov 1. aksiom: Svaki decimalni razvoj $d.d_1d_2d_3\ldots$ konvergira u $\mathbb{R}$.

I broj prema kojem razvoj konvergira označavamo s $d.d_1d_2d_3$ pa aksiom djeluje kao tautologija, iako to nije. Npr. decimalni razvoj od $\sqrt{2}$ ne konvergira u $\mathbb{Q}$ (jer $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$).

Stevinov 2. aksiom: Svaki rastući odozgo omeđeni niz konvergira u $\mathbb{R}$ (ili ekvivalentno, svaki padajući odozdo omeđeni niz konvergira u $\mathbb{R}$).

Oba ćemo aksioma zvati Stevinovim aksiomom. Iz konteksta će uvijek biti jasno na koji mislimo.

Cantorov aksiom: Svaki uklopljeni niz zatvorenih intervala u $\mathbb{R}$ ima neprazni presjek. (Ekvivalentan je Dedekindovu aksiomu u Arhimedovim poljima.)

Cauchyjev aksiom: Svaki Cauchyjev niz konvergira u $\mathbb{R}$. (Ekvivalentan je Dedekindovu aksiomu u Arhimedovim poljima.)

Bolzano-Weierstrassov aksiom: Svaki omeđeni niz u $\mathbb{R}$ ima konvergentni podniz.

Skup $J \subseteq \mathbb{R}$ zovemo induktivnim ako ima svojstva „početka", „skakanja" i „zatvaranja":

(P) $(\exists a)(-\infty, a] \subseteq J$,

(S) $(-\infty, x] \subseteq J \to (\exists y > x)(-\infty, y] \subseteq J$ i

(Z) $(-\infty, x) \subseteq J \to (-\infty, x] \subseteq J$.

Transfinitna indukcija je princip koji jamči da za induktivni J vrijedi $J = \mathbb{R}$. Intuitivno rezoniramo na sljedeći način.

Polazeći od $a \in J$ skokovima generiramo $(-\infty, a] \subset (-\infty, b_1] \subset (-\infty, b_2] \subset \cdots \subseteq J$.

Ako $b_n \to b'$, onda je $(-\infty, b') \subseteq J$, pa je i $(-\infty, b'] \subseteq J$. Za $b' = \infty$ imamo $J = \mathbb{R}$. Za $b' < \infty$ skokovima generiramo $(-\infty, b'] \subset (-\infty, b_1'] \subset (-\infty, b_2'] \subset \cdots \subseteq J$.

Ako $b_n' \to b''$, onda je $(-\infty, b'') \subseteq J$, pa je i $(-\infty, b''] \subseteq J$. Za $b'' = \infty$ imamo $J = \mathbb{R}$. Za $b'' < \infty$ skokovima generiramo $(-\infty, b''] \subset (-\infty, b_1''] \subset (-\infty, b_2''] \subset \cdots \subseteq J$.

Ako $b_n'' \to b'''$ onda je $(-\infty, b''') \subseteq J$, pa je i $(-\infty, b'''] \subseteq J$. Za $b''' = \infty$ imamo $J = \mathbb{R}$. I tako dalje.

Transfinitna indukcija jamči da će „i tako dalje" dovesti do $b''''^{\cdots} = \infty$ i $J = \mathbb{R}$.

Hinčinov aksiom: U $\mathbb{R}$ vrijedi transfinitna indukcija.

Polazeći od teorema kategoričnosti, Hilbert je $\mathbb{R}$ aksiomatizirao na sljedeći način.

Hilbertov aksiom: $\mathbb{R}$ je maksimalno Arhimedovo uređeno polje.

Zadnji aksiom potpunosti koji ćemo razmatrati u ovom članku, Leibnizov je aksiom koji spada u nestandardnu analizu. Mada je od njega starija samo Stevinova definicija realnog broja, da bismo ga danas razumjeli, dobro je znati bar nešto o nestandardnom uređenom polju hiperrealnih brojeva $\mathbb{R}^*$.

Počet ćemo s nešto jednostavnijim, Henleovim aksiomom. Za njegovu formulaciju dovoljno je hiperrealne brojeve definirati kao proizvoljne nizove realnih brojeva. Tako definirani hiperrealni brojevi sadrže realne brojeve u obliku konstantnih nizova. Za hiperrealni broj kažemo da je konačan ako je (kao niz) omeđen, a njegovim podbrojem zovemo svaki njegov podniz. Kažemo da je hiperrealni broj beskonačno blizu nekom realnom broju ako (kao niz) konvergira prema tom realnom broju.

Henleov aksiom: Svaki konačni hiperrealni broj ima podbroj koji je beskonačno blizu točno jednom realnom broju.

Henleov aksiom zapravo tvrdi da svaki omeđeni niz ima konvergentni podniz, što je doslovno Bolzano-Weierstrassov aksiom. Leibnizov aksiom jača je tvrdnja.

Leibnizov aksiom: Svaki konačni hiperrealni broj beskonačno je blizu točno jednom realnom broju.

Da bi Leibnizov aksiom vrijedio u strukturi prethodno definiranih hiperrealnih brojeva, svi bi omeđeni nizovi morali konvergirati. To očito ne vrijedi, ali bi vrijedilo ako bismo svaki omeđeni niz realnih brojeva sistematski identificirali s jednim od njegovih konvergentnih podnizova. Jedna moguća konstrukcija takve nestandardne strukture provodi takvu identifikaciju nizova u $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ pomoću ultrafiltera, a druga je Banachova konvergencija. Obje opisujemo u dodatku.

Dakle, aksiomatizacije strukture realnih brojeva $\mathbb{R}$ možemo sistematizirati na sljedeći način (UP su aksiomi uređenog polja, a AUP su aksiomi Arhimedova uređenog polja):

Skupovne aksiomatizacije

UP + 1. Dedekindov aksiom (u $\mathbb{R}$ nema rupa).

UP + 2. Dedekindov aksiom (omeđeni skup u $\mathbb{R}$ ima infimum/supremum).

UP + Jordanov aksiom ($\mathbb{R}$ je povezan).

UP + Marsdenov aksiom (konveksni skup u $\mathbb{R}$ je interval).

Nizovne aksiomatizacije

AUP + Cantorov aksiom (presjek uklopljenih zatvorenih intervala neprazan je u $\mathbb{R}$).

UP + Bolzano-Weierstrassov aksiom (omeđeni niz u $\mathbb{R}$ ima konvergentni podniz).

UP + 1. Stevinov aksiom (decimalni razvoj konvergira u $\mathbb{R}$).

UP + 2. Stevinov aksiom (monotoni omeđeni niz konvergira u $\mathbb{R}$).

Induktivna aksiomatizacija

UP + Hinčinov aksiom (u $\mathbb{R}$ vrijedi transfinitna indukcija).

Hiperrealne aksiomatizacije

UP + Henleov aksiom (podbroj konačnog hiperrealnog broja beskonačno je blizu realnom broju).

UP + Leibnizov aksiom (konačni hiperrealni broj beskonačno je blizu realnom broju).

Globalna aksiomatizacija

UP + Hilbertov aksiom ($\mathbb{R}$ je maksimalno Arhimedovo uređeno polje).

1.2. Povijesne napomene

Arhimedov aksiom nalazimo u 5. knjizi Euklidovih *Elemenata* kao definiciju (koja definira kada su dvije veličine usporedive, tj. kada nijedna nije beskonačna u odnosu na onu drugu). Kao aksiom, koristio ga je Arhimed (c.-287 – c.-212) u knjizi *O sferi i cilindru*.

Arhimedov aksiom u obliku $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ djeluje kao tautologija pa mnogi nisu ni svjesni mogućnosti ne-Arhimedovih uređenih polja (kontinuiranih i nekontinuiranih). To je vjerojatno jedan od najjačih (iako pogrešnih) razloga za odbacivanje pojma infinitezimala, ili za često ponavljanu (također pogrešnu) tvrdnju da je taj pojam nekonzistentan.

Dedekindove aksiome uveo je Richard Dedekind (1831. – 1916.) u [D]. Prvi nije uveo kao aksiom nego kao tehniku konstrukcije strukture $\mathbb{R}$ iz strukture $\mathbb{Q}$ (realne je brojeve karakterizirao kao rezove u području racionalnih brojeva). Danas bismo rekli da je tom konstrukcijom dokazao postojanje uređenog polja koje zadovoljava njegov prvi aksiom. Drugi aksiom dokazao je kao teorem koji u uređenom polju slijedi iz prvoga. Alfred Tarski (1901. – 1983.) u [T1] primijetio je da se u formulaciji prvog Dedekindova aksioma može odbaciti pretpostavka $D\cup L=\mathbb{R}$ ako vrijedi Arhimedov aksiom.

Pojam povezanosti nezavisno su definirali Lennes i Hausdorff pa se ta definicija dugo zvala Lennes-Hausdorffovom. No, već ju je prije njih formulirao Camille Jordan (1838. – 1922.) i zato smo aksiom imenovali kao Jordanov, usp. [Wi].

Marsdenov aksiom obično se dokazuje kao teorem, ali su Marsden i Weinstein svojim udžbenikom [MW] pokazali da se vrlo uspješno može koristiti kao aksiom uz koji standardna analiza postaje bitno jednostavnijom i zato ga zovemo Marsdenovim.

Simon Stevin (1548. –1620.) uveo je realne brojeve kao decimalne razvoje (s konačno ili beskonačno mnogo decimala), usp. [KK]. Zato smo tvrdnju da svaki decimalni razvoj konvergira realnom broju nazvali prvim Stevinovim aksiomom. Drugi aksiom prirodno je poopćenje koje se danas obično dokazuje kao teorem koji u uređenom polju slijedi iz Dedekindova aksioma.

Stevinov aksiom u obliku „svaki decimalni razvoj realni je broj" djeluje kao tautologija pa mnogi često nisu ni svjesni da je ta pretpostavka ekvivalentna ostalim aksiomima potpunosti. Na primjer, kada u srednjoj školi definiramo realne brojeve kao „decimalne razvoje s konačno ili beskonačno mnogo decimala", zapravo kategorički determiniramo strukturu realnih brojeva kao kontinuirano Arhimedovo uređeno polje.

Augustin-Louis Cauchy (1789. – 1857.) koristio je definiciju Cauchyjeva niza, u [Ca], kao kriterij konvergencije i zapravo nije razumio značaj tog kriterija za definiranje (pa ni aksiomatiziranje) realnih brojeva. Charles Méray (1835. – 1911.) u [M] je razmatrao Cauchyjeve nizove racionalnih brojeva, smatrajući da oni koji ne konvergiraju prema racionalnoj granici, konvergiraju prema „fiktivnoj granici" i prvi je postulirao da se realni brojevi sastoje od racionalnih brojeva i tih fiktivnih granica. Nešto kasnije Eduard Heine (1821. – 1881.) u [He] i Georg Cantor (1845. – 1918.) u [C], oba neovisno od Mérayja, uvode analognu konstrukciju realnih brojeva kao Cauchyjevih nizova racionalnih brojeva, uz odgovarajuće identifikacije ekvivalentnih nizova. Ta je konstrukcija danas standardni način upotpunjavanja metričkih prostora.

Bernard Nepomuk Bolzano (1781. – 1848.) već je 1817. uveo Cauchyjeve nizove i koristio ih kao realne brojeve, no njegov je rad uglavnom ostao nepoznat do 1930-ih, usp. [B].

Sličnu, ali bitno kompliciraniju konstrukciju koja se koristi apsolutno konvergentnim redovima uveo je Karl Weierstrass (1815. – 1897.) u svojim predavanjima akademske godine 1861./1862.

Svi spomenuti autori realne brojeve povezuju s točkama pravca. U geometriji je dokazivo da svaka točka na pravcu čini rez kojem je ona međa. No obrat, ako je i očit, nije dokaziv. Zato Dedekind (u [D]) postulira da je svaki rez na pravcu generiran nekom točkom jer „... nitko ne može dokazati tu tvrdnju koja nije ništa drugo do aksiom kojim pravcu pripisujemo njegov kontinuitet".

Analogno, svakoj točki pravca desno od ishodišta (pa po simetriji i onima lijevo) možemo pridružiti decimalni razvoj tako da za svaki n u diskretnoj mreži $\mathbb{N}10^{-n}$ nađemo interval u kojem se nalazi ta točka. Lijevi kraj tog intervala $d_0 d_1 \ldots d_n$ je n-ti početni segment toga razvoja. Obrat, da svaki takav niz segmenata determinira neku točku, Cantor (u [C]) postulira jer je to „zbog same svoje prirode nedokazivo". To je Cantorov aksiom koji je implicitno prisutan i u Stevinovu uvjerenju da svaki decimalni broj jednoznačno determinira neku duljinu.

S razvojem teorije skupova, Cantor i Dedekind su Cauchyjeve nizove u $\mathbb{Q}$ i rezove u $\mathbb{Q}$ sve češće razmatrali neovisno o njihovoj geometrijskoj interpretaciji. Sljedeći je korak bio identificiranje realnih brojeva s klasama ekvivalentnih Cauchyjevih nizova u $\mathbb{Q}$ ili s rezovima u $\mathbb{Q}$. Tko je to prvi eksplicitno učinio – i dalje je predmet povijesnih rasprava, usp. [A].

Bolzano-Weierstrassov aksiom u analizi se obično pojavljuje kao Bolzano-Weierstrassov teorem. Standardno se dokazuje da on slijedi iz Dedekindova aksioma, ali se skoro nikada ne dokazuje da su oni (u uređenom polju) ekvivalentni. Weierstrass je teorem dokazao i dao mu centralno mjesto u svojim već spomenutim predavanjima, ali osnovnu ideju dokaza bisekcijama nalazimo već kod Bolzana u [B]:

Postoji zatvoreni interval I koji sadrži sve x_n. Raspolovimo ga na dva zatvorena podintervala jednake duljine i s I_1 označimo jedan od njih koji sadrži beskonačno mnogo x_n -ova. Broj x_{n1} neka je prvi koji je u I_1. Zatim raspolovimo I_1 na dva zatvorena podintervala jednake duljine i s I_2 označimo jedan od njih koji sadrži beskonačno mnogo x_n -ova. Broj x_{n2} neka je prvi koji je u I_2 . Nastavljanjem ovog postupka konstruiramo podniz brojeva x_{n1}, x_{n2}, x_{n3}, … konsekutivno sadržanih u nizu uklopljenih zatvorenih intervala I_1, I_2, I_3, … Ti intervali sadrže točno jedan broj x koji je limes toga podniza.

Lako je dokazati da su i mnogi drugi tzv. temeljni teoremi analize, u uređenom polju, ekvivalentni Dedekindovu aksiomu. Na primjer, teorem da neprekidna funkcija na intervalu: prima međuvrijednosti, postiže ekstreme ako je interval zatvoren, integrabilna je, ima fiksnu točku ako zatvoreni interval preslikava u samog sebe. Ili da derivabilna funkcija: postiže srednju vrijednost u točki intervala na kojem je definirana, da je konstantna na intervalu na kojoj joj je derivacija 0. Ili da konvergiraju redovi koji su: apsolutno konvergentni, zadovoljavaju Leibnizov kriterij ili kriterij omjera susjednih članova. Naravno, dokazi nekih od ovih ekvivalencija pretpostavljaju Arhimedov aksiom. Imate li ikakvu intuiciju koji? Iz dokaza tih ekvivalencija u [P] slijedi da su to samo dva predzadnja.

Hinčin je 1923. (u [K]) dokazao da je njegov aksiom ekvivalentan Dedekindovu aksiomu. Hinčinov aksiom zapravo je princip transfinitne indukcije. Naime, Hinčinov aksiom za dobro uređen skup (U, <), uobičajeni je aksiom transfinitne indukcije (s tim da svaki lijevo otvoreni interval oblika „$(-\infty$" treba biti lijevo zatvoreni interval oblika „$[-\infty$", gdje je $-\infty$ minimum od U). Prvi ga je koristio Cantor u [C1], a eksplicitno ga je formulirao i imenovao Felix Hausdorff (1868. – 1942.) u [H].

Ekvivalentnost aksioma transfinitne indukcije s principom minimuma, koji tvrdi da svaki podskup dobro uređenog skupa ima minimalni element, potpuno je analogna ekvivalentnosti Hinčinovog i Dedekindovog aksioma u realnom kontekstu (što znači da princip transfinitne indukcije nije, kako to mnogi misle, inherentno diskretan).

Na kraju spomenimo i to da je vrlo koristan oblik transfinitne indukcije onaj kojim dokazujemo da je nešto interval (a ne nužno cijeli $\mathbb{R}$). Induktivni $J \subseteq [a,b]$ tada je onaj koji (za $x, y \in [a,b]$) sadrži početak, $a \in J$, dopušta zatvaranja, $[a,x) \subseteq J \rightarrow$ $\rightarrow [a,x] \subseteq J$ i dopušta skokove. $x \neq b \wedge [a,x] \subseteq J \rightarrow (\exists y > x)\, [a,y] \subseteq J$. Aksiom transfinitne indukcije tada tvrdi da je $J = [a,b]$. Dokazi osnovnih teorema analize uz pomoć ovog oblika aksioma transfinitne indukcije vrlo su slični Marsden-Wiensteinovim dokazima iz [MW] i bitno su jednostavniji od standardnih, usp. [Cl].

Hilbert je svoj aksiom koristio kao aksiom potpunosti u slavnoj *Grundlagen der Geometrie* iz 1899. (jer je prirodno da se aksiom potpunosti formulira kao aksiom maksimalnosti).

Henleov aksiom nazvali smo po Henleu jer igra ključnu ulogu u njegovoj ne-nestandardnoj analizi [Hn] koja je bitno jednostavnija od standardne analize. Radi se samo o tome da se složeni objekti, u ovom slučaju nizovi, promatraju kao nove „točke". To je inače matematički standard koji se iz nekog razloga (?) ne koristi u analizi.

Leibnizu i njegovim suvremenicima bilo je očito da struktura u kojoj je svaki realni broj okružen monadom njemu infinitezimalno bliskih brojeva zadovoljava Leibnizov aksiom. Ono što nije bilo očigledno (i mogući je razlog za odbacivanje infinitezimalne analize) bio je Leibnizov princip kontinuiteta. Ugrubo, on kaže da svaka funkcija *f* definirana na običnim (Stevinovim) realnim brojevima iz $\mathbb{R}$ ima proširenje f^*, na hiperrealne brojeve iz $\mathbb{R}^*$, koja ima ista svojstva kao i *f*. Na primjer,

$$\sin^*(x+y)=\sin^*(x)\cos^*(y)+\sin^*(y)\cos^*(x)$$

vrijedi i u $\mathbb{R}^*$, jer vrijedi u $\mathbb{R}$. Svi pokušaji da se konstruira polje $\mathbb{R}^*$ s tim svojstvom bili su neuspješni do 1960-ih kada je Abraham Robinson (1918. – 1974.) u [R] razvio nestandardnu analizu u kojoj vrijedi Leibnizov princip u obliku principa transfera. Za detaljni prikaz vidi [Li], a za vrlo kratki prikaz Łošovog teorema iz kojeg je izveden princip transfera vidi [Š]. Povijesne rasprave o odnosu Leibnizova, Eulerova i Cauchyjeva kontinuuma s Robinsonovim kontinuumom još uvijek traju, usp. [E].

Dodajmo na kraju da je u svojoj teoriji linearnih operatora [Ba] (koja je prvi udžbenik funkcionalne analize) i Stefan Banach (1892. – 1945.) uveo prošireni pojam konvergencije, s obzirom na koji svaki omeđeni niz konvergira. Naime, limes je neprekinuti linearni operator na prostoru konvergentnih nizova pa se prema Hahn-Banachovu teoremu može proširiti na prostor svih omeđenih nizova. Alternativno, ultrafilteri pružaju elegantan način definiranja Banachove konvergencije (i ujedno otkrivaju vezu s nestandardnom analizom). To dokazujemo u dodatku.

2. Realni brojevi u ostalim znanostima

2.1. Sustavi veličina

Realni se brojevi pojavljuju kao mjere gotovo svih veličina u egzaktnim znanostima. Sljedeći primjer opisao je Herman Helmholtz (1821. – 1894.) u [Hl]. Domena istraživanja su tijela čiju masu uspoređujemo vaganjem. Ako su *x* i *y* tijela koja su na vagi u ravnoteži, onda ona imaju istu masu, $x\sim y$. Ako *y* prevagne, onda je masa od *x* manja od mase od *y*, $x\prec y$. Ako su *x* i *y* (uzeti zajedno) u ravnoteži sa *z*, onda je $x\oplus y=z$. Ako je $(T,\sim,\oplus,\prec)$ sustav tijela koja uspoređujemo i pribrajamo na opisani način, onda je sustav masa dobro definiran sa $(M,+,<)\overset{\text{def}}{=}(T/\sim,\oplus/\sim,\prec/\sim)$ jer je $\sim$ relacija ekvivalencije. Situaciju idealiziramo na taj način da pretpostavimo da sustav zadovoljava sljedeće aksiome, što znači da pretpostavljamo da se mase mogu neograničeno pribrajati i oduzimati, da je vaga neograničeno precizna, itd.

(Trihotomija) $a < b \vee a = b \vee b < a$ ($\vee$ je ekskluzivan)

(Asocijativnost) $a + (b + c) = (a + b) + c$

(Diferencija) $a < b \Rightarrow (\exists c) a + c = b$

(Desna pozitivnost) $a < a + b$

(Arhimed) $(\exists n \in \mathbb{N}) b < na$

Dokazat ćemo da je svaki sustav veličina $(V^+, +, <)$ koji zadovoljava te aksiome, izomorfno smješten u strukturu pozitivnih realnih brojeva $\mathbb{R}^+$. To nedvojbeno dokazuje da su realni brojevi adekvatne mjere tako idealiziranih veličina.

Primijetite da aksiomima ne postuliramo da je zbrajanje komutativno, niti da postoji operacija množenja koja je distributivna prema zbrajanju, niti da je uređaj tranzitivan i usklađen sa zbrajanjem i množenjem. To sve slijedi iz zaista malog broja postuliranih aksioma.

U daljem tekstu je $a, a', b, b' \in V^+$ i $m, n \in \mathbb{N}$.

Desna monotonost: $b < b' \Rightarrow a + b < a + b'$

Dokaz: $(\exists c)(a + b' = a + b + c > a + b)$.

Desno kraćenje =: $a + b = a + b' \Rightarrow b = b'$

Dokaz: Da je $b < b'$, bilo bi $a + b < a + b'$. Da je $b > b'$, bilo bi $a + b > a + b'$.

Desno kraćenje <: $a + b < a + b' \Rightarrow b < b'$

Dokaz: Da je $b > b'$, bilo bi $a + b > a + b'$. Da je $b = b'$, bilo bi $a + b = a + b'$.

Tranzitivnost : $a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$

Dokaz: $(\exists a')(\exists b')(c = b + b' = a + a' + b' > a)$.

Prirodna distributivnost : $ma + na = (m + n)a$

Dokaz: Iz asocijativnosti.

Prirodna asocijativnost : $m(na) = (mn)a$

Dokaz: Iz asocijativnosti.

Prirodni uređaj 1: $m < n \Leftrightarrow ma < na$.

Dokaz: Smjer $\Rightarrow$ slijedi iz desne pozitivnosti. Smjer $\Leftarrow$ slijedi iz kontradiktornosti obaju alternativa, $m = n$ i $m > n$.

Prirodni uređaj 2: $a < b \Leftrightarrow ma < mb$

Dokaz: Smjer $\Rightarrow$ slijedi iz desne monotonosti. Smjer $\Leftarrow$ slijedi iz kontradiktornosti alternativa $a = b$ i $a > b$.

Dijeljenje : $a < b \Rightarrow (\exists n)(na < b < (n+1)a) \,\&\, (\exists n)(\exists r)(b = na + r \wedge r < a)$

Dokaz: Iz Arhimedova aksioma i dobre uređenosti od $\mathbb{N}$ slijedi da postoji najmanji n takav da je $b < (n + 1)a$. Tada je $na < b$ pa $(\exists r)(b = na + r \wedge r < a)$.

Lijeva pozitivnost : $b < a + b$

Dokaz: Za $b \le a$ imamo $b \le a < a + b$. Za $a < b \Rightarrow (\exists n)(a < b < (n+1)a)$, pa je $a + + b > a + na > b$.

Lijeva monotonost : $b < b' \Rightarrow b + a < b' + a$

Dokaz: $(\exists c)b' + a = b + c + a > b + a$.

Lijevo kraćenje =: $a' + b = a + b \Rightarrow a' = a$.

Dokaz: Da je $a < a$' bilo bi $b + a < b + a$'. . Da je $a > a$', bilo bi $b + a > b + a$'.

Lijevo kraćenje <: $a' + b < a + b \Rightarrow a' < a$

Dokaz: Da je $a = a$' bilo bi $b + a = b + a$'. . Da je $a > a$', bilo bi $b + a > b + a$'.

Definicija diskretnog sustava veličina

Ako sustav veličina (V^+, +, <) ima minimalni element j, zovemo ga diskretnim.

Lema: Diskretni sustav veličina (V^+, +, j, <) izomorfan je s $(\mathbb{N}, +, 1, <)$.

Dokaz: Trebamo dokazati da $(\forall a)(\exists n)a = nj$. Ako je $a = j$, onda je n = 1. Ako je $a > j$, onda je $a = nj + r \wedge r < j$, no j je minimum pa nema takvoga r, tj. $a = nj$.

Definicija gustog sustava veličina

Ako sustav veličina (V^+, +, <) nema minimalni element, zovemo ga gustim.

Lema: Gusti sustav veličina (V^+, +, j, <) zaista je gust, tj. $a < b \Rightarrow (\exists c)a < c < b$. Gusti sustav ima i proizvoljno male elemente, tj. $(\forall n)(\exists b)nb < a$.

Dokaz: Gustoća slijedi iz: $a < b \Rightarrow a + a' = b \wedge a'' < a' \Rightarrow a < a + a'' < b$.

$(\forall n)(\exists b)nb < a$ dokazujemo indukcijom po n. Baza indukcije je definicija gustog sustava: $(\exists b)b < a$. Ako je $nb < a$, onda je $nb + c = a$, pa za $d < b$, c vrijedi $(n + 1)$ $d = nd + d < nb + c = a$, tj. vrijedi i korak indukcije.

Lema: U sustavu veličina (V^+, +, <) zbrajanje je komutativno.

Dokaz: Ako je sustav diskretan, onda je $a + b = nj + mj = mj + nj = b + a$.

Ako je sustav gust, onda iz $a + b < b + a$ slijedi $a + b + c = b + a$ pa zbog postojanja proizvoljno malih veličina postoji d takav da je $2d < a, b, c$ i da vrijedi

$$a = nd + e, e \le d \text{ i } b = md + f, f \le d.$$

No to je kontradiktorno jer bi tada bilo

$$b+a=nd+e+md+f>nd+md+2d=(n+1)d+(m+1)d>b+a\,.$$

Dakle, ne može biti $a + b < b + a$. Isto tako dokazujemo da ne može biti $a + b > > b + a$.

Dakle, $a + b = b + a$.

Sljedeća definicija uvodi matematičku idealizaciju kojom sustave veličina smještamo u širi matematički kontekst.

Definicija kontinuuma

Ako gusti sustav veličina zadovoljava Dedekindov aksiom, zovemo ga kontinuumom. Dedekindov aksiom može biti onaj sa supremumom/infimumom ili onaj s međom reza jer su oni međusobno ekvivalentni u sustavima veličina (v. dodatak).

Lema: Iz Dedekindova aksioma slijedi Arhimedov aksiom.

Dokaz: Ako ne vrijedi Arhimedov aksiom, onda postoje a i b takvi da je $(\forall n)b>na$, pa je skup $\{x:x=na\}$ odozgo omeđen. No, taj skup nema supremuma (jer za svaku njegovu gornju među c postoji manja gornja međa $c - a$) pa ne vrijedi Dedekindov aksiom.

Temeljni teorem mjerenja

Ako je S^+ gusti sustav veličina, a K^+ je kontinuum, onda za svaki $s\in S^+$ i $k\in K^+$ postoji jedinstveni izomorfizam $f:S^+\to f(S^+)\subseteq K^+$ takav da je $f(s)=k$ Kraće kažemo da je S^+ izomorfno i s, k-jednoznačno smješten u K^+.

Ako je i S^+ kontinuum, onda su S^+ i K^+ s, k-jednoznačno izomorfni.

Teorem dokazujemo u dodatku. Dakle, do na izomorfizam postoji samo jedan kontinuum, npr. $(\mathbb{R}^+,+,<)$, u koji su izomorfno smješteni svi sustavi veličina. Diskretni sustavi su izomorfni s $(\mathbb{N},+,<)$, a gusti su sustavi izomorfni s nekim gustim podsustavom od $(\mathbb{R}^+,+,<)$. Temeljni teorem prvi je dokazao Hölder u [Hö] uz pretpostavku da je (ono što mi zovemo) sustav veličina – uređena grupa. Kasnije su, uz slabije uvjete, dokazane mnoge druge varijante (uključujući i ovu našu); usp. [KLST].

Promotrimo sada grupu automorfizama $(\mathcal{K}^+,\circ)$, na kontinuiranom sustavu veličina K^+. Uz odaberani $j\in K^+$, za svaki $a\in K^+$ postoji jedinstveni automorfizam $\alpha:K^+\to\mathcal{K}^+$ za koji je $\alpha(j)=a$. Ako množenje prenesemo s $\mathcal{K}^+$ u K^+, definicijom $a\cdot b\overset{\text{def}}{=}\alpha\circ\beta$, onda je bijekcija $\alpha\leftrightarrow a$ izomorfizam grupa $(\mathcal{K}^+,\circ)$ i $(K^+,\circ)$.

Lema: Množenje na K^+, je komutativno. Uređaj i množenje na K međusobno su usklađeni, tj. $b<c\to ab<ac$.

Dokaz: Funkcije $f(x)=ax$ i $g(x)=xa$ automorfizmi su koji j šalju u a. No, takav je automorfizam jedinstven pa je $f = g$, tj. množenje je komutativno.

Usklađenost slijedi iz $\beta(1) < \gamma(1) \to \alpha\big(\beta(1)\big) < \alpha\big(\gamma(1)\big)$.

Lema o dvosmjernosti multiplikativnog kontinuumu

Multiplikativni inverz je izomorfizam uređenih grupa $\left(K^+,\cdot,1,<\right)$ i $\left(K^+,\cdot,1,>\right)$. On izomorfno preslikava kontinuum $\left(K^+_{<1},\cdot,>\right)$ na kontinuum $\left(K^+_{>1},\cdot,<\right)$.

Zato $\left(K^+,1,\cdot,<\right)=\left(K^+_{<1},\cdot,<\right)\cup\{1\}\cup\left(K^+_{>1},\cdot,<\right)$ zovemo dvosmjernim kontinuumom.

Dokaz: Skupovi $K^+_{<1}$ i $K^+_{>1}$ zatvoreni su na množenje jer vrijedi:

$a,b<1\to a\cdot b<b<1$

$a,b>1\to a\cdot b>b>1$.

Trihotomiju, gustoću, asocijativnost i kontinuitet uređene grupe $\left(K^+,\cdot,<\right)$ i $\left(K^+,\cdot,>\right)$ nasljeđuju od $\left(K,\cdot,<\right)$. Pozitivnost slijedi iz:

$a,b<1\to a<a\cdot b$

$a,b>1\to a>a\cdot b$.

Aksiom diferencije vrijedi jer je uvijek $a\left(a^{-1}\cdot b\right)=b$, a vrijedi:

$a,b>1\wedge a<b\to 1<a^{-1}\cdot b<b$

$a,b>1\wedge a>b\to 1>a^{-1}\cdot b>b$

Očito je $\left(K^+,1,\cdot,<\right)=\left(K^+_{<1},\cdot,<\right)\cup\{1\}\cup\left(K^+_{>1},\cdot,<\right)$ i time je teorem dokazan.

Lema o dvosmjernom proširenju kontinuuma

Svaki kontinuum $\left(K^+,+,\cdot,1,<\right)$ može se proširiti do dvosmjernog kontinuuma $\left(K,0,+,1,\cdot,<\right)=\left(K^-,+,1,\cdot,<\right)\cup\{0\}\cup\left(K^+,+,1,\cdot,<\right)$.

Dokaz: $K^-\overset{\text{def}}{=}\left\{-a:a\in K^+\right\}$. Operacije se proširuju na *K* standardnim definicijama. Za $a\in K^+$ i *a – b = „onaj c za koji je b + c = a kada je a > b”*, to su sljedeće definicije:

$a+0=a$ $\qquad$ $(-a)+a=0$

$$a+(-b)=\begin{cases} a-b & \text{ako je } b<a \\ -(b-a) & \text{ako je } a<b \end{cases} \qquad (-a)+(-b)=-(a+b)$$

$(-a)\cdot(-b)=a\cdot b$ $\qquad$ $(-a)\cdot b=-(a\cdot b)$ $\qquad$ $a\cdot 0=0\cdot a=0$

Korolar temeljnog teorema za dvosmjerne kontinuume

Ako su J i K dvosmjerni kontinuumi, onda za svaki $j \in J^+$ i $k \in K^+$ postoji jedinstveni j, k-izomorfizam između J i K.

Dokaz: Znamo da postoji jedinstveni j, k -izomorfizam između $(J^+,\cdot,<)$ i $(K^+,\cdot,<)$, koji se prenosi na njihove grupe automorfizama $(\mathcal{J}^+,\circ)$ i $(\mathcal{K}^+,\circ)$, pa postoji jedinstveni j, k -izomorfizam između $(J^+,+,\cdot,1,<)$ i $(K^+,+,\cdot,1,<)$. Na dvosmjerne kontinuume

$$(J,+,0,\cdot,1,<)=(J^-,+,\cdot,1,<)\cup\{0\}\cup(J^+,+,\cdot,1,<) \text{ i}$$
$$(K,+,0,\cdot,1,<)=(K^-,+,\cdot,1,<)\cup\{0\}\cup(K^+,+,\cdot,1,<)$$

on se proširuje standardnim definicijama $f(0)=0$ i $f(-a)=-f(a)$ i (što se opet automatski prenosi na grupe automorfizama $(\mathcal{J},\circ)$ i $(\mathcal{K},\circ)$, dakle i na množenje $\cdot$).

Korolar o exp i log funkcijama

Neka je $(K,+,0,\cdot,1,<)=(K^-,+,\cdot,1,<)\cup\{0\}\cup(K^+,+,\cdot,1,<)$ dvosmjerni kontinuum. Za $1\neq a\in K^+$ postoji 1, a-jedinstveni izomorfizam

$$\exp_a:(K,+,0,<)\to(K^+,\cdot,1,<)$$

i njemu inverzni a, 1-jedinstveni izomorfizam

$$\log_a:(K^+,\cdot,1,<)\to(K,+,0,<).$$

Funkcije $\exp_a$ i $\log_a$ imaju standardna svojstva eksponencijalnih i logaritamskih funkcija.

Dokaz: Slijedi iz prethodnog korolara i činjenice da su standardna svojstva eksponencijalnih i logaritamskih funkcija zapravo svojstva izomorfnosti zbrajanja s množenjem.

Da zaključimo, Wignerova *unreasonable effectivness of mathematics*, što se tiče realnih brojeva, ima najjednostavnije moguće objašnjenje: realni brojevi adekvatne su mjere znanstvenih veličina jer te veličine, do na izomorfizam, doslovno jesu realni brojevi.

2.2. Stevinov kontinuum

Vidjeli smo da su svi kontinuumi međusobno izomorfni i da sadrže izomorfne kopije svih sustava veličina. Zato je važno imati kanonski primjer kontinuuma čija je egzistencija na standardan način dokazana u dodatku. Sada ćemo dokazati da takav kanonski sustav $\mathbb{R}^+$ čine i Stevinovi decimalni razvoji.

Stevinov kontinuum $\mathbb{R}^+$ čine decimalni razvoji

$$x=x_0x_1x_2x_3x_4\ldots \qquad x_0\in\mathbb{N}_0,\ \ x_{i\neq 0}\in\{0,1,2,\ldots,9\},$$

sa sljedećim definicijama jednakosti i uređaja:

$$a = b \overset{\text{def}}{=} (\forall i)(a_i = b_i) \vee (\exists n)\left[(\forall i < n)(a_i = b_i) \wedge (a_n = b_n + 1) \wedge (\forall i > n)(a_i = 0 \wedge b_i = 9)\right].$$

Na primjer, $13.275 = 13.249\dot{9}$.

$$a < b \overset{\text{def}}{=} (\exists n)\left((\forall i < n) a_i = b_i \wedge a_n < b_n\right)$$

Na primjer, 13.275… < 13.276… .

Lema: Stevinov kontinuum je potpun (tj. u njemu vrijedi Dedekindov aksiom).

Dokaz: Neka je *S* odozgo omeđen. Onda postoji

$$c_0 = \max\{s_0 : s \in S\}.$$

Ako je c_0 maksimum u *S*, onda je on traženi supremum. Ako nije, onda postoji

$$c_0 c_1 = \max\{s_0 s_1 : s \in S\}.$$

Ako je $c_0 c_1$ maksimum u *S*, onda je on traženi supremum. Ako nije, onda … itd.

Ako nijedan $c_0 c_1 \ldots c_n$ nije maksimum u *S*, onda je $c_0 c_1 c_2 \ldots$ traženi supremum.

Naime, $c_0 c_1 c_2 \ldots$ je gornja međa od *S* jer da nije, za neki $s \in S$ bilo bi $c_0 c_1 c_2 \ldots < s$. No, tada bi postojao *n* takav da je $c_0 \ldots c_n < s_0 \ldots s_n$ što je u kontradikciji s definicijom od $c_0 \ldots c_n$. Osim toga, $c_0 c_1 c_2 \ldots$ je najmanja gornja međa od *S* jer za svaki $g < c_0 c_1 c_2 \ldots$ postoji *n* takav da je $g_0 \ldots g_n < c_0 \ldots c_n$, pa *g* nije gornja međa od *S*.

Što se tiče zbrajanja, često se susrećemo s primjedbom da je definicija zbrajanja beskonačnih decimalnih razvoja nemoguća, ili je barem problematična, „jer oni nemaju desni kraj od kojeg zbrajanje mora početi". Međutim, ta definicija nije nikakav problem. Ono što zaista ne možemo jest naći algoritam koji će generirati decimale od $x + y$ iz algoritama koji generiraju decimale od *x* i decimale od *y*. To je pitanje izračunjivosti zbrajanja, a ne njegove definicije. Uostalom, samo za zanemariv (tj. prebrojiv) skup realnih brojeva uopće postoje algoritmi koji generiraju njihove decimale pa je problem izračunjivosti u tom kontekstu nebitan.

Zbrajanje decimalnih razvoja, uz $x_{(n)} = x_0 \ldots x_n$, definiramo sa

$$a + b \overset{\text{def}}{=} \sup\{a_{(n)} + b_{(n)} : n \in \mathbb{N}\}.$$

Ako je $a > b$, onda postoji *k* takav da je $a_{(k)} > b$, pa diferenciju $a - b$ definiramo sa

$$a + b \overset{\text{def}}{=} \left(a - a_{(k)}\right) + \left(a_{(k)} - b\right),$$

gdje je $a - a_{(k)}$ standardna osnovnoškolska diferencija, a

$$a_{(k)} - b \overset{\text{def}}{=} \sup\{a_{(k)} - b_{(i)} : i \in \mathbb{N}\}.$$

Teorem o Stevinovu kontinuumu

Stevinov kontinuum $\mathbb{R}^+$ je kontinuum u smislu definicije kontinuuma iz prethodnog poglavlja.

Dokaz: Za uređaj među decimalnim razvojima vrijedi trihotomija i očito je gust. Potpunost smo već dokazali. Zbrajanje je očito komutativno i zadovoljava aksiom pozitivnosti. Vrijedi i aksiom diferencije jer za $a > b$ imamo $a = b + (a - b)$. Vrijedi i asocijativnost jer je $\sup_n \left\{a_{(n)} + b_{(n)}\right\} + c_{(m)} = \sup_n \left\{a_{(n)} + b_{(n)} + c_{(m)}\right\}$.

S obzirom na njihov povijesni, praktični i obrazovni značaj, mislimo da Stevinovi decimalni razvoji trebaju imati kanonski status u matematici, kao što ga već stoljećima imaju u ostalim znanostima. Pogotovo ako uzmemo u obzir upravo prikazanu jednostavnost sustava $\mathbb{R}^+$ kada ga čine Stevinovi decimalni razvoji.

3. Dodatak s dokazima

Lema: Dedekindov 1. aksiom ekvivalentan je Dedekindovu 2. aksiomu.

Dokaz: Pretpostavimo D1 i neka je $S \subset \mathbb{R}$ odozdo omeđen. Tada $L \overset{\text{def}}{=} \{x : x < S\}$ i $D \overset{\text{def}}{=} \mathbb{R} \setminus L$ čine rez u $\mathbb{R}$ koji ima među $c. L \leq c \leq D$ slijedi $c = \inf(S)$, tj. vrijedi D2.

Pretpostavimo D2 i neka je (D, L) rez u $\mathbb{R}$. Tada je $\inf(D)$ međa reza (D, L).

Lema: Jordanov aksiom ekvivalentan je Dedekindovu aksiomu.

Dokaz: Pretpostavimo da ne vrijedi Dedekindov aksiom, tj. neka je (D, L) rupa u $\mathbb{R}$. Tada D i L čine particiju od na dva neprazna otvorena skupa. Dakle, $\mathbb{R}$ nije povezan.

Pretpostavimo da $\mathbb{R}$ nije povezan, tj. neka je $\mathbb{R} = A \cup B, a \in A, b \in B, A \cap B = \varnothing$ i A, B su otvoreno-zatvoreni skupovi. Možemo pretpostaviti da je $a < b$. Ako bi vrijedio Dedekindov aksiom, postojao bi $b' \overset{\text{def}}{=} \sup\left(A \cap [a,b]\right)$. Skup $A \cap [a,b]$ je zatvoren pa sadrži b', što znači da je $b' \in A$. No, A je i otvoren pa sadrži neki otvoreni interval oko b', što je u kontradikciji s definicijom od b'. Dakle, ne vrijedi Dedekindov aksiom.

Lema: Marsdenov aksiom ekvivalentan je Dedekindovu aksiomu.

Dokaz: Pretpostavimo da S nije singlton, da je S konveksan i da vrijedi Dedekindov aksiom. Ako je $a \overset{\text{def}}{=} \inf(S)$ i $b \overset{\text{def}}{=} \sup(S)$, gdje a, b mogu biti i $\pm\infty$, onda vrijedi implikacija $z \in S \setminus \{a,b\} \to z \in (a,b)$ a zbog konveksnosti od S vrijedi i sljedeća implikacija $z \in (a,b) \to (\exists x, y \in S)(x < z < y) \to z \in S \setminus \{a,b\}$. Pretpostavimo da je S omeđen odozgo i da vrijedi Marsdenov aksiom. Skup $\{x : x > S\}$ je konveksan pa mora biti interval. Njegov donji rub je $\sup(S)$.

Lema: Stevinovi aksiomi ekvivalentni su Dedekindovu aksiomu.

Dokaz: Pretpostavimo da vrijedi Dedekindov 2. aksiom i neka je (a_i) rastući odozgo omeđeni niz u $\mathbb{R}$. Tada je $\inf\{x:(\forall i)(x>a_i)\}=\lim_{i\to\infty} a_i$.

Očito je da Stevinov 2. aksiom povlači Stevinov 1. aksiom.

Pretpostavimo da ne vrijedi Dedekindov 2. aksiom i neka je (D, L) rupa u $\mathbb{R}$. Ta rupa ima svoj decimalni razvoj koji ne konvergira (jer „u rupi ničeg nema").

Lema: Cantorov aksiom je uz Arhimedov aksiom ekvivalentan Stevinovu aksiomu.

Dokaz: Pretpostavimo $a_1 \le a_2 \le a_3 \le \cdots \quad \cdots b_3 \le b_2 \le b_1$. Ako vrijedi Stevinov aksiom, onda postoje $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ i $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ i interval $[a,b]$ sadržan je u svim uklopljenim intervalima $[a_n, b_n]$. Dakle, Stevinov aksiom povlači Cantorov aksiom.

Neka je $d.d_1d_2d_3\ldots$ decimalni razvoj. Tada je

$$[d,d+1],\left[d.d_1, d.d_1+\frac{1}{10}\right],\left[d.d_1d_2, d.d_1d_2+\frac{1}{100}\right],\ldots$$

niz zatvorenih uklopljenih intervala koji je, ako vrijedi Cantorov aksiom, neprazan. Ako vrijedi Arhimedov aksiom, taj neprazni skup sadrži samo jedan broj, i to je decimalni broj kojem konvergira razvoj $d.d_1d_2d_3\ldots$. Dakle, uz Arhimedov aksiom, Cantorov aksiom povlači Stevinov aksiom.

Lema: Bolzano-Weierstrassov i Cauchyjev aksiom (uz Arhimedov) ekvivalentni su Stevinovu aksiomu.

Dokaz: Član x_k nekog niza (x_n) zovemo vrhom ako $(\forall m>k)\,x_m < x_k$. Ako je skup svih vrhova konačan, onda počevši od zadnjeg vrha x_{n1} postoji rastući podniz $x_{n1} \le x_{n2} \le x_{n3} \le \cdots$. Ako je niz vrhova beskonačan, onda je on padajući podniz. Ako je niz (x_n) omeđen, onda su prethodno definirani podnizovi omeđeni, pa po Stevinovu aksiomu konvergiraju. Dakle, Stevinov aksiom povlači Bolzano-Weierstrassov aksiom.

Ako je niz (x_n) Cauchyjev, onda je omeđen, pa po Bolzano-Weierstrassovom aksiomu ima konvergentni podniz. Budući da je niz (x_n) Cauchyjev, i on konvergira prema istom limesu. Dakle, Bolzano-Weierstrassov aksiom povlači Cauchyjev aksiom.

Uz Arhimedov aksiom, svaki je decimalni razvoj Cauchyjev niz. Dakle Cauchyjev aksiom, uz Arhimedov aksiom, povlači Stevinov aksiom.

Lema: Hinčinov aksiom ekvivalentan je Dedekindovu aksiomu.

Dokaz: Ako vrijedi Dedekindov aksiom i J je induktivan skup, onda je $J=\mathbb{R}$ jer bi inače postojao $c=\inf(\mathbb{R}\setminus J)$ i bilo bi $(-\infty,c)\subseteq J$, dakle i $(-\infty,c]\subseteq J$. To nije moguće jer bi iz $c=\infty$ slijedilo $\mathbb{R}=(-\infty,\infty)\subseteq J$, a iz $c<b$ slijedilo bi $(-\infty,c']\subseteq J$ za neki $c'>c$, što je oboje u kontradikciji s $c=\inf(\mathbb{R}\setminus J)$.

Neka je T neprazan, odozdo omeđen s a i neka je D skup svih donjih međa od T. Tada vrijedi $(-\infty,a]\subseteq D$, tj. vrijedi (P). Uz (P) ne mogu vrijediti i (Z) i (S) jer bi D bio induktivan pa bi bilo $D=\mathbb{R}$. Ako ne vrijedi (Z), onda $(\exists x)\big((-\infty,x)\subseteq J\wedge(-\infty,x]\not\subseteq J\big)$ pa $(\exists t\in T)t<x$ i $t=\min(T)$. Ako ne vrijedi (S), onda $(\exists x)\big((-\infty,x)\subseteq J\wedge(\forall y>x)(-\infty,y]\not\subseteq J\big)$ pa je $x=\inf(T)$.

Lema: Hilbertov aksiom ekvivalentan je Dedekindovu aksiomu.

Dokaz: Slijedi iz teorema kategoričnosti.

Skica dokaza teorema kategoričnosti:

Neka je $(\mathbb{Q}^{\mathbb{N}})_C$ uređeni prsten Cauchyjevih nizova racionalnih brojeva. Skup nul-nizova $\mathcal{N}$ je konveksni ideal u $(\mathbb{Q}^{\mathbb{N}})_C$ pa je $\mathbb{R}\overset{\text{def}}{=}(\mathbb{Q}^{\mathbb{N}})_C/\mathcal{N}$ Arhimedovo uređeno polje. Ono zadovoljava Cauchyjev aksiom jer se svaki $\mathbb{R}$-Cauchyjev niz za nul-niz razlikuje od nekog $\mathbb{Q}$-Cauchyjeva niza pa je klasa toga drugog niza limes početnog Cauchyjeva niza. Dakle, tako konstruirani $\mathbb{R}$ potpuno je uređeno polje.

Za svaki $a\in G^+$ definiramo $L_a\overset{\text{def}}{=}\left\{\frac{m}{n}\in\mathbb{Q}^+ : m\le na\right\}$, gdje G^+ i $\mathbb{Q}^+$ čine elementi iz G i $\mathbb{Q}$ koji su ≥ 0. Skup L_a je neprazan jer je $0\in L_a$, a omeđen je odozgo jer $(\exists k\in\mathbb{N})a<kj$. Dakle, postoji $\sup(L_a)$. Funkciju $f:G^+\to\mathbb{R}$ definiramo s $f(a)\overset{\text{def}}{=}\sup(L_a)$, a na G je proširimo definicijom $f(-a)\overset{\text{def}}{=}-f(a)$. Funkcija $f:G\to\mathbb{R}$ izomorfizam je struktura G i $f(G)\subseteq\mathbb{R}$, jer je $\sup(L_{a+b})=\sup(L_a)+\sup(L_b)$, $\sup(L_{a\cdot b})=\sup(L_a)\cdot\sup(L_b)$ i $\sup(L_a)<\sup(L_b)$ za $a<b$. To slijedi iz $L_{a+b}=L_a+L_b$, $L_{a\cdot b}=L_a\cdot L_b$ $L_a<L_b$ za $a<b$. Očito je $f(0)=0$ i $f(1)=1$.

Ako je $x\in\mathbb{R}$, onda je $x=\sup\{q\in\mathbb{Q}:q<x\}$, pa je skup $f^{-1}\{q\in\mathbb{Q}:q<x\}$ omeđen u G. Ako je G potpuno uređeno polje, onda postoji $a=\sup\left(f^{-1}\{q\in\mathbb{Q}:q<x\}\right)$ i $f(a)=x$, jer je $f(\sup(X)=\sup(f(X))$. Dakle, f je surjekcija, tj. struktura G i $\mathbb{R}$ su izomorfne.

Konstrukcija nestandardne strukture hiperrealnih brojeva: $\mathbb{R}^*$

Struktura hiperrealnih brojeva $\mathbb{R}^*$ konstruira se na sljedeći način.

Pravi filter na $\mathbb{N}$ definiramo kao skup podskupova od $\mathbb{N}$ takav da je

$$\mathbb{N}\in\mathcal{F}\quad \varnothing\notin\mathcal{F}\quad A\in\mathcal{F}\wedge B\in\mathcal{F}\to A\cap B\in\mathcal{F}\quad A\in\mathcal{F}\wedge A\subseteq B\to B\in\mathcal{F}.$$

Važni primjer filtera je Frechetov filter koji je skup kofinalnih skupova u $\mathbb{N}$ (tj. skupova čiji su komplementi konačni). Ultrafilter na $\mathbb{N}$ definiramo kao maksimalni pravi filter koji sadrži Frechetov filter. Iz Zornove leme slijedi da ultrafilteri postoje pa „odaberimo" jedan i označimo ga s $\mathcal{U}$. U prstenu nizova $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ definiramo relaciju ekvivalencije

$$(x_n)\equiv(y_n)\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}\{n\in\mathbb{N}:x_n=y_n\}\in\mathcal{U}.$$

Ako o skupovima iz $\mathcal{U}$ mislimo kao o skupovima koji sadrže „skoro sve" $n\in\mathbb{N}$, a o nizovima (x_n) kao o ω-torkama s koordinatama x_n, onda su dva niza ekvivalentna ako se poklapaju na skoro svim koordinatama. Operacije i relacije na nizovima u $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ definiramo koordinatno. Na primjer, $(x_n)<(y_n)$ ako je $x_n<y_n$ za skoro sve n (zbog maksimalnosti od $\mathcal{U}$ taj je uređaj linearan jer od dva komplementarna podskupa od $\mathbb{N}$ točno jedan mora biti u $\mathcal{U}$). Skup hiperrealnih brojeva $\mathbb{R}^*$ definiramo sa $\mathbb{R}^*\overset{\text{def}}{=}\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\equiv$.

Uz već objašnjene definicije operacija i relacija, lako se dokazuje da je $\mathbb{R}^*$ uređeno polje (koje sadrži realne brojeve u obliku konstantnih nizova). $\mathbb{R}^*$ nije Arhimedovo polje jer je njegov skup infinitezimala $J(\mathbb{R}^*)\overset{\text{def}}{=}\left\{x\in\mathbb{R}^*:(\forall n\in\mathbb{N})\,x<\frac{1}{n}\right\}$ različit od $\{0\}$. Na primjer, $\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\ldots\right)<\frac{1}{n}$ za svaki *n*. Dva hiperrealna broja *x* i *y* beskonačno su blizu $x\approx y$, ako je $x-y\in J(\mathbb{R}^*)$. Skup konačnih hiperrealnih brojeva $\mathcal{F}(\mathbb{R}^*)$ definiramo sa:

$$\mathcal{F}(\mathbb{R}^*)\overset{def}{=}\{x\in\mathbb{R}^*:(\exists n\in\mathbb{N})\,x<n\}.$$

U tako definiranoj strukturi $\mathbb{R}^*$ vrijedi Leibnizov aksiom.

Lema: Leibnizov aksiom ekvivalentan je Dedekindovu aksiomu.

Dokaz: Pretpostavimo da u $\mathbb{R}$ vrijedi Dedekindov aksiom i da je $x\in\mathbb{R}^*$ konačan. Onda je $x\approx r_0\overset{\text{def}}{=}\inf\{r\in\mathbb{R}:x<r\}$. Ako je $x\approx r_1$ za neki $r_1\in\mathbb{R}^*$, onda je $r_1\approx r_0$. Prema Arhimedovu aksiomu (koji slijedi iz Dedekindova, što smo dokazali), slijedi $r_1=r_0$, jer da nije tako, r_1-r_0 bi bio realni infinitezimal $\neq 0$.

S druge strane, kada u $\mathbb{R}$ ne bi vrijedio Dedekindov aksiom, tj. kada bi u $\mathbb{R}$ postojala rupa, onda bi niz (x_n) koji „konvergira" prema toj rupi bio hiperrealni broj koji

je beskonačno blizu toj rupi. No u toj rupi nema realnog broja pa nema ni realnog broja kojem je (x_n) beskonačno blizu, tj. ne vrijedi Leibnizov aksiom.

Dodajmo još da ultrafilterska konstrukcija omogućava alternativnu konstrukciju polja $\mathbb{R}$. Ako je $\mathcal{U}$ ultrafilter na $\mathbb{N}$, onda je $\mathbb{Q}^* \overset{\text{def}}{=} \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} / \mathcal{U}$ uređeno ne-Arhimedovo polje. Konačni elementi toga polja čine uređeni Arhimedov prsten (Arhimedov prsten ne smije imati beskonačne elemente, ali može imati infinitezimale). Infinitezimali toga prstena čine konveksni ideal $J\left(\mathbb{Q}^*\right)$ pa je $\mathcal{F}\left(\mathbb{Q}^*\right)/ J\left(\mathbb{Q}^*\right)$ uređeno Arhimedovo polje za koje se može dokazati da zadovoljava Dedekindov aksiom. Dakle, $\mathcal{F}\left(\mathbb{Q}^*\right)/ J\left(\mathbb{Q}^*\right) = \mathbb{R}$.

Banachova konvergencije definirana pomoću ultrafiltera:

Za standardni limes vrijedi:

$$\lim_n x_n = s \Leftrightarrow (\forall\varepsilon)\left\{n : \left|x_n - s\right| < \varepsilon\right\} \in \mathcal{F},$$

gdje je $\mathcal{F}$ Frechetov filter kofinalnih skupova u $\mathbb{N}$. Skoro Banachov limes definiramo s

$$SB\lim_n x_n = s \Leftrightarrow (\forall\varepsilon)\left\{n : \left|x_n - s\right| < \varepsilon\right\} \in \mathcal{U},$$

gdje je $\mathcal{U}$ neki ultrafilter na $\mathbb{N}$. Uz tu definiciju, pomoću Bolzanovih bisekcija lako vidimo da je svaki omeđeni niz konvergentan:

Međutim, tako definirani limes nije invarijantan na izmjene početnih segmenata niza (ili, ekvivalentno, na translacije niza). Npr. nizovi 1, 0 ,1 , 0, 1, … i 0 ,1 , 0, 1, 0, … nemaju isti limes jer im je razlika niz 1, 1, 1, 1, 1, 1, … koji ima limes 1. Zato Banachov limes definiramo kao Cesàrovu sumu skoro Banachova limesa,

$$B\lim_n x_n \Leftrightarrow SB\lim_n \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} = s.,$$

Cesàrova suma je invarijantna. Inače, skoro Banachova konvergencija poseban je slučaj ultrafilterske konvergencije definirane na svakom Hausdorfovu kompaktnom topološkom prostoru T na sljedeći način. Ako je $\mathcal{U}$ ultrafilter na J, onda za svaku funkciju $f : J \to T$ postoji $\lim_{\mathcal{U}} f$ takav da je

$$\lim_{\mathcal{U}} f = s \Leftrightarrow (\forall O)\left(O \text{ je okolina od } s \to \left\{x \in J : f(x) \in O\right\} \in \mathcal{U}\right).$$

Literatura:

[A] Asghari, A.: Equivalence: an attempt at a history of the idea, *Synthese* 196, 4657–4677, 2019.

[B] Bolzano, B. N.: *Spisy Bernarda Bolzano - Bernard Bolzano's Schriften, Functionenlehre*, Editor K. Rychlik, Královská Ceská Spolecnost Nauk, Prague, 1930.

[Ba] Banach, S.: *Théorie des Opérations linéaires* , Monografje Matematyczne, Warszawa, 1932.

[C] Cantor G.: Ueber die Ausdehnung eines Satzes der Theorie der trigonometrischen Reichen, *Mathem. Annalen von Clebsch und Neumann* 5, 123-132, 1872.

[C1] Cantor G.: *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*, Teubner, 1883.

[Ca] Cauchy, A. L.: *Cours d'Analyse de L'Ecole Royale Polytechnique*, Paris, 1821.

[Cl] Clark, P. L.: The instructor's guide to real induction, *Mathematics Magazine* 92/2, 136-150, 2019.

[Co] Conway, J. H.: *On Numbers and Games*, Academic Press, 1976.

[D] Dedekind, R.: *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Braunschweig, 1872.

[E] Ehrlich, P.: The Rise of non-Archimedean Mathematics and the Roots of a Misconception I: The Emergence of non-Archimedean Systems of Magnitudes, *Archive for History of Exact Sciences* 60/1, 1-121, 2006.

[H] Hausdorff, F.: 'Untersuchungen uber Ordnungstypen', *Ber. Verh. Königl. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig* 58, 106-169/59, 84-159, 1906/1907.

[He] Heine E.: Die Elemente der Functionenlehre, *J. reine angew. Math.* 74, 172-188, 1872.

[Hl] Helmholtz, H.: Zählen und Messen erkenntnis-theoretisch betrachet, *Philosophische Aufsätze Eduard Zeller gewidmet*, Leipzig, 1887.

[Hn] Henle, J. M.: Non-nonstandard analysis-Real infinitesimals, *The Mathematical Intelligencer* , 21(1), 67-73, 1999.

[Hö] Hölder, O.: *Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Mass.,* Ber. Verh. Kgl. Sachsis. Ges. Wiss. Leipzig, Math.-Phys. Classe 53, 1-64, 1901.

[K] Khintchine, A. : Das Stetigkeitsaxiom des Linearkontinuums als Iiduktionsprinzip betrachtet, *Fundamenta. Mathematicae* 4, 164-166, 1923.

[KLST] Krantz, D. Luce, D. Suppes, P. Tversky, A.: *Foundations of Measurement, Vol. I,* Academic Press, 1971.

[KK] Katz, K. U., Katz, M. G.: A Burgessian Critique of Nominalistic Tendencies in Contemporary Mathematics and its Historiography. *Foundations of Science* 17, 51–89, 2012.

[L] Laugwitz, D.: Eine Nichtarchimedische Erweiterung Angeordneter Körper, *Math. Nachrichte* 37, 225-236, 1968.

[M] Méray, C.: Remarques sur la nature des quantités définies par la condition de servir de limites ŕ des variables données, *Revue des Sociétés savantes, Sci. Math. Phys. Nat*. (2) 4, 280-289. 1869.

[MW] Marsden, J. E., Weinstein, A.: *Calculus Unlimited*, Benjamin/Cummings, 1981.

[P] Propp, J.: Real Analysis in Reverse, *The American Mathematical Monthly*, 120:5, 392-408, 2013.

[R] Robinson, A.: *Non-standard Analysis*, Princeton University Press, 1966.

[Š] Šikić, Z.: Compounding objects, *Bulletin of the Section of Logic* 49/2, 181 – 184, 2020.

[T] Tarski, J. A.: Uber einige fundamental Begriffe der Metamathematik, *C. R. Soc. Sc. Lettres Varsouie, classe* III, 23, 22-29, 1930.

[T1] Tarski, J. A.: *Introduction to Logic and to the Methodology of the Deductive Sciences*, Oxford University Press, 1941.

[W] Wigner, E. P.: The unreasonable effectivness of mathematics in the natural sciences*, Commun. Pure Appl. Math* 13, 1-14, 1960.

[Wi] Wilder, R. L.: *Evolution of the Topological Concept of „Connected"*, The American Mathematical Monthly 85/9, 720-726, 1978.